

NYPL RESEARCH LIBRARIES



3 3433 06636997 0



1874
Ch. 11



Hyet Andersen

*not RS
17-16
p.v.*

LÆRE

TEKNISK LÆREANSTALT

AF

STENFELD.



KJØBENHAVN 1898

FORFATTERENS FORLAG

KOMMISSION HOS JUL. GJELLERUP

LUDVIG JØRGENSENS BOGTRYKKERI

*After arrival
not R3
1117-16
p.v.*

TEKNISK ELASTICITETSLÆRE

GRUNDLAG

FOR

FORELÆSNINGER PAA POLYTEKNISK LÆREANSTALT

AF

A. OSTENFELD.

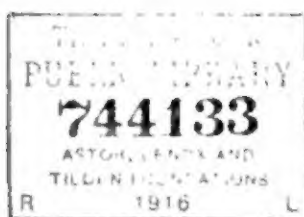


KJØBENHAVN 1898

FORFATTERENS FORLAG

I KOMMISSION HOS JUL. GJELLERUP

LUDVIG JØRGENSENS BOGTRYKKERI



NÆRVÆRENDE Bog er nærmest bestemt for de studerende ved Polyteknisk Lærestalt. Den udgør i og for sig et afsluttet Hele, men betragtet som Grundlag for mine Forelæsninger fremtræder den som første Del, idet den kun omfatter vel omtrent en Trediedel af det under mit Fag henlagte Stof. I Løbet af et Par Aar vil sandsynligvis Fortsættelsen — omhandlende Jærnkonstruktioners Theori og Praxis — følge.

Der er medtaget adskilligt, som ikke just kan forlanges ved Polyteknisk Examen, dels for at afrunde Fremstillingen, dels for at antyde, i nogle Tilfælde at Grænserne for vor Viden endnu langt fra ere naaede, i andre, at man befinder sig paa usikker Grund, hvor der trænges til nærmere Udreden af Forholdene. Bogen bliver maaske derved mindre egnet til direkte Benyttelse som elementær Lærebog, — men her skulle jo Forelæsningerne træde støttende til; — og naar de studerende først ere gaaede ud som praktiske Ingeniører, ville de formentlig have større Nytte af Bogen i denne lidt udvidede Form. — Af samme Grund ere Noterne med Henvisninger og Kildeangivelser medtagne. De fremtræde just ikke altid som egentlige Kildeangivelser, da en Mængde af Stoffet jo forlængst er gaaet over til at blive Almenejendom; meget ofte er der kun derved vist hen til en god eller en fyldigere Fremstilling, og Meningen har da været at give en Vejledning og Tilskyndelse til videre Studium.

Af Forsøgsresultater er der medtaget forholdsvis mange, navnlig i tredie Afsnit. Der gøres nu til Dags saa mange Forsøg, — hvorimod Bearbejdelsen af det indvundne Materiale ofte lader adskilligt tilbage at ønske, — at det er vanskeligt at foretage et passende Udvalg. Det ledende Princip for mig i saa Henseende har været: hvor Forsøgene have ført til Resultater, hvorom der hersker almindelig Enighed, er der kun eksempelsvis anført en eller nogle enkelte Forsøgsrækker for at give den rette Forstaaelse af vedkommende Resultats Rækkevidde og Nøjagtighed; hvor der derimod kan gøres forskellige Meninger gældende, er Forsøgsmaterialet medtaget i større Omfang. Det sidste gælder ligeledes Forsøg fra de senere Aar.

Af den grafiske Statik er der i første Afsnit kun medtaget, hvad der maa forudsættes for overhovedet at kunne anvende den som en med algebraiske Udviklinger sideordnet Methode. Største Delen af, hvad der ellers medregnes til grafisk Statik, er først meddelt, — eller vil først blive meddelt i Bogens Fortsættelse, — efterhaanden som der bliver Brug derfor.

Af originale Udviklinger findes der selvfølgelig i en Lærebog som denne ikke stort; Opmærksomheden henledes dog paa Behandlingen af Søjler, der blive paavirkede til Bøjning paa Grund af Trykkets Excentricitet eller af andre Aarsager. Ogsaa i Bearbejdelsen af Forsøgsresultaterne for centralt paavirkede Søjler og i Methoden til Dimensionsbestemmelse af saadanne [Formel (31)] vil man finde dog noget nyt.

Kjøbenhavn, den 1ste Juli 1898.

A. O.

INDHOLDSFORTEGNELSE.

1. AFSNIT.

ELEMENTERNE AF GRAFISK STATIK.

	Side
§ 1. Indledning. Krafttrekanten	1
§ 2. Kræfter i samme Plan og med fælles Angrebspunkt. Kraftpolygonen	1
§ 3. Kræfter, der ligge paa en vilkaarlig Maade i en Plan. Tovpolygonen	2
§ 4. Middeltrykslinie	3
§ 5. Flytning af Polen. En Tovpolygon gennem 3 givne Punkter. .	4
§ 6. Parallele Kræfter	7
§ 7. Tovkurver	8
§ 8. Tovpolygoner som Ligevægtsformer for materielle Tov- eller Stangsystemer	12
§ 9. Tyngdepunktsbestemmelse	16
§ 10. Bestemmelse af statiske Momenter	18
§ 11. Højere Momenter af parallelle Kræfter eller plane Arealer, <i>Culmann's</i> og <i>Mohr's</i> Metoder	20
§ 12. Inertimomenter og Centrifugalmomenter med Hensyn til Axer gennem samme Punkt. <i>Inertiellipsen</i> . <i>Land's</i> Konstruktion	25

2. AFSNIT.

USAMMENSATTE PAAVIRKNINGER.

§ 13. Indledning	37
I. <i>Træk og Tryk</i> .	
§ 14. Relationer mellem Spændinger og Formforandringer	40
§ 15. Deformationsarbejdet. Stød	45
§ 16. Variabelt Tværsnit	49
§ 17. Træk- og Tryk-Paavirkning samtidig i flere Retninger	50
II. <i>Forskydning</i> .	
§ 18. Relationer mellem Spændinger og Formforandringer	52
§ 19. Forskydningsspændinger i to paa hinanden vinkelrette Snit . .	54
§ 20. Relationer mellem Konstanterne for Normalspændinger og Forskydningsspændinger	58

III. Vridning.		Side
§ 21.	Vridning af en ret cirkulær Cylinder	62
§ 22.	Deformationsarbejdet	65
§ 23.	Vridning af en Cylinder med vilkaarligt Normalsnit.	66
IV. Bøjning.		
§ 24.	Almindelig Behandling af en lige Bjælke med konstant Tværsnit, idet Kraftplanen er en Symmetriplan	73
§ 25.	Exempel. En ved den ene Ende indspændt Bjælke.	82
§ 26.	Fortsættelse af § 24. Nedbøjningslinien som Toppolygon	86
§ 27.	En ved den ene Ende indspændt Bjælke	93
§ 28.	En ved begge Ender simpelt understøttet Bjælke	96
§ 29.	En ved begge Ender simpelt understøttet Bjælke, der ved Understøtningspunkterne er paavirket af Kraftpar	101
§ 30.	En i to Punkter simpelt understøttet Bjælke, der er forlænget ud over Understøtningerne	103
§ 31.	Statisk ubestemte Bjælker over én Aabning	105
§ 32.	Kontinuerlige Bjælker	119
§ 33.	Tværsnitsformer.	138
§ 34.	Dimensionsbestemmelse ved Hjælp af Nedbøjningerne	145
§ 35.	Forudsætningerne for den udviklede Bøjningstheori.	149
§ 36.	Variabelt Tværsnit	154
§ 37.	Bjælker med konstant største Fiberpaavirkning.	160
§ 38.	Forskydningsspændingerne i et højet Legeme	164
§ 39.	Forskydningens Indflydelse paa Nedbøjningerne	172
§ 40.	Deformationsarbejdet ved Bøjning	178

3. AFSNIT.

MATERIALERNES ELASTISKE EGENSKABER, MATERIALKONSTANTER OG ANDRE FORSØGSRESULTATER.

I. Smædeligt Jærn.		
§ 41.	Materialprøvernes Resultater i Almindelighed	182
§ 42.	Indflydelsen af Prøvestykkets Form ved Trækforsøg.	191
§ 43.	Gennemsnitsresultater (numeriske) af Forsøgene	197
§ 44.	Stød. Tidens Indflydelse paa Forsøgene	209
§ 45.	Temperatures Indflydelse.	214
§ 46.	Indflydelsen af den kemiske Sammensætning	220
§ 47.	Paavirkninger, der overskrider Proportionalitetsgrænsen. Hyppigt gentagne Paavirkninger.	223
§ 48.	Tilladelig Fiberpaavirkning	239
II. Andre bløde Metaller og Legeringer.		
§ 49.	Kobber, Zink, Bly, Aluminium, Broncer	251
III. Sprøde Materialer.		
§ 50.	Almindelige Elasticitetsforhold; Træk og Tryk	256
§ 51.	Indflydelsen af Træk- og Tryk-Prøvestykkernes Form og Størrelse; Paavirkningsmaaden	261

	Side
§ 52. Bøjning (under Forudsætning af Ligningen $\sigma = \alpha\epsilon - \beta\epsilon^2$). . .	271
§ 53. Støbejern	276
§ 54. Naturlige Sten, brændte Sten	284
§ 55. Mørtel, Beton, Murværk.	291
§ 56. Monierbjælkens Beregning	310

IV. Træ.

§ 57. Træ	318
---------------------	-----

4. AFSNIT.

SAMMENSATTE PAAVIRKNINGER AF LIGE BJÆLKER.

§ 58. Indledning	329
----------------------------	-----

I. *Paavirkning ved Normalspændinger alene, uden Hensyn til Nedbøjningerne.*

§ 59. Bøjning og Træk eller Tryk	330
§ 60. Kærne, W-Flade	339
§ 61. Excentrisk Tryk uden Trækmodstand	345
§ 62. Monierkonstruktioner, paavirkede af Moment og Normalkraft .	353

II. *Paavirkning ved Normalspændinger alene, under Hensyn til Nedbøjningerne.*

§ 63. Ideale Søjler	358
§ 64. Praktiske Søjler.	367
§ 65. Søjler med excentrisk Tryk	388
§ 66. Søjler og Trækstænger, paavirkede til Bøjning af Kræfter vinkelret, paa Længderetningen	397

III. *Normale og forskydende Spændinger.*

§ 67. Sammensætning af Normalspændinger og Forskydninger i Almindelighed	403
§ 68. Bøjning og Forskydning.	411
§ 69. Bøjning og Vridning	418

5. AFSNIT.

KRUMME BJÆLKER, PLADER.

§ 70. Bøjning af plankrumme Stænger.	421
§ 71. Plane Plader, paavirkede til Bøjning	435
§ 72. Plane Plader, paavirkede til Bøjning og Træk	445

FØRSTE AFSNIT.

Elementerne af Grafisk Statik.

§ 1. I den grafiske Statik repræsenteres en Kraft i Størrelse, Retning og Beliggenhed ved et Liniestykke. Retningen angives ved en Pilespids eller ved den Orden, hvori de Bogstaver nævnes, hvormed Liniestykkets Endepunkter ere mærkede; Kraften AB virker fra A til B . Kraftens Størrelse angives ved Liniestykkets Længde; ved Afsætning af Størrelsen maa man altsaa gøre Brug af en Kraftmaalestok, der kan være givet derved, at 1^{cm} betyder f. Ex. n^{ts} ($1^{cm} \sim n^{ts}$).

Hele den grafiske Statik er bygget op paa Sætningen om Kræfternes Parallelogram eller, som vi hellere ville kalde den, *Kræfternes Trekant*.

Som man ser, behøver man nemlig kun at tegne Trekanten ABC (Fig. 1, Pl. 1); man afsætter de to Kræfter AB og BC , der skulle sammensættes, efter hinanden og faar da Resultanten som den Linie AC der forbinder de yderste Endepunkter af de to Kræfter.

Ordenen af de to Kræfter er ligegyldig. Resultantens Retning er *modsat* den Omløbsretning, man faar i Trekanten ved at gaa ud fra Komposanterne.

Ved Krafttrekanten kan man ogsaa opløse en Kraft i to Komposanter f. Ex. med givne Retninger eller med given Retning og Størrelse af den ene.

§ 2. Kræfter i samme Plan og med fælles Angrebepunkt. Ved at sammensætte to af Kræfterne, deres

Resultant med en følgende Kraft " s. fr. Fig. 2, Pl. 1) kommer man til en *Kraftpolygon* *ABCDE*, hvor alle Kræfterne ere kædede sammen efter hinanden. Linien fra Kraftpolygonens Begyndelsespunkt *A* til dens Endepunkt *E* angiver Resultanten af alle Kræfterne i Størrelse og Retning: en hvilken som helst Linie, der forbinder to Vinkelspidser i Kraftpolygonen, er Resultant af de mellemliggende Kræfter.

Resultantens Retning er en saadan, at Kraftpolygonens Omløbsretning bliver afbrudt. Ordenen, hvori Kræfterne anbringes i Kraftpolygonen, er ligegyldig, da det i § 1 saas, at to paa hinanden følgende Kræfter kunne ombyttes.

Til *Ligevægt* af Kræfter med fælles Angrebspunkt fordres, at deres Resultant skal blive Nul, altsaa at *Kraftpolygonen skal lukke sig*. Dette vil være Tilfældet, naar Summen af Sidernes Projektioner paa to vilkaarlige rette Linier er Nul, og stemmer altsaa med den bekendte, analytiske Ligevægtsbetingelse — Er Kraftpolygonen lukket, vil dens Omløbsretning være *afbrudt*, altsaa: naar der er *Ligevægt*, haves en lukket Kraftpolygon med *afbrudt Omløbsretning*, hvorimod en Række Kræfter og deres Resultant danne en lukket Kraftpolygon med *afbrudt Omløbsretning*.

§ 3. Kræfter, der ligge paa en vilkaarlig Maade i en Plan. For at sammensætte saadanne Kræfter maa man foruden Kraftpolygonen, der giver Resultantens Størrelse og Retning, ogsaa tegne en *Tovpolygon*, der giver Beliggenheden.

De givne Kræfter virke efter Linierne 1, 2, 3 (Fig. 3 a, Pl. 1). Man begynder med at tegne Kraftpolygonen *ABCD* (Fig. 3 b, Pl. 1) og vælger dernæst et vilkaarligt Punkt *O* — *Polen* —, hvorfra man trækker Linier til Kraftpolygonens Vinkelspidser. Nu skrider man til Konstruktion af *Tovpolygonen* (Fig. 3 a): parallelt med *AO* trækkes en vilkaarlig Linie *I*, fra dens Skæringspunkt med Kraftlinien 1 trækkes Linien *II* $\perp$ *BO*, dernæst *III* $\perp$ *CO* o. s. v., indtil man ender med Linien *IV* $\perp$ *DO*. *I, II, III, IV* er da *Tovpolygonen*.

Man tænker sig nu Kraften 1 opløst efter *I* og *II*; den hertil nødvendige Krafttrekant er *AOB*, hvoraf ses, at 1 kan erstattes af Kræfterne *AO* og *OB* i Linierne *I* og *II*. Kraften 2 opløses paa samme Maade efter *II* og *III*, og af Krafttrekanten *BOC* faas Komposanternes Størrelse og Retning at

være BO og OC , o. s. v. I Linien II virker der altsaa de to lige store og modsat rettede Kræfter OB og BO , ligeledes i III Kræfterne OC og CO ; kun i den første og sidste Tovpolygonside, I og IV , haves kun én Kraft liggende.

Ved den angivne Konstruktion er det oprindelige Kraftsystem følgelig erstattet med de to enkelte Kræfter AO og OD , virkende i Linierne I og IV , og derved have vi tillige fundet Resultanten af alle Kræfterne, da den nemlig gaar gennem Skæringspunktet for I og IV og i Størrelse og Retning er bestemt ved AD .

Ved at vælge Polen O forskelligt kan man faa uendelig mange Tovpolygoner, og deres Antal forøges endnu en Gang i det uendelige derved, at man kan trække den første Side vilkaarligt; da de givne Kræfter imidlertid kun have én Resultant, maa første og sidste Side i alle Tovpolygonerne skære hinanden paa dennes Retningslinie.

Tovpolygonen giver os naturligvis Resultanten af hvilke som helst paa hinanden følgende Kræfter; Siden før og efter de betragtede Kræfter — altsaa hvilke som helst to Tovpolygonsider — maa følgelig skære hinanden paa samme rette Linie, enten de høre til den ene eller den anden af de uendelig mange Tovpolygoner.

For at der kan være Ligevægt, maa for det første Kraftpolygonen lukke sig. Dette er imidlertid ikke tilstrækkeligt, (Fig. 4, Pl. 1), idet Kraftsystemet i saa Fald som Regel vil reduceres til et Kraftpar. For at ogsaa dette skal forsvinde, maa dets Arm være Nul, d. v. s. Tovpolygonsiderne I og II skulle falde ud ad samme Linie, *Tovpolygonen maa lukke sig*. Denne Betingelse ses ogsaa at være tilstrækkelig. De nævnte Ligevægtsbetingelser stemme med den bekendte analytiske Form, der forlanger, at Kræfternes Projektioner paa to vilkaarlige Linier og at Kræfternes Momenter med Hensyn til et vilkaarligt Punkt skulle være Nul.

Til at bestemme en Tovpolygon fordres der tre Betingelser. Valget af Polen svarer nemlig til to Betingelser (ensbetydende med Valget af Retningen af to Tovpolygonsider), og desuden kan den første Side trækkes gennem et vilkaarligt Punkt.

§ 4. Middeltrykslinien. Blandt de uendelig mange Tovpolygoner, der svare til de forskellige Beliggenheder af

Polen, er der én, der ofte har særlig Interesse, nemlig den man faar ved at vælge Polen i Kraftpolygonens Begyndelsespunkt (Fig. 5, Pl. 1). Straalerne i Kraftpolygonen angive i saa Fald Størrelse og Retning af Resultanterne af alle de foregaaende Kræfter. Den første Straale falder sammen med Kraften 1, den tilsvarende Tovpolygonside ligeledes; den næste Straale er Resultant af 1 og 2, den tilsvarende Tovpolygonside angiver Retningslinien for denne Resultant; den tredje Straale er Resultant af 1, 2 og 3, den tilsvarende Tovpolygonside angiver Kraftlinien for denne Resultant o. s. fr. Resultanten af alle Kræfterne virker i sidste Tovpolygonside. Medens man ved en almindelig Tovpolygon først faar Kraftsystemet erstattet med to Kræfter, virkende i første og sidste Tovpolygonside, og dernæst kan sammensætte disse to til en enkelt Resultant, faar man her Resultanten direkte.

Denne specielle Tovpolygon kaldes *Middeltrykslinien* for Kræfterne; den finder Anvendelse ved Konstruktion af Murværker.

§ 5. Flytning af Polen. *Tegner man to Tovpolygoner til samme System af Kræfter men med forskellige Poler, ville de til hinanden svarende Sider i de to Tovpolygoner skære hinanden i Punkter af en ret Linie, parallel med Polernes Forbindelseslinie.*

Man kan nøjes med at betragte en enkelt af Kræfterne, P , (Fig. 6, Pl. 1.) og de dertil stødende Tovpolygonsider. I Kraft- og Tovpolygonen (Fig. 6 b og 6 a) faar man da to Firkanter, der af Diagonalerne deles hver i 4 Trekanter; de tre Par af disse ere ligedannede, idet Siderne ere parallelle, og derigennem findes ogsaa det fjerde Par (hvori OO_1 og cd ere Sider) at være ligedannede, idet de faa en Vinkel ligestor og to Par Sider proportionale; altsaa er $cd \neq OO_1$. *) Udvidelsen til flere Kræfter foretages let.

Sætningen kan udtrykkes saaledes: *naar Polen gennemløber en ret Linie, ville Tovpolygonsiderne dreje sig om faste Punkter i en ret Linie (Polaraxen), parallel med Polernes Forbindelseslinie.*

Omvendt: *naar to Tovpolygonsider dreje sig om faste Punkter c og d , ville alle de andre Sider dreje sig om Punkter*

*) Et statisk Bevis for Sætningen findes f. Ex. i *Jul. Petersen: Statik.* Kbhvn. 1881, S. 123.

i Linien cd , og Polen vil gennemløbe en ret Linie parallel med cd .

Thi ifølge Beviset ovenfor er Polernes Forbindelseslinie $OO_1 \neq cd$, og dernæst vides, at ogsaa de andre Tovpolygonsider ville dreje sig om Punkter i cd , naar Polen bevæger sig fra O til O_1 .

De beviste Sætninger kunne benyttes til at tegne en ny Tovpolygon uden at finde den tilsvarende Pol; man trækker blot de nye Tovpolygonsider gennem Skæringspunkterne for Siderne i den første Tovpolygon og Polaraxen; den nye Pol kan bestemmes ved at trække et Par Straaler i Kraftpolygonen, parallelle med de tilsvarende Tovpolygonsider. Derved har man ogsaa et Middel til at faa Tovpolygonen til at opfylde visse Betingelser, f. Ex. til at gaa gennem givne Punkter o. l.

Vil man saaledes konstruere en *Tovpolygon, der gaar gennem tre givne Punkter*, kan man gaa frem paa følgende Maade:

Man tegner først en Tovpolygon med en vilkaarlig Pol O_1 , og som gaar gennem et af de givne Punkter, A (den punkterede i Fig. 7, Pl. 1). Dernæst vælges en vilkaarlig Linie AD gennem A som Polaraxe, og man konstruerer en ny Tovpolygon (den fuldt optrukne i Fig 7), der gaar gennem det givne Punkt B , idet man begynder med Siden DB . Ved endelig at vælge AB som Polaraxe kan man faa Tovpolygonen til at gaa gennem det tredje givne Punkt (ikke udført i Fig. 7).

Ved den angivne Fremgangsmaade maa man tegne to Hjelpe-Tovpolygoner for at finde den søgte; da Konstruktionen imidlertid har Betydning ved Behandlingen af forskellige Opgaver (Hvælvinger, 3-Charniersbuer), skal her vises en simple Løsning.

Alle de Tovpolygoner til et givet Kraftsystem, der gaa gennem to faste Punkter, have ifølge det ovenfor viste deres Poler liggende paa en ret Linie, parallel med de to Punkters Forbindelseslinie. Vi ville begynde med at bestemme dette geometriske Sted for Polen.

Naar man skal bringe to Sider i en Tovpolygon til at gaa gennem to givne Punkter, A og B , kan man nøjes med at betragte disse to Sider og Resultanten af de mellemliggende Kræfter. I Fig. 8, Pl. 1, er R denne Resultant, I, II en vilkaarlig Tovpolygon (med Polen O_1) til Kraften R . Linierne

Aa_1 og Bb_1 , der skære hinanden i c paa R , danne en ny Tovpolygon med Polen O_2 . De to Tovpolygons tilsvarende Sider skære hinanden i a_1 og b_1 , hvorfor $a_1b_1 \neq O_1O_2$. Lader man nu Tovpolygonsiderne Aa_1 og Bb_1 dreje sig om A og B , maa Polen gennemløbe Linien $O_2m \neq AB$, og naar Tovpolygonsiderne specielt ere blevne parallelle med R (Aa og Bb), er Polen kommen i m . Men saa er $O_1m \neq ab$, af samme Grund som ovenfor førte til $O_1O_2 \neq a_1b_1$. Det søgte geometriske Sted O_2m for Polen findes derfor ved at trække Aa og Bb parallelle med R , $O_1m \neq ab$ og $O_2m \neq AB$.

Samtidigt med at Aa_1 og Bb_1 dreje sig om A og B og Polen gennemløber O_2m , ville Polaraxerne a_1b_1 , $ab \dots$ gaa gennem et fast Punkt M i AB ; thi Trekanten a_1b_1c glider med sine Vinkelspidser paa tre rette Linier gennem samme Punkt, medens to af dens Sider dreje sig om Punkterne A og B ; den tredie Side a_1b_1 maa saa ogsaa dreje sig om et fast Punkt paa AB .

Den oprindelige Opgave, at tegne en Tovpolygon gennem tre givne Punkter, A , B og C , er selvfølgelig løst, naar man har faaet Polen bestemt. Da Tovpolygonen skal gaa gennem A og B , maa Polen ligge paa en Linie parallel med AB , der bestemmes som ovenfor, og paa samme Maade finder man en anden Linie parallel med BC som geometrisk Sted for Polen. Den almindelige Løsning er vist i Fig. 9, Pl. 2. Der er først tegnet en vilkaarlig Tovpolygon (den punkterede) til de givne Kræfter 1—4 med Polen O_1 ; Resultanten af Kræfterne 1 og 2 mellem A og B er DE , og parallelt med DE trækkes Aa og Bb' til Skæring med Tovpolygonen; ligeledes er EF Resultant af Kræfterne 3 og 4, og parallelt med EF trækkes Linierne Bb'' og Cc . Dernæst trækkes $O_1m \neq ab'$ og $O_1n \neq b''c$, hvorefter den søgte Pol O findes ved $mO \neq AB$ og $nO \neq BC$.

Polaraxen for de to Tovpolygoner er MN , bestemt ved Skæringspunkterne for AB og ab' og for BC og $b''c$; man maa derfor have $MN \neq OO_1$. Ved Hjælp heraf kan den søgte Tovpolygon maaske findes uden at bestemme O , men muligvis falde en Del af Skæringspunkterne mellem MN og Tovpolygonsiderne ubekvemt; O kan i saa Fald bestemmes ved $O_1O \neq MN$ og ved en Straale i Kraftpolygonen parallel med en af de Tovpolygonsider, hvis Skæring med MN falder bekvemt.

Opg. 1. Konstruer en Tovpolygon til et givet Kraftsystem, saaledes at den gaar gennem to givne Punkter, og at en af Siderne har en given Retning, eller at Polen i Kraftpolygonen har en given Afstand fra Kræfternes Resultant.

§ 6. Parallele Kræfter. Alt, hvad ovenfor er meddelt om Kraft- og Tovpolygoner, gælder selvfølgelig ogsaa her; kun bliver Sagen ofte simplere.

I Fig. 10, Pl. 1, er tegnet en Kraft- og Tovpolygon til de tre parallelle Kræfter 1, 2 og 3. Kraftpolygonen bliver til en ret Linie, *Kraftlinien*; Resultantens Størrelse er den algebraiske Sum af Komposanternes. Polens Afstand fra Kraftlinien kaldes *Poldistancen*; den maales almindeligt vinkelret, men kan ligesaa godt maales skraat i en bestemt Retning.

Den grafiske Form for Ligevægtsbetingelserne er den samme som ovenfor.

I Fig. 11, Pl. 2, er tegnet Kraft- og Tovpolygon til et Kraftpar. Kraftpolygonen lukker sig, idet Kraftlinien AB skal gennemløbes to Gange i modsat Retning; OA er altsaa en Dobbeltstraale. Første og sidste Tovpolygonside, I og II , ere begge parallelle med OA og altsaa indbyrdes parallelle. Det givne Kraftpar kan erstattes af et nyt Kraftpar, dannet af to Kræfter af Størrelserne AO og OA og virkende i Linierne I og II . De to Kraftpars Momenter bevises let (ved de skraverede, lignedannede Trekanten) at være ligestore.

Ved Hjælp af Tovpolygoner kunne følgende vigtige Opgaver angaaende parallelle Kræfter løses.

Kraften P skal opløses i to Komposanter efter givne, med P parallelle Linier: man tegner en Kraft- og Tovpolygon for P (Fig. 12, Pl. 2). Komposanterne P_1 og P_2 , tagne med modsat Fortegn, skulle holde Ligevægt mod P , altsaa skal baade Kraft- og Tovpolygon til de tre Kræfter lukke sig. Tovpolygonsiderne før P_1 og efter P_2 skulle følgelig falde sammen i ab , og den dermed parallelle Straale i Kraftpolygonen kan nu trækkes og giver Størrelserne af P_1 og P_2 . Hvilket af de to Stykker, hvori P deles, der er P_1 og hvilket P_2 , findes ved at lægge Mærke til, at den Straale i Kraftpolygonen, der løber hen til Sammenstødspunktet for P og P_1 , skal være parallel med Tovpolygonsiden mellem P og P_1 .

Med samme Lethed løses Opgaven, naar man har flere parallelle Kræfter, der alle skulle opløses efter de samme to

med Kræfterne parallelle Retninger, saaledes som det ofte forekommer under følgende Form: *En Bjælke, paavirket af en Række parallelle Kræfter, hviler paa to Understøtninger, find Reaktionen* (Fig. 13, Pl. 2).

Der tegnes en Kraft og Tovpolygon; ved den sidste findes Beliggenheden af de givne Kræfters Resultant R , og Opgaven er nu reduceret til den forrige. Oplosningen foretages ved Hjælp af den allerede tegnede Tovpolygon, og det ses, at man ikke behøver at finde Resultanten først. Den Tovpolygonside, ab , der lukker Tovpolygonen, kaldes *Stutlinien*.

Ved Hjælp af Fig. 13 kan endnu en Opgave løses, som der ofte bliver Brug for i det følgende: *Find Resultanten af Kræfterne til venstre for Punktet C i Bjælken AB .*

Den søgte Resultant er $Q = A + 1 + 2 + 3$, og herved kan den naturligvis findes i Kraftpolygonen. Imidlertid kan den, navnlig naar man har med mange Kræfter at gøre, lettere findes saaledes: Kraftsystemet $A, 1, 2, 3$ kan erstattes af to enkelte Kræfter, virkende i Tovpolygonsiderne for A og efter 3 . Tovpolygonsiden for A er ab , den efter 3 er cd . Størrelserne af de to Kræfter findes i Kraftpolygonen som Længderne af de med ab og cd parallelle Straaler, og Resultanten af disse to Kræfter er Q og findes som det Stykke, de nævnte to Straaler afskære paa Kraftlinien.

Naar man lægger Mærke til, at ab og cd ere de to Tovpolygonsider, der træffes af et Snit gennem C , parallelt med Kræfterne, kan Resultatet udtrykkes saaledes: Resultanten Q findes som det Stykke, der afskæres paa Kraftlinien af de to Straaler, der ere parallelle med de af Snittet gennem C over-skaarne Tovpolygonsider.

Opg. 2. Konstruer en Tovpolygon til et givet System af parallelle Kræfter, saaledes at den gaar gennem to givne Punkter, og at en af Siderne har en given Retning.

Udfør Konstruktionen i Fig. 9, Pl. 2, for parallelle Kræfter.

§ 7. Tovkurver. Hvis man i Stedet for et endeligt Antal Kræfter af endelig Størrelse har et System af uendelig mange, uendelig smaa Kræfter, bliver Tovpolygonen til en Kurve. Hvis Kræfternes Retning er variabel, bliver ogsaa Kraftpolygonen en Kurve.

Størrelsen af de uendelig smaa Kræfter angives ved Bue-

elementet i Kraftkurven, Resultanten af en Række paa hinanden følgende af de uendelig smaa Kræfter bliver Korde i Kraftkurven. Tovpolygonsiderne blive til Tangenter til Tovkurven. De mellem A og B (Fig. 14, Pl. 2) virkende Kræfter kunne erstattes med to enkelte, der virke i Tovpolygonsiden før den første og efter den sidste af de betragtede Kræfter, d. v. s. i Tangenterne til Tovkurven i A og B , og hvis Størrelse angives ved Længden af de med disse Tangenter parallelle Polstraaler i Kraftpolygonen; Resultanten af Kræfterne mellem A og B er altsaa i Størrelse og Retning bestemt ved den Korde R' i Kraftpolygonen, der afskæres ved Straaler parallelle med Tangenterne i A og B , og dens Beliggenhed er bestemt ved Skæringspunktet for disse Tangenter.

Alt, hvad der ovenfor er meddelt angaaende Tovpolygoner, gælder ifølge den sædvanlige Gaaen til Grænsen ogsaa for Tovkurver.

Hvis man skal *tegne* en saadan Tovpolygon til uendelig mange, uendelig smaa Kræfter, er der naturligvis ikke andet at gøre end først at dele de uendelig smaa Kræfter i et endeligt Antal Grupper og at benytte Resultanterne af Kræfterne indenfor hver Gruppe i Stedet for de uendelig smaa Kræfter; jo større man gør Kræfternes Antal, og jo mindre man altsaa gør deres Størrelse, des mere vil den tegnede Tovpolygon nærme sig til den egentlige Tovkurve.

Man kan let bevise, at ved en saadan tilnærmet Konstruktion er den tegnede Tovpolygon omskrevet om Tovkurven. I Fig. 15, Pl. 2, har man i Stedet for de uendelig smaa Kræfter mellem A og B sat deres Resultant 1, ligeledes Resultanten 2 i Stedet for Kræfterne mellem B og C . Tovpolygonen til 1 og 2 er da omskrevet om Tovkurven og rører den i A , B og C ; thi hvis man kendte Tovkurven, skulde man netop bestemme Resultanterne 1 og 2 ved at trække Tangenterne i A , B og C , og disse Tangenter ere parallelle med Straalerne i Kraftpolygonen til Endepunkterne af Korderne 1 og 2 og danne altsaa netop Tovpolygonen for 1 og 2 (med samme Pol som Tovkurven).

Parallele Kræfter. Naar de uendelig mange, uendelig smaa Kræfter ere parallelle, kan deres Størrelse være given ved en Belastningskurve, d. v. s. en Kurve, hvis Ordinater $p = f(x)$ angive Størrelsen af Belastningen pr. Længdeenhed. Den uende-

lig lille Kraft i Punktet med Abscisse x er $p \cdot dx$, altsaa lig Arealelementet af Belastningsfladen (Arealet mellem Belastningskurven og Abscisseaxen), og hele Belastningen mellem to Punkter med Abscisser a og b er $\int_a^b p dx$, altsaa lig Arealet af Belastningsfladen. Naar man ved Tegning skal finde Tovpolygonen til en saadan Belastning (Fig. 16, Pl. 2, deler man Belastningsfladen ved Ordinaterne $p_1, p_2 \dots$ i Strimler og benytter Enkeltkræfter $P_{1-2}, P_{2-3} \dots$ af Størrelse som Arealerne af Strimlerne og virkende i disse Arealers Tyngdepunkter; Tovpolygonen til $P_{1-2}, P_{2-3} \dots$ rører da den egentlige Tovkurve, og Røringspunkterne falde i Ordinaterne $p_1, p_2 \dots$ (Skillelinierne mellem Strimlerne).

Undertiden har man Brug for *Tovkurvens Ligning* (parallele Kræfter). I Fig. 17, Pl. 2, er der lagt et vilkaarligt Koordinatsystem; man har da:

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{dy}{dx} = \frac{P_x}{h},$$

hvor P_x betegner Størrelsen af Belastningen mellem Punkterne a (hvis Tangent er parallel med X-Axen) og (x, y) , h Poldistancen; øverste Fortegn skal bruges, naar Tovkurven vender Konkaviteten i den positive Y-Retning, nederste, naar Konkaviteten vender i den negative Y-Retning.

Idet $dP_x = p dx$, bliver Tovkurvens Differentialligning:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = + \frac{p}{h}.$$

For at kunne udføre Integrationen maa man kende Belastningskurvens Ligning: $p = f(x)$; efter Integrationens Udførelse indeholder Ligningen tre Konstanter (Poldistancen og to Integrationskonstanter), hvilket stemmer med, at en Tovpolygon kræver tre Betingelser for at være bestemt. Konstanterne kunne bestemmes, naar man f. Ex. kender tre Punkter, hvorigennem Kurven skal gaa. Speciel Interesse har det Tilfælde, hvor Belastningskurvens Ligning er: $p = \text{Konst.}$; Belastningen siges da at være *ensformig fordelt*. Tovkurvens Ligning bliver i saa Fald:

$$y = + \frac{p \cdot x^2}{2h},$$

idet Integrationskonstanterne ere bestemte saaledes, at $x = 0$

giver $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$. Tovkurven er altsaa en Parabel med Toppunkt i Begyndelsespunktet og lodret Axe (Kraftretningen forudsat lodret).

Da denne Parabel ofte benyttes i det følgende, skal her vises en simpel Konstruktion af dens Punkter. I Fig. 18, Pl. 3, er, saaledes som det sædvanligt vil være Tilfældet, givet Toppunktet A , Tangenten i Toppunktet AB og Punktet C . Parabelpunktet i Verticalen Mm findes da ved at trække AC , der giver Punktet m_1 , dernæst $m_1m_2 \neq AB$, og endelig Am_2 , der giver det søgte Punkt m . Man har nemlig:

$$Mm = \frac{x}{l} \cdot Bm_1 = \frac{x}{l} \cdot Mm_1 = \frac{x^2}{l^2} \cdot BC.$$

Konstruktionen gælder ogsaa for skævvinklede Koordinater (naar BC er Diameterretningen for Tangenten AB).

Der er endnu et Tilfælde af kontinuerlig fordelt Belastning, som det kan have Interesse at undersøge, nemlig: *kan Belastningskurve og den tilsvarende Tovkurve falde sammen?*

Differentialligningen for den Kurve, der opfylder den nævnte Betingelse, er:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y}{h},$$

idet Belastningskurvens Ligning skal være: $p = y$, hvor y er Tovkurvens Ordinat. Det negative Fortegn skal benyttes, idet vi ville forudsætte, at det Stykke af Kurven, der skal bruges som Belastningskurve, og hvorom der altsaa alene er Tale, baade skal begynde og ende med Ordinaten Nul; og i saa Fald indser man, at y og $\frac{d^2y}{dx^2}$ maa have modsat Fortegn.

Integration af Differentialligningen giver:

$$y = C_1 \sin \sqrt{\frac{1}{h}} \cdot x + C_2 \cos \sqrt{\frac{1}{h}} \cdot x,$$

og hvis $x = 0$ skal give $y = 0$, faas $C_2 = 0$ og altsaa:

$$y = C_1 \sin \sqrt{\frac{1}{h}} \cdot x.$$

En af de tilbageværende Konstanter, C_1 og h , kan bestemmes ved, at f. Ex. $x = l$ skal give $y = 0$, hvorved

$$C_1 \sin \sqrt{\frac{1}{h}} \cdot l = 0.$$

Heraf faas enten $C_1 = 0$, altsaa det selvfølgelig Resultat, at til Belastningskurven $p = y = 0$ svarer Tovkurven $y = 0$.

eller
$$h = \frac{l^2}{n^2 \pi^2},$$

hvor n er et helt Tal; i sidste Tilfælde er Kurvens Ligning:

$$y = C_1 \sin \frac{n\pi}{l} \cdot x.$$

Den søgte Kurve er en Sinusoide, hvis Maximumsordinat er C_1 , altsaa vilkaarlig.

Det fundne Resultat faar Betydning ved Beregning af Søjler (§ 63).

Opg. 3. Find Tovkurvens Ligning, naar Belastningen varierer som Ordinaterne til Tovkurven selv, maalte ud fra en vandret Linie, der ligger paa Tovkurvens konvexe Side.

§ 8. Tovpolygoner som Ligevægtsformer for materielle Tov- eller Stangsystemer. De Systemer, hvorpaa der her tænkes, bestaa af Stænger (eller Tove), der to og to ere forbundne ved friktionsløse Led, Knudepunkterne, og i disse Punkter paavirkede af ydre Kræfter (se Fig. 19, Pl. 3). Til Ligevægt af et saadant System kræves først og fremmest, at alle de ydre Kræfter for sig, hertil medregnet Reaktionen fra faste Understøtnings- eller Ophængningspunkter, vilde holde hinanden i Ligevægt, hvis man tænkte sig dem virkende paa et og samme faste Legeme. Men at disse Kræfter overhovedet kunne komme til at indvirke paa hverandre og altsaa maaske holde hverandre i Ligevægt, muliggøres kun derved, at Systemets Stænger eller Tove overføre Virkningen fra det ene Knudepunkt til det andet; der maa med andre Ord i Systemets Led frembringes visse *Spændinger*. Man skelner mellem *Træk-* og *Trykspændinger*, eftersom de stræbe at forlænge eller forkorte Leddene; Trækspændinger ville i Almindelighed i det følgende blive regnede positive, Trykspændinger negative.

For at der kan blive frembragt en Spænding i en Stang, maa der virke to lige store, modsat rettede Kræfter paa den. Naar man skal afgøre, om en Spænding er Træk eller Tryk, maa man lægge Mærke til, om disse Kræfter betragtes som virkende paa Stangen eller paa de Knudepunkter, der forbindes af Stangen. I første Tilfælde faas Træk, naar Kræfterne virke

bort fra hinanden, i sidste Tilfælde naar Kræfterne virke bort fra Knudepunktet.

Foruden den ovennævnte Ligevægtsbetingelse, der maa være opfyldt af alle de ydre Kræfter, maa der til Ligevægt af Systemet endnu kræves, at der ikke er nogen Tilbøjelighed til Bevægelse i noget enkelt af Knudepunkterne. Hvis altsaa et Knudepunkt tænkes skaaret løst fra det øvrige System, maa Spændingerne i de to overskaarne Stænger holde Ligevægt mod den ydre Kraft i Knudepunktet; der maa kunne tegnes en lukket Kraftpolygon (Trekant) for hvert Knudepunkt.

Det kan nu vises, at *Ligevægtsformen for et saadant System er en Tovpolygon til de ydre Kræfter.*

Systemet i Fig. 19, Pl. 3, antages at have indstillet sig i sin Ligevægtsform $ABCD\dots$; A er et fast Ophængningspunkt (et friktionsløst Led), der giver en Reaktion efter Stangen AB 's Retning og i Størrelse lig Spændingen i AB . Krafttrekanten for Knudepunktet B er Oab , hvorved Spændingerne Oa og bO i Stængerne AB og BC ere bestemte. Da disse to og Kraften 1 holde hinanden i Ligevægt, er Omløbsretningen i Krafttrekanten uafbrudt; Spændingen i AB virker altsaa bort fra Knudepunktet, er en Trækspænding; ligesaa i BC . Dernæst tegnes Krafttrekanten for Knudepunkt C ; man kender i Forvejen Spændingen i BC og Kraften 2, og naar Spændingen i CD skal holde Ligevægt mod disse to, maa den være lig Siden cO i Trekanten Obc ; det skal altsaa passe af sig selv, hvis $ABCD\dots$ er Ligevægtsformen, at $CD \neq cO$. Paa samme Maade findes $DE \neq dO$, o. s. v. Men Samlingen af Krafttrekanter, som man efterhaanden faar tegnet, svarer aabenbart som Kraftpolygon med Polen O til $ABCD\dots$ som Tovpolygon, hvorved Sætningen er bevist.

At omvendt enhver Tovpolygon er en Ligevægtsform, følger af Tovpolygonens Konstruktion.

Det her viste gælder naturligvis ogsaa, naar Knudepunkternes Antal voxer i det uendelige, medens samtidigt Leddenes Længde og Kræfternes Størrelse bliver uendelig lille. Ligevægtsformen bliver da til en kontinuerlig Kurve, Systemet kaldes en *Bue* eller *Kæde*. Ligevægtsformen er i saa Fald en Tovkurve til de virkende Kræfter med de i § 7 viste Egenskaber.

Ex. 1. *De ydre Kræfter halvere Vinklerne mellem Systemets Led.*

Spændingen i en vilkaarlig af Systemets Stænger AB findes ved at opløse Kraften 1 efter de i A sammenstødende Led (Fig. 20, Pl. 3); Krafttrekanten bliver ligebeinet, Spændingerne i de to Led altsaa ligestore. Dette gælder to hvilke som helst paa hinanden følgende Led, altsaa blive alle Spændingerne lige store. Kraftpolygonen er følgelig indskrivelig i en Cirkel med Centrum i Polen. Vinklen mellem de yderste Polstraaler halveres af en Linie parallel med Korden, der angiver Resultanten af alle Kræfterne; Kræfternes Resultant halverer altsaa Vinklen mellem de yderste Systemdele.

Ere alle Kræfterne ligestore, ville alle Vinklerne mellem to paa hinanden følgende Straaler i Kraftpolygonen, altsaa ogsaa mellem to konsekutive Sider i Systemet, være lige store: og ere endelig alle Systemdelene lige store, vil Systemet kunne indskrives i en Cirkel.

Dette sidste Tilfælde faas, naar man har en *Kæde, der i sin Ligevægtsstilling er paavirket af ensformig fordelte Kræfter, virkende normalt paa Kæden* (Fig. 21, Pl. 3); Normalerne her svare til Halveringslinierne ovenfor. Baade Kraftpolygon og Ligevægtsform blive da Cirkelbuer.

Er Belastningen pr. Længdeenhed af Kæden lig p , Kædens Radius r og Centervinkel α , haves Resultanten af alle Kræfterne (efter Halveringslinien): $P = 2T \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha$, idet T er den konstante Spænding. Betragtes et uendeligt lille Bueelement $r \cdot d\varphi$ af Kæden, er den derpaa virkende Kraft: $pr \cdot d\varphi$, og ifølge Kraftpolygonen haves $pr \cdot d\varphi = T \cdot d\varphi$. Altsaa er:

$$T = p \cdot r, \quad P = 2pr \sin \frac{1}{2} \alpha = p \cdot AB.$$

Ligevægten forstyrres selvfølgelig ikke, naar den først er indtraadt, ved at man forvandler Kæden til et fast System; de fundne Formler maa derfor ogsaa gælde f. Ex. for en stiv Bue, der er forment efter en Cirkel og paavirket som ovenfor forudsat. — I Praxis faar det betragtede Tilfælde Betydning ved store Sluseporte, som man undertiden former efter en Cirkelbue for at undgaa Bøjning, (Belastningen hidrører her fra Vandets Tryk, som jo er ensformig fordelt og virker normalt paa Portens Overflade); ligeledes ved Indfatninger for Betonfundamenter til Bropiller (Jærnbanebroerne over Slotsholmskanalen).

Ex. 2. *De paa Systemet virkende ydre Kræfter ere parallelle.* (Fig. 22, Pl. 3). Kraftpolygonen reduceres til en ret

Linie; Spændingerne i Systemets Dele maales ved Straaerne fra Polen O ; herved faas strax, at *Spændingens Projektion paa en vinkelret paa Kraftretningen er konstant* (lig Poldistancen).

Naar alle Kræfterne ere lige store og alle Systemets Led have samme Projektion paa en vinkelret paa Kraftretningen, vil Ligevægtsformen være indskrivelig i en 2den Grads Parabel, hvis Axe er parallel med Kræfterne (Fig. 22, Pl. 3).

Forlænges nemlig alle Systemets Led til Skæring med den følgende Kraftlinie, faas ifølge Kraftpolygonen, at Stykkerne k blive lige store. Lægges der nu en Parabel med lodret Axe gennem Punkterne A , B og C (derved er Parablen bestemt), vil der mellem Korderne AB og BC paa Verticalen gennem C afskæres et Stykke

$$k = y_2 - y_0 - 2(y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0,$$

idet Koordinaterne til Punkterne A , B og C ere:

$$(x_0, y_0), (x_0 + a, y_1) \text{ og } (x_0 + 2a, y_2).$$

Ved Benyttelse af Parablens Ligning $x^2 = m \cdot y$ faas:

$$k = \frac{1}{m} [(x_0 + 2a)^2 - 2(x_0 + a)^2 + x_0^2] = \frac{2a^2}{m}.$$

k er altsaa uafhængig af x_0 , og Parablen vil derfor gaa gennem alle Systemets Knudepunkter. Den omskrevne Parabels Parameter m kan bestemmes paa følgende Maade. Af Figuren findes:

$$\frac{k}{P} = \frac{a}{h}, \text{ altsaa } k = P \cdot \frac{a}{h};$$

for Parablen fandtes: $k = \frac{2a^2}{m},$

hvorved $m = \frac{2ah}{P}.$

Den beviste Egenskab vedbliver at gælde, naar Systemet gaar over til at blive en Kæde. Naar en saadan er belastet med Kræfter, der ere ensformig fordelte over Horizontalprojektionen, bliver Hvileformen en Parabel, som allerede vist i § 7. Af Udviklingen her findes, naar man sætter $\frac{P}{a} = p$ (Belastingen pr. Længdeenhed), Parablens Ligning at være:

$$y = \frac{p \cdot x^2}{2h},$$

stemmende med Resultatet i § 7.

Kædespændingens vandrette Komposant er konstant, lig Poldistancen h . Den kan bestemmes, naar man kender den indbyrdes Beliggenhed af 3 Punkter af Kæden. Hvis Kæden f. Ex. er ophængt i to Punkter i samme Højde H over det laveste Punkt (Begyndelsespunktet for Koordinatsystemet) og med Abscisserne $\pm \frac{1}{2} l$, haves Spændingens vandrette Komposant

$$h = \frac{p l^2}{8H}.$$

Spændingen T i et vilkaarligt Punkt er lig Længden af den Straale i Kraftpolygonen, der er parallel med Punktets Tangent, altsaa

$$T = \sqrt{h^2 + p^2 x^2} = \frac{pl}{8H} \sqrt{l^2 + 16Hy}.$$

Parablen som Ligevægtsform for en Kæde finder Anvendelse ved Hængebroer.

§ 9. Tyngdepunktsbestemmelse for plane Arealer. Tyngdepunktet af et plant Areal findes, som bekendt, ved at inddele i Arealelementer, repræsentere hvert Elements Areal ved en Kraft gennem Elementets Tyngdepunkt og bestemme den Linie, hvori alle disse parallelle Kræfters Resultant virker; ved at lade Kræfterne virke i to forskellige Retninger finder man to rette Linier gennem Tyngdepunktet.

Det er herefter klart, at man kan anvende Tovpolygoner til Konstruktionen.

I Fig. 23, Pl. 3, er det forelagte Areal delt i tre Rektangler; disses Arealer ere beregnede og efter en eller anden Arealmaalestok ($1 \text{ cm} \sim n \text{ cm}^2$) afsatte som lodrette Kræfter i Kraftpolygonen. Med en vilkaarlig Pol O er der tegnet en Tovpolygon, og dennes yderste Sider skære hinanden i et Punkt af den lodrette Linie gennem Tyngdepunktet. Dernæst lader man de samme Kræfter virke i en ny Retning og bestemmer atter deres Resultant. Ved at anvende to paa hinanden vinkelrette Retninger af de parallelle Kræfter kan man nøjes med én Kraftpolygon; Siderne i den 2den Tovpolygon tegnes da vinkelret paa Kraftpolygonens Straaler.

Kræfternes Størrelse skal være proportional med de Arealer, de repræsentere. Dette kan opnaas ved som ovenfor at beregne

Arealerne og afsætte dem efter en eller anden Maalestok, eller man kan grafisk omforme de enkelte Arealer til Rektangler med samme Grundlinie og benytte Højderne som Kraftstørrelser. Fig. 24, Pl. 3, viser Omformning af Rektanglet $ABCD$ til et nyt Rektangel $AFGE$ med den givne Grundlinie AE ($FB \neq CE$). Kræfterne skulle anbringes gennem Smaaarealernes Tyngdepunkter. Man kan i den Anledning faa Brug for at kunne konstruere Tyngdepunktet i et Trapez; en saadan Konstruktion, som i mange Tilfælde er bekvemmere end den almindelige*), er angivet af *R. Land****) og ses i Fig. 25, Pl. 3: Tyngdepunktet T ligger paa Forbindelseslinien ME for Midtpunkterne af de parallelle Sider, og endvidere paa $T_1 T_2 \neq AC$; trækkes $BE \neq AC$, haves $MT = \frac{1}{3}ME$.

I et saa simpelt Tilfælde som det i Fig. 23 forudsatte, vil det være hurtigere at anvende en almindelig Momentberegning end en grafisk Konstruktion. Den beskrevne Methode faar først Betydning, naar det givne Areal er begrænset af forskellige krumme Linier, navnlig naar det kun er givet ved en Tegning. Konstruktionen udføres da mest praktisk paa følgende Maade (Fig. 26, Pl. 4).

Arealet inddeles ved Linier parallelle med den valgte Kraftretning i Strimler af konstant Bredde og med saa lille en Bredde, at Strimlen nøjagtigt nok kan betragtes som et Rektangel (i alt Fald saaledes at man strax nøjagtigt nok kan maale en Middelhøjde af Strimlen med Passeren); Kraftlinierne ligge da midt mellem Delelinierne, eller deres Beliggenhed kan ved større Afgivelser fra den rektangulære Form angives tilstrækkelig nøjagtigt ved et Skøn. I Fig. 26 er inddelt i Strimler af Bredde $\frac{3}{4}$ cm. undtagen i Skinneprofilets Krop, hvor der er anvendt den dobbelte Bredde for ikke at faa Arealerne altfor smaa. Strimlernes Højde (Middelhøjde) kan nu benyttes som Kraftstørrelse, men da den i Almindelighed er for stor til at bruges direkte, tager man kun en vis Brøkdel deraf, hvilket udføres ved en *Reduktionsvinkel* (Fig. 27, Pl. 4) uden at aflæse Højdens Størrelse paa nogen Maalestok: med Højden Oa i Passeren gaar man hen paa Reduktionsvinklen, og med det

*) Se f. Ex. *Jul. Petersen: Statik.*

**) *Robert Land: Einfluss der Schubkräfte auf die Biegung etc.* Berlin, 1895. I et »Anhang« gives forskellige Tyngdepunktsbestemmelser.

ene Passerben i *a* føler man sig frem, indtil det andet tangerer Linien *Ob*; Længden *ab* afsættes dernæst direkte i Kraftpolygonen; i Fig. 27 er $ab = \frac{1}{4}Oa$. Hvor Strimlernes Bredde er dobbelt saa stor som normalt, maa man naturligvis tage den dobbelte Kraftstørrelse af den, der direkte findes ved Reduktionsvinklen. At bruge en Reduktionsvinkel for Højderne med Forholdet $\frac{1}{n}$ er ensbetydende med at omforme Strimlerne til Rektangler med en *n*Gange saa stor Grundlinie som den konstante Bredde.

Naar man paa denne Maade har faaet Kraftpolygonen, tegnes Tovpolygonen som sædvanligt.

§ 10. Bestemmelse af statiske Momenter. Summen af Kræfterne 1, 2 og 3's Momenter med Hensyn til *C* kan bestemmes ved først at finde Resultanten *R* af Kræfterne ved Hjælp af en vilkaarlig Tovpolygon (Fig. 28, Pl. 3). Den søgte Momentsum er da lig *R.r*. Ved Lighedannethed findes imidlertid, idet man gennem *C* trækker en Linie parallel med *R*:

$$\frac{y}{r} = \frac{R}{h} \text{ eller } R.r = h.y.$$

h er Afstanden i Kraftpolygonen fra Polen til Resultanten *R*, *y* det Stykke, der afskæres paa Linien gennem *C*, parallel med *R*, af Tovpolygonsiden før 1 og efter 3.

For at finde Summen af et vilkaarligt Antal Kræfters statiske Momenter med Hensyn til C trækker man altsaa en Linie gennem C parallel med Kræfternes Resultant, maaler det Stykke y, der afskæres her af Tovpolygonsiderne før og efter de betragtede Kræfter, og multiplicerer dette med Afstanden i Kraftpolygonen fra Polen til Kræfternes Resultant.

h.y skal angives som Kraft $\times$ Længde (*kg.cm*); en af Størrelserne skal derfor maales paa Kraftmaalestokken, den anden paa Længdemaalestokken; det er ligegyldigt, hvilken man maaler som Kraft, hvilken som Længde.

Et Moment regnes positivt, naar det drejer i samme Retning som Viserne paa et Uhr (kaldes ofte: »til højre«), negativt, naar det drejer i den modsatte Retning.

Den angivne Konstruktion af Momenter har navnlig Betydning for parallelle Kræfter. Som det nemlig vil fremgaa af

det følgende, har man ofte Brug for Momentet af en Række paa hinanden følgende af Kræfterne i Systemet (ikke altid af dem alle) med Hensyn til forskellige Punkter, og naar Kræfterne ere parallelle, har man da den Fordel, at Størrelsen h er konstant (Poldistancen).

I Fig. 29, Pl. 3, har man saaledes Momentet af Kræfterne 1 — 5 med Hensyn til Punktet C lig $h.y$, af Kræfterne 3 — 5 med Hensyn til C_1 lig $h.y_1$, af Kræfterne 2 og 3 med Hensyn til C_2 lig $h.y_2$.

I Fig. 13, Pl. 2, har man Momentet af Kræfterne A , 1, 2 og 3 med Hensyn til C lig $h.y$, af Kræfterne A , 1 og 2 med Hensyn til D lig $h.y_1$ o. s. v.

Idet h her er konstant og Momentet altsaa ligefrem proportionalt med y , behøver man nu ikke hver Gang at foretage Multiplikationen af y og h , men man kan danne sig en *Momentmaalestok* og lade det konstante h indgaa i Maalestoksforholdet. Hvis h er afsat efter Længdemaalestokken, bliver

Momentmaalestokkens Enheder $\frac{1}{h}$ af Kraftmaalestokkens.

Ex. Længdemaalestok: 1 : 50 ($1^{\text{cm}} = 0,5^{\text{m}}$).

Kraftmaalestok: $1^{\text{cm}} = 2^{\text{kg}}$.

Poldistancen $h = 2,5^{\text{m}}$.

Momentmaalestok: $1^{\text{cm}} = 5^{\text{kgm}}$.

Hvis Momentarmene maales i en bestemt skæv Retning, kan man finde Momenterne ganske paa samme Maade, blot at man nu skal maale Poldistancen h i samme Retning som Momentarmene.

Af det her om Momenter meddelte følger, at Ordinaterne y i en Tovpolygon til parallelle Kræfter blive multiplicerede med n , hvis man dividerer Poldistancen h med n ; Produktet $h.y$ skal nemlig blive uforandret.

Ved *Momentet af et plant Areal* med Hensyn til en eller anden Axe forstaar man $\int x dF$, hvor dF betegner Arealelementet, x dets Afstand fra Axen. Denne Størrelse kan findes ved en Tovpolygon til Arealet som Belastningsflade; man indeler Arealet i Strimler (Fig. 26, Pl. 4) parallelle med Axen og tegner Kraft- og Tovpolygon (med Poldistance h_1) ganske som beskrevet under Tyngdepunktsbestemmelsen (§ 9). Det Stykke, der afskæres paa Axen mellem Tovpolygonsiderne før og efter de betragtede Arealelementer, er da proportionalt med Momentet.

Hvis de Længder, der i Kraftpolygonen repræsenterer Størrelsen af Arealelementerne, kaldes P , medens Strimlernes Arealer ere ΔF , haves $\Delta F = a \cdot P$, idet $1^{\text{cm}} \sim a \text{ cm}^2$. Har man, som i § 9 beskrevet, inddelt Arealet i Strimler med konstant

Bredde og benyttet $\frac{1}{n}$ af disses Højde som Kraftstørrelse, er a lig $n \times$ den konstante Bredde. — Man har nu:

$$h_1 \cdot y = \Sigma P \cdot x,$$

$$\text{altsaa} \quad \Sigma a P x = \Sigma \Delta F \cdot x = \int x dF = a h_1 y.$$

Momentet er af Dimensionen cm^3 ; a , h_1 og y skulle altsaa alle maales som Længder.

I Fig. 26, Pl. 4, haves f. Ex. Momentet m. H. t. x -Aksen af den Del af Skinneprofilet, der ligger over x -Aksen, lig

$$a h_1 y = 3 \times 5 \times 6,3 = 94,5 \text{ cm}^3,$$

idet y her er Stykket $0 - 7$ paa x -Aksen.

§ 11. Højere Momenter af parallelle Kræfter eller plane Arealer. Ligesom man ved det statiske Moment af en Række parallelle Kræfter forstaar

$$\Sigma P x = P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots,$$

hvor Afstandene x fra Momentcentret (eller en Axe parallel med Krafteretningen) til Kræfterne kunne maales i en vilkaarlig skraa Retning (specielt vinkelret), saaledes taler man ogsaa om Momenter af højere Orden og forstaar herved:

$$\Sigma P x^2 = P_1 x_1^2 + P_2 x_2^2 + \dots$$

Af disse er det i Almindelighed kun Tilfældet: $n = 2$, der har praktisk Betydning; $I = \Sigma P x^2$ kaldes *Inertimomentet*. Ogsaa denne Størrelse kan findes ved Hjælp af Tovpolygoner.

Culmann's Methode. Man kan skrive Inertimomentet som: $I = (P_1 x_1) \cdot x_1 + (P_2 x_2) \cdot x_2 + \dots$; man kan altsaa betragte Inertimomentet som statisk Moment af Kræfter $P_1 x_1$, $P_2 x_2$, ..., virkende i de oprindelige Kraftlinier.

I Fig. 30, Pl. 4, skal bestemmes Inertimomentet af Kræf-

terne P_1, P_2, P_3 med Hensyn til Axen LL . Man tegner først en Tovpolygon (den punkterede) med en vilkaarlig Poldistance h_1 (maalt i samme skraa Retning som $x_1, x_2 \dots$); denne Tovpolygons Sider afskære paa Axen LL Stykkerne

$$\overline{1-2} = \frac{P_1 \cdot x_1}{h_1}, \overline{2-3} = \frac{P_2 \cdot x_2}{h_1} \dots$$

Disse Størrelser betragtes nu som Kræfter, virkende i de samme Linier som $P_1, P_2 \dots$, og man tegner en Tovpolygon (den fuldt optrukne) til dem; Kraftpolygonen lader man blive liggende paa Axen LL , Poldistancen h_2 maales atter i x -Retningen. Den nye Tovpolygons Sider afskære paa Axen LL Stykkerne:

$$1'-2' = \frac{\left(\frac{P_1 \cdot x_1}{h_1}\right) \cdot x_1}{h_2} = \frac{P_1 \cdot x_1^2}{h_1 \cdot h_2} \dots \dots,$$

og dens yderste Sider afskære altsaa Stykket

$$t = \Sigma \frac{Px^2}{h_1 \cdot h_2}, \text{ hvoraf } I = h_1 \cdot h_2 \cdot t.$$

Inertimomentet er af Dimensionen $kg.cm^2$; en af de tre Størrelser skal følgelig maales paa Kraftmaalestocken, de to andre paa Længdemaalestocken; hvilken der maales som Kraft, er ligegyldigt. h_1 maa helst vælges en Del mindre end $\frac{1}{2}\Sigma P$, h_2 kan derimod godt tages en Del større end $\frac{1}{2}\Sigma \frac{Px}{h_1}$.

Mohrs Methode. Størrelsen $I = \Sigma Px^2$ kan ogsaa bestemmes ved den første Tovpolygon alene, idet man kan bevise, at den er proportional med det Areal, der indesluttet af Tovpolygonen, dens forlængede første og sidste Side og Axen LL .

Dette Areal (skraveret i Fig. 30) kan nemlig deles i Trekanter, hvis Toppunkter ligge paa Kraftlinierne, og hvis Grundlinier ere de Stykker 1—2, 2—3... (Fig. 30, Pl. 4), der af Tovpolygonsiderne afskæres paa Axen LL . Trekanternes Højder ere: $x_1 \sin \alpha, x_2 \sin \alpha \dots$. Hele Arealet bliver:

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot x_1 \sin \alpha \cdot \frac{P_1 x_1}{h_1} + \frac{1}{2} x_2 \sin \alpha \cdot \frac{P_2 x_2}{h_1} + \dots =$$

$$\frac{\sin \alpha}{2h_1} \cdot \Sigma P x^2 = \frac{\sin \alpha}{2h_1} \cdot I,$$

hvoraf:
$$I = \frac{2h_1}{\sin \alpha} \cdot F_1.$$

Hvis h_1 maales paa Kraftmaalestokken, skal F maales som [Længde]³

Ved et *plant Areal*s Inertimoment med Hensyn til en Axe LL forstaas: $I = \int x^2 dF$, hvor x betegner Afstanden (vinkelret eller skraa) fra Arealelementet dF til Axen. Det kan konstrueres efter begge de angivne Metoder, idet man inddeler Arealet i Strimler parallelle med Axen og erstatter de enkelte Strimlers Arealer med Kræfter, virkende i Strimlernes Tyngdepunkter og parallelt med Axen (angaaende den praktiske Udførelse af Konstruktionen gælder det i § 9 sagte).

Culmann's Methode. Naar de Liniestykker, der i Kraftpolygonen repræsenterer Strimlernes Arealer, kaldes $P_1, P_2, \dots$, finder man direkte ved Konstruktionen: $\Sigma P x^2 = h_1 \cdot h_2 \cdot t$.

Imidlertid har man, idet Strimlernes Arealer betegnes ΔF :

$$\Delta F = a \cdot P,$$

hvor a er den fælles Grundlinie i de Rektangler, hvis Højder (P) man har brugt som Kraftstørrelser; naar man altsaa har inddelt i Strimler med konstant Bredde b og har anvendt en

Reduktionsvinkel med Forholdet $\frac{1}{n}$, haves $a = n \cdot b$.

Derved faas
$$\Sigma \Delta F \cdot x^2 = a \cdot h_1 h_2 \cdot t.$$

Størrelsen $\Sigma \Delta F \cdot x^2$ er imidlertid tilnærmelsesvis lig $\int x^2 dF$.

Hvad det er for en Fejl, man begaar ved at sætte disse to Udtryk lige store, kan indses paa følgende Maade.

Naar man kender Inertimomentet I_0 af en Figur med Hensyn til en Axe gennem Tyngdepunktet, har man, som bekendt, Inertimomentet I_x med Hensyn til en med den første parallel Axe i Afstanden k :

$$I_x = I_0 + Fk^2,$$

idet F betegner hele Figurens Areal. Anvendes denne Formel

paa de enkelte Strimler, hvori man har delt Arealet, faar man hele Figurens Inertimoment

$$I = \Sigma I_0 + \Sigma \Delta F \cdot x^2.$$

Ved at regne med endelige Størrelser ΔF begaar man altsaa ved Konstruktionen ovenfor den Fejl ikke at medtage Leddet ΣI_0 .

Idet *Inertiradius* i er defineret ved:

$$I = F \cdot i^2,$$

faar man for den enkelte Strimmel:

$$I_x = \Delta F \cdot i_x^2 = I_0 + \Delta F \cdot x^2 = \Delta F (i_0^2 + x^2),$$

og for hele Figurens Inertimoment:

$$I = \Sigma I_x = \Sigma \Delta F \cdot i_x^2,$$

hvoraf ses, at man for at undgaa Fejlen skulde lade Kræfterne P virke i Afstanden $i_x = \sqrt{i_0^2 + x^2}$ fra Axen i Stedet for i Afstanden x .

Idet Strimlerne tilnærmelsesvis kunne betragtes som Rektangler, og idet et Rektangels Inertimoment med Hensyn til en Axe gennem Midtpunktet, parallel med de to Sider, er $I_0 = \frac{1}{12}bh^3$, (b er Rektangelsiden parallel med Axen, h Siden vinkelret paa denne), ses, at ΣI_0 bliver forsvindende, naar man vælger h , altsaa Strimlernes konstante Bredde, lille.

Naar man gør dette, har man da nøjagtigt nok:

$$I = a \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot t.$$

I er af Dimensionen cm^4 ; alle 4 Størrelser skulle altsaa maales paa Tegningens Længdemaalestok, a , h_1 og h_2 kunne vælges som runde Tal; h_1 vælges helst mindre end Kraftliniens halve Længde, h_2 kan derimod godt tages forholdsvis stor.

Mohrs Methode. Hvis man kunde konstruere Tovpolygonen til uendelig smaa Kræfter (Arealelementerne dF) i Stedet for til Strimlernes Arealer ΔF , vilde man faa en kontinuerlig Tovkurve, og Arealet mellem den, de yderste Tovpolygonsider og Axen vilde her nøjagtigt være proportionalt med Inertimomentet. Naar man deler i Strimler med endelig Bredde, haves deres Arealer, ligesom ovenfor,

$$\Delta F = a \cdot P;$$

endvidere er:
$$\Sigma Px^2 = \frac{2h_1}{\sin \alpha} \cdot F_1,$$

hvoraf:
$$\Sigma \Delta Fx^2 = \frac{2ah_1}{\sin \alpha} \cdot F_1 \dots$$

Man sætter nøjagtigt nok:

$$I = \frac{2ah_1}{\sin \alpha} \cdot F_1,$$

idet Fejlen, man begaar ved at regne Arealet F_1 til Tovpolygonen, ikke til Tovkurven, er forsvindende, naar man vælger Strimlerne tilstrækkelig smalle. Har man til at begynde med faaet inddelt i for brede Strimler, kan man ofte nøjagtigt nok tegne Tovkurven paa fri Haand, tangerende Tovpolygonen, og bestemme Arealet helt ind til Kurven efter Simpsons Formel. Eller man kan betragte Tovkurven som en Parabelbue fra Røringspunkt til Røringspunkt og til Arealet F_1 , der er begrænset af Tovpolygonen, addere Parabeltrekanterne $ABCD$. Arealet af $ABCD = \frac{1}{3} \triangle ABC$ (Fig. 31, Pl. 3).

I Fig. 26, Pl. 4, er konstrueret Inertimomentet m. H. t. den vandrette Tyngdepunktsaxe efter baade Mohrs og Culmann's Methoder. Konstruktionen af Kraftpolygonen (den første) er forklaret i § 9. Resultaterne ere indskrevne paa Tegningen. Saadanne Konstruktioner maa forøvrigt helst udføres i sand Størrelse.

Foruden Inertimomenterne af et plant Areal er der et andet Moment af 2den Orden, som man ofte faar Brug for, nemlig *Centrifugalmomentet* Z med Hensyn til to Axer. Det er defineret ved:

$$Z_{xy} = \int x \cdot y \cdot dF,$$

hvor x og y betyde Afstandene, skraat eller vinkelret maalte, fra Arealelementet dF til Axerne. Det kan findes ved en Konstruktion, der er ganske analog med Culmann's ovenfor, idet man sætter

$$Z_{xy} = \Sigma xy \Delta F = a \Sigma P \cdot x \cdot y = a \Sigma (P \cdot x) \cdot y.$$

Man indeler altsaa i Strimler, lader Kræfterne P virke parallelt med y -Aksen og finder ved en Tovpolygon Størrelserne

$\frac{P_1 x_1}{h_1} \dots$; dernæst lader man disse statiske Momenter virke som Kræfter parallelle med x -Aksen, og ved en ny Tovpolygon findes da Størrelserne

$$\left(\frac{P_1 x_1}{h_1} \right) \cdot \frac{y_1}{h_2} \dots$$

Kaldes det Stykke, som den 2den Tovpolygons yderste Sider afskære paa x -Aksen, c , have:

$$Z_{xy} = a \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot c.$$

Vi komme senere (§ 12) til en anden Konstruktion, som i Almindelighed er mere praktisk.

Kender man Centrifugalmomentet Z_0 med Hensyn til to Axer gennem Figurens Tyngdepunkt, have Centrifugalmomentet Z_{ab} med Hensyn til to nye, med de første parallelle Axer i Afstandene a og b :

$$Z_{ab} = \int (x + a)(y + b) dF = Z_0 + F \cdot a \cdot b.$$

Er den ene af Axerne en Symmetriaxe for Figuren (retvinklet eller skævt) og den anden parallel med Forbindelseslinierne for symmetriske Punkter, have Centrifugalmomentet lig Nul; Elementerne $xy dF$ ere nemlig lige store med modsat Fortegn for to symmetriske Punkter.

Ved Centrifugalmomentet med Hensyn til Axerne i et skævvinklet Koordinatsystem forstaas i Almindelighed $\int xy dF$, hvor x og y maales i Koordinataxernes Retninger; undertiden regnes dog x og y som de vinkelrette Afstande fra Axerne; her skal det altid forstaas paa den førstnævnte Maade.

§ 12. Inertimomenter og Centrifugalmomenter med Hensyn til Axer gennem samme Punkt; Inertiellipsen, Land's Konstruktion.

For en plan Figur, henført til et retvinklet Koordinatsystem, forudsættes følgende Størrelser bekendte:

$$\text{Inertimomentet om } X\text{-Aksen, } I_x = \int y^2 dF,$$

Inertimomentet om Y-Axen, $I_y = \int x^2 dF$,

Centrifugalmomentet om X- og Y-Axerne, $Z_{xy} = \int xy dF$.

Der søges $I_{x'}$, $I_{y'}$ og $Z_{x'y'}$ for et Par nye, paa hinanden vinkelrette Axer X' og Y' , der med de oprindelige danne Vinklen α ; Begyndelsespunktet er det samme.

Naar Koordinatsystemet drejes en Vinkel α , haves:

$$\begin{aligned} x' &= y \sin \alpha + x \cos \alpha, \\ y' &= y \cos \alpha - x \sin \alpha. \end{aligned}$$

Ved Indsættelse heraf i Udtrykkene for $I_{x'}$, $I_{y'}$ og $Z_{x'y'}$ faas:

$$I_{x'} = \int y'^2 dF = \cos^2 \alpha \int y^2 dF + \sin^2 \alpha \int x^2 dF - \sin 2\alpha \int x y dF,$$

og analoge Udtryk for $I_{y'}$ og $Z_{x'y'}$; altsaa:

$$\left. \begin{aligned} I_{x'} &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - Z_{xy} \sin 2\alpha, \\ I_{y'} &= I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + Z_{xy} \sin 2\alpha, \\ Z_{x'y'} &= \frac{1}{2} (I_x - I_y) \sin 2\alpha + Z_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1).$$

Ved Addition af de to første Ligninger findes:

$$\underline{I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y},$$

saa at Summen af Inertimomenterne med Hensyn til to paa hinanden vinkelrette Axer gennem samme Punkt er konstant. Idet Arealelementet dF har en Afstand $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ fra Begyndelsespunktet, haves:

$$I_x + I_y = \int (x^2 + y^2) dF = \int r^2 dF = I_r,$$

hvilken Størrelse ofte benævnes Figurens *polære Inertimoment*.

Sættes i den første af Ligningerne (1) $\alpha = 45^\circ$, faas:

$$Z_{xy} = \frac{1}{2} (I_x + I_y) - I_{x'},$$

hvor $I_{x'}$ betegner Inertimomentet om den Axe, der halverer Vinklen mellem X- og Y-Axernes positive Retninger. Ved Hjælp heraf kan Z_{xy} bestemmes alene ved de i § 11 meddelte Inertimoment-Konstruktioner.

Inertiellipsen. Afsætter man ud ad hver Linie gennem Begyndelsespunktet et Stykke, der er omvendt proportionalt med Inertimomentet om denne Linie, ville alle Endepunkterne

ligge paa en Ellipse. Ud ad Linien X' , der med X -Aksen danner Vinklen α , afsættes Længden $\frac{C}{\sqrt{I_{x'}}$; Koordinaterne til Endepunktet ere da:

$$x = \frac{C \cos \alpha}{\sqrt{I_{x'}}}, \quad y = \frac{C \sin \alpha}{\sqrt{I_{x'}}},$$

og ved Elimination af α mellem disse to og den første af Ligningerne (1) faas:

$$I_x \cdot x^2 + I_y \cdot y^2 - 2Z_{xy} \cdot xy = C^2,$$

som er Ligningen for en Ellipse. Dennes Axer kaldes *Hovedaxerne*; tages de til Koordinataxer, bliver Ligningen:

$$I_1 x^2 + I_2 y^2 = C^2,$$

hvor I_1 og I_2 betegne Hovedaxernes Inertimomenter (Hovedinertimomenterne).

Centrifugalmomentet med Hensyn til Hovedaxerne er Nul; Hovedinertimomenterne ere Maximum og Minimum af Inertimomenterne om Axer gennem Punktet.

Ved Ligningen ovenfor er der givet et helt System af ligedannede Ellipser; vi ville i det følgende stadig benytte den, for hvilken $C^2 = F \cdot i_1^2 \cdot i_2^2$, idet i_1 og i_2 betegne Inertiradierne om Hovedaxerne; denne specielle Ellipse har Ligningen:

$$\frac{x^2}{i_2^2} + \frac{y^2}{i_1^2} = 1.$$

Man lægger Mærke til, at i_2 er Inertiradius om Y -Aksen, i_1 om X -Aksen.

Ved Hjælp af Inertiellipsen kan man finde Inertimomenter og Centrifugalmoment om vilkaarlige nye Axer. I Fig. 32, Pl. 4, forudsættes Ellipsen bekendt; man skal finde $I_{x'}$, $I_{y'}$ og $Z_{x'y'}$.

Der trækkes en Tangent CD parallel med Y' -Aksen; dens Røringspunkt er D , dens Afstand fra Centrum OC . Idet $I_{y'} = F \cdot i_{y'}^2$, og idet vi analogt hermed sætte $Z_{x'y'} = F \cdot i_{y'} \cdot z_{x'y'}$ (herved er $z_{x'y'}$ defineret), haves da:

$$OC = i_{y'}, \quad CD = z_{x'y'}. \quad (2).$$

Afstanden fra Centrum til en Tangent, hvis Normal danner Vinklen α med X -Aksen, er:

$$OC = \sqrt{i_2^2 \cos^2 \alpha + i_1^2 \sin^2 \alpha}.$$

Paa den anden Side faas af Ligningerne (1), naar man gaar ud fra Hovedinertimomenterne som bekendte:

$$\begin{aligned} I_{y'} &= I_1 \sin^2 \alpha + I_2 \cos^2 \alpha, \\ \text{eller} \quad i_{y'} &= \sqrt{i_1^2 \sin^2 \alpha + i_2^2 \cos^2 \alpha}, \\ \text{altsaa} \quad i_{y'} &= OC. \end{aligned}$$

OD og Y'-Aksen ere et Par konjugerede Diametre, altsaa have:

$$\operatorname{tg} u \cdot \operatorname{tg} v = -\frac{i_1^2}{i_2^2};$$

endvidere er $v = 90^\circ + \alpha$, altsaa $\operatorname{tg} v = -\cot \alpha$

$$\text{og} \quad \operatorname{tg} u = \frac{i_1^2}{i_2^2} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Nu er $CD = OC \operatorname{tg} (u - \alpha) = i_{y'} \cdot \operatorname{tg} \alpha \frac{(i_1^2 - i_2^2) \cos^2 \alpha}{i_1^2 \sin^2 \alpha + i_2^2 \cos^2 \alpha}$;
Nævneren her er lig $i_{y'}^2$, hvorved:

$$CD = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cdot \frac{i_1^2 - i_2^2}{i_{y'}} = \frac{\frac{1}{2} \sin 2\alpha (I_1 - I_2)}{i_{y'} \cdot F}.$$

Paa den anden Side faas af den sidste af Ligningerne (1):

$$Z_{x'y'} = \frac{1}{2} (I_1 - I_2) \sin 2\alpha,$$

$$\text{altsaa} \quad Z_{x'y'} = F \cdot i_{y'} \cdot CD,$$

$$\text{eller} \quad z_{x'y'} = CD.$$

Idet vi i Fig. 32 have forudsat $I_1 > I_2$, ses CD af et af Udtrykkene ovenfor at være positiv, naar $\sin 2\alpha$ er positiv, altsaa naar $\alpha < 90^\circ$; dette er Tilfældet, naar D 's y' -Koordinat er positiv.

Kender man I_x , I_y og Z_{xy} for et Par vilkaarlige retvinklede Axer, kan man i hver Ellipsekvadrant angive en Tangent og dens Røringspunkt, hvorved Inertiellipsen er bestemt; dernæst kan man ved Ellipsens Hjælp bestemme Inertimomenter og Centrifugalmomenter for vilkaarlige andre Axer.

Vi ville dernæst betragte Anvendelsen af *skævvinklede* Koordinater. Gaar man ud fra et retvinklet Koordinatsystem og drejer X-Axen $90^\circ - \omega$ til Stillingen X' (Fig. 33, Pl. 4), have:

$$\begin{aligned}x' &= x \operatorname{cosec} \omega, \\y' &= y - x \cot \omega.\end{aligned}$$

Herved findes:

$$\left. \begin{aligned}I_{y'} &= \int x'^2 dF = \operatorname{cosec}^2 \omega \int x^2 dF = I_y \operatorname{cosec}^2 \omega. \\Z_{x'y'} &= \int x'y' dF = \operatorname{cosec} \omega [Z_{xy} - \cot \omega \cdot I_y].\end{aligned} \right\} \quad (3).$$

Af den sidste Ligning faas, at Centrifugalmomentet er Nul, hvis Vinklen mellem Axerne er bestemt ved:

$$\cot \omega = \frac{Z_{xy}}{I_y}. \quad (4).$$

Indføres ogsaa for skævvinklede Koordinater Betegnelserne:

$$I_{y'} = F \cdot i_{y'}^2, \quad Z_{x'y'} = F \cdot i_{y'} \cdot z_{x'y'},$$

findes: $i_{y'} = i_y \operatorname{cosec} \omega,$

$$Z_{x'y'} = \operatorname{cosec} \omega \cdot F \cdot i_y (z_{xy} - \cot \omega \cdot i_y),$$

og ved Benyttelse af Udtrykket for $i_{y'}$:

$$z_{x'y'} = z_{xy} - \cot \omega \cdot i_y.$$

I Fig. 34, Pl. 4, er Inertiellipsen givet. For det retvinklede Koordinatsystem (X, Y) have da:

$$OC = i_y, \quad CD = z_{xy}.$$

Naar X -Aksen drejes hen til Stillingen X' , bliver

$$OE = OC \operatorname{cosec} \omega, \quad ED = CD - OC \cot \omega,$$

altsaa:

$$i_{y'} = OE, \quad z_{x'y'} = ED. \quad (5).$$

Inertiellipsen har følgende ganske de samme Egenskaber for skævvinklede som for retvinklede Koordinater: *man finder i begge Tilfælde Inertiradius om den ene Axe som Afstanden ud til den med Axen parallelle Tangent, maalt i den anden Koordinataxes Retning, og Længden fra den anden Koordinataxes Skæringspunkt med Tangenten til Røringspunktet er proportional med Centrifugalmomentet.*

Holdes Y' -Aksen fast, medens X' -Aksen drejes, ser man, at $Z_{x'y'}$ skifter Fortegn, naar Punktet E (Fig. 34) passerer D . $Z_{x'y'}$ er positiv, naar D 's y' -Koordinat er positiv.

OD er den konjugerede Diameter til Y' -Aksen; falder X' -Aksen i OD , bliver $Z_{xy} = 0$, altsaa:

Centrifugalmomentet med Hensyn til et Par konjugerede Diametre i Inertiellipsen er Nul, og omvendt: Betingelsen for $Z_{xy} = 0$ er, at Axerne ere konjugerede Diametre. Vinklen mellem OD og Y' -Aksen maa altsaa være bestemt ved Ligning (4):

$$\cot \omega = \frac{Z_{xy}}{I_x},$$

hvilket ogsaa faas af Fig. 34.

Hvis X' -Aksen falder i OD , er $i_y = OD$; *Inertiradius om den ene af to konjugerede Diametre er lig Længden af den konjugerede Halvdiameter.*

Ved at kombinere det nu meddelte angaaende Inertimomenter og Centrifugalmomenter om Axer gennem samme Punkt med Reglerne for Parallelforskydning af Axerne kan man bestemme Inerti- og Centrifugalmomenter om ganske vilkaarlige Axer, naar man blot kan finde dem for et enkelt Par Axer. I Almindelighed er det simplest at faa fat paa dem for et Par Axer gennem Figurens Tyngdepunkt; findes der en Symmetri-axe, kan man strax gaa ud fra Hovedaxerne.

Opg. 4. Naar man kender Tyngdepunktets Inertiellipse, kan *Inertimomentet (ret- eller skævvinklet) om en vilkaarlig Axe udtrykkes som Produkt af Figurens Areal (F), Tyngdepunktets Afstand (a) fra Axen og Axiens Antipols Afstand (b) fra Axen ($I = F \cdot a \cdot b$). (Ved en Linies Antipol m. H. t. en Ellipse forstaas det symmetriske Punkt til Liniens Pol m. H. t. Ellipsens Centrum: analogt hermed taler man om et Punkts Antipolar).*

Opg. 5. Naar man kender Tyngdepunktets Inertiellipse, kan *Centrifugalmomentet (ret- eller skævvinklet) udtrykkes som Produkt af: Figurens Areal (F), Tyngdepunktets Afstand (a) fra den ene Axe og Afstanden (c) fra denne Axiens Antipol til den anden Axe ($Z = F \cdot a \cdot c$); Afstandene maales i Axernes Retninger *).*

*Land's Konstruktion**).* Ved Subtraktion af de to første af Ligningerne (1) ovenfor faas:

$$\frac{1}{2} (I_x - I_y) = \frac{1}{2} (I_x - I_y) \cos 2\alpha - Z_{xy} \sin 2\alpha.$$

*) Culmann: *Die graphische Statik*, II. Aufl. 1875. S. 404. De i disse Opgaver udtrykte Sætninger danne et af de væsentligste Udgangspunkter for den af Culmann og W. Ritter udviklede grafiske Beregning af elastiske Buer; cfr. W. Ritter: *Der elastische Bogen*, Zürich 1886.

**) Methoden er oprindelig angivet af Mohr, senere videre udviklet af Rob. Land i Zeitschr. f. Bauwesen, 1892 (ogsaa som Særtryk: *Die Ermittelung der Spannungsvertheilung und des Kernes*, Berlin. 1892). Beviset her er tildels taget efter P. W. Almquist: *Grafostatik*. Stockholm. 1893.

Heri og i den sidste af Ligningerne (1) indføres:

$$\frac{1}{2}(I_x - I_{y'}) = v', \quad \frac{1}{2}(I_x - I_y) = v,$$

$$Z_{x'y'} = u', \quad Z_{xy} = u,$$

hvorved faas:

$$u' = v \sin 2\alpha + u \cos 2\alpha,$$

$$v' = v \cos 2\alpha - u \sin 2\alpha.$$

Disse Ligninger ere netop dem, der skulle anvendes for at iværksætte en Koordinatændring fra et retvinklet System (u, v) , til et nyt retvinklet System (u', v') , der med det første danner Vinklen 2α . Hvis man altsaa i et givet retvinklet Koordinatsystem afsætter et Punkt med Koordinaterne u og v , saa kunne u' og v' findes som Koordinater til samme Punkt i et System, der faas af det første ved en Drejning gennem Vinklen 2α i den positive Omdrejningsretning (fra u -Aksen til v -Aksen). — I Fig. 35, Pl. 4, er ud ad Y -Aksen (idet I_x er forudsat $> I_y$) afsat $OR = I_x$, $RY = I_y$, og over OY som Diameter er tegnet en Cirkel, der altsaa tangerer X -Aksen i O . Endvidere er afsat $RT = Z_{xy}$ (i den positive X -Retning, hvis Z_{xy} er positiv). Man har da: $\frac{1}{2}(I_x - I_y) = v = MR$, $u = RT$; u - og v -Axernes positive Retninger ere angivne i Figuren.

Naar nu Axerne XY drejes Vinklen α til Stillingen $X'Y'$, vil Systemet (u, v) blive drejet Vinklen 2α til Stillingen (u', v') , og T 's Koordinater i dette nye System angive altsaa Størrelserne:

$$MR' = \frac{1}{2}(I_x - I_{y'}), \quad R'T = Z_{x'y'}.$$

Idet $I_x + I_{y'} = I_x + I_y =$ Cirkelns Diameter, haves nu:

$$X'R' = I_x, \quad R'Y' = I_{y'}, \quad R'T = Z_{x'y'}.$$

Naar man har tegnet Cirklen og afsat Punktet T som ovenfor beskrevet, findes altsaa $Z_{x'y'}$ for et Par nye retvinklede Axer OX' og OY' som T 's Afstand fra Diameteren $X'Y'$, og Fodpunktet R' deler Diameteren $X'Y'$ i Stykkerne $R'X' = I_{y'}$ (nærmest ved X') og $R'Y' = I_{y'}$ (nærmest ved Y'). —

Ved denne Konstruktion danner man sig let et Billede af, hvorledes Inertimomenter og Centrifugalmomenter variere, naar Axerne dreje sig. Centrifugalmomentet bliver aabenbart Nul, naar Diameteren $X'Y'$ gaar gennem T , altsaa falder sammen med MT . De tilsvarende Axeretninger ere $O1$ og $O2$, *Hovedaxerne*. Inertimomenterne om disse Axer, *Hovedinerti-*

momenterne, ere T_1 og T_2^*) og ses at være det største og det mindste af Inertimomenterne om Axer gennem O ; Axen $O1$, om hvilken Inertimomentet er størst, kaldes den *første Hoved-axe* ($O1$ og $O2$ ere Axerne i Inertiellipsen). — Centrifugalmomentet naar sin største Værdi ($= MT$), naar den bevægelige Diameter staar vinkelret paa MT ; de hertil svarende Axer halvere Vinklerne mellem Hovedaxerne. — Centrifugalmomentet om Axerne OX' og OY' findes altsaa som Punktet T 's Afstand fra Diameteren $X'Y'$; for at bestemme Fortegnet for $Z_{x'y'}$ skulde man egentlig være klar over den positive Retning af u -Axen svarende til hver Stilling af den bevægelige Diameter $X'Y'$. Alle Besværligheder i saa Henseende kunne imidlertid omgaas, idet man benytter sig af, at Centrifugalmomentet kun skifter Fortegn, naar den bevægelige Diameter falder i MT , altsaa naar X' falder i Punkterne 1 eller 2. $Z_{x'y'}$ har *følgelig samme Fortegn som Z_{xy} ($= RT$), hvis man kan dreje OX hen til Stillingen OX' , uden at X' derved passerer 1 eller 2, ellers (for én Passage) modsat Fortegn. Da Inertimomenterne altid ere positive, maa Punktet T altid falde indenfor Cirklen.*

Den angivne Konstruktion kan ogsaa anvendes for *skævvinklede Koordinater* og for Overgang fra ret- til skævvinklede. I Fig. 36, Pl. 5, er Cirklen og Punktet T bestemt ganske som i Fig. 35. For de vilkaarlige retvinklede Axer OX og OY haves altsaa: $R'T = Z_{xy}$, $R'Y = I_y$. Drejes nu OX til Stillingen OX' , der med OY danner Vinklen ω , findes T 's Afstand fra Korden $X'Y$ ved at projicere $YR'T$ ind paa $R''T$. Dette giver:

$$R''T = Z_{xy} \sin \omega - I_y \cos \omega = \sin \omega (Z_{xy} - \cot \omega \cdot I_y),$$

og ved Sammenligning af dette Udtryk med den sidste af Ligningerne (3) ovenfor findes:

$$R''T = Z_{x'y'} \cdot \sin^2 \omega.$$

$Z_{x'y'}$ er Centrifugalmomentet om de skævvinklede Axer OX' og OY , idet Arealelementernes Afstande fra Axerne maales i de skæve Retninger. Hvis man derimod, som man undertiden har gjort, maalte disse Afstande vinkelret paa Axerne, vilde man (Fig. 37, Pl. 5) have:

*) Hjælpecirkelns Diameter er her altsaa $I_1 + I_2$. Ved en anden almindelig anvendt Konstruktion (se f. Ex. Müller-Breslau: »Die graphische Statik der Baukonstruktionen«, I, 1887) benyttes en Cirkel med Diameter $I_1 - I_2$.

$$Z_{x_1y_1} = \int x_1y_1dF = \sin^2\omega \int x'y'dF = \sin^2\omega \cdot Z_{x'y'}$$

og altsaa

$$R''T = Z_{x_1y_1}.$$

Vi ville dog for at undgaa Forvexlinger fastholde vor oprindelige Definition af Centrifugalmomentet i skævvinklede Koordinater, altsaa derved forstaa $Z_{x'y'}$.

Størrelsen $Z_{x_1y_1}$ kan imidlertid benyttes til at gøre Overgang til Inertimomenterne. Hvis nemlig Vinklen ω mellem Axerne bliver Nul, falde x_1 og y_1 (Fig. 37) sammen, og $\int x_1y_1dF$ gaar over til at betyde Inertimomentet i retvinklede Koordinater. Lader man Axerne falde sammen i OX' (Fig. 36), gaar Korden $X'Y$ over til at blive Tangent til Cirklen i X' , og Afstanden TP fra T til Tangenten er da Inertimomentet i retvinklede Koordinater om Axen OX' ; paa samme Maade er TQ Inertimomentet i retvinklede Koordinater om OY . Dette er forøvrigt kun et almindeligere Udtryk for den ovenfor viste Konstruktion af I_x og I_y (som de Stykker, hvori Diameteren deles af Fodpunktet for den vinkelrette fra T).

Ifølge den første af Ligningerne (3) ovenfor finder man Inertimomentet i skævvinklede Koordinater ved blot at multiplicere Inertimomentet om samme Axe i retvinklede Koordinater med $\operatorname{cosec}^2\omega$. — Resultaterne af vore Undersøgelser angaaende skævvinklede Koordinater kunne nu udtrykkes saaledes: *man finder Inertimomenter og Centrifugalmoment, begge i skævvinklede Koordinater, med Hensyn til Axerne OX' og OY ved blot at multiplicere Punktet T 's Afstande fra Tangenterne i X' og Y og fra Korden $X'Y$ med $\operatorname{cosec}^2\omega$, altsaa:*

$$I_x = \operatorname{cosec}^2\omega \cdot TP, \quad I_y = \operatorname{cosec}^2\omega \cdot TQ,$$

$$Z_{x'y'} = \operatorname{cosec}^2\omega \cdot TR''.$$

Af Fig. 36 ses, at $Z_{x'y'}$ bliver Nul, naar Korden $X'Y$ gaar gennem T . Linier fra O til Endepunkterne af saadanne Korder kaldes *konjugerede Axer* (ere konjugerede Diametre i Inertiellipsen).

Kender man Hovedaxerne og Hovedinertimomenterne i Forvejen, bliver Konstruktionen simplere, idet Punktet T falder paa Y -Aksen.

Formler til Beregning af Hovedaxernes Stilling og Hovedinertimomenterne. Hvor det kommer an paa større Nøjagtighed, maa man helst *beregne* disse Størrelser. Af Fig. 35, Pl. 4, faas Vinklen fra X-Axen til den første Hovedaxe, $O1$, lig $\gamma = \angle XO1$, og $\angle TMR = 2(180^\circ - \gamma)$;

$$\operatorname{tg} TMR = -\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{Z_{xy}}{\frac{1}{2}(I_x - I_y)},$$

$$\text{altsaa} \quad \operatorname{tg} 2\gamma = \frac{2Z_{xy}}{I_y - I_x}; \quad (6).$$

det samme faas af den sidste af Ligningerne (1), naar man bestemmer den Værdi af α , for hvilken $Z_{x'y'} = 0$.

Af Figuren ses endvidere, at Punkterne T og 1 altid ville falde paa modsat Side af OY , hvoraf følger, at Z_{xy} og $\operatorname{tg} \gamma$ altid have modsat Fortegn; herved kan den rigtige Værdi for γ vælges (Ligningen ovenfor bestemmer to Værdier).

Inertimomentet I_1 om Axen $O1$ er lig $T1 = OS$, idet $TS \neq O1$, og $OS = OR + RS = I_x + Z_{xy} \operatorname{tg}(180^\circ - \gamma)$.

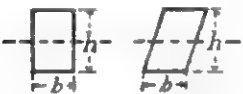
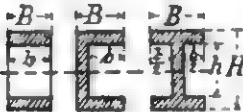
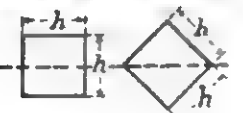
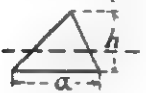
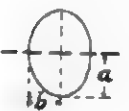
Idet $I_1 + I_2 = I_x + I_y$, haves altsaa:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= I_x - Z_{xy} \operatorname{tg} \gamma, \\ I_2 &= I_y + Z_{xy} \operatorname{tg} \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (7).$$

Nogle hyppigt forekommende Inertimomenter. Inertimomenterne af Figurer, der begrænses af rette Linier, kunne altid findes ved Inddeling i Rektangler, Trekanter o. l. simple Figurer og Addition eller Subtraktion af de enkelte Deles Inertimomenter.

For regulære Figurer er Tyngdepunktets Inertiellipse en Cirkel, altsaa alle Inertimomenter om Axer gennem Tyngdepunktet lige store.

Axen er i Tabellen nedenfor angivet ved en punkteret Linie. For Cirklen gaar Axen gennem Centrum (ikke angivet i Fig.).

Figur	Inertimoment	Inertiradius
	$\frac{1}{12} bh^3$	$\frac{h}{\sqrt{12}}$
	$\frac{1}{3} bh^3$	$\frac{h}{\sqrt{3}}$
	$\frac{1}{12} (BH^3 - bh^3)$	
	$\frac{1}{12} h^4$	$\frac{h}{\sqrt{12}}$
	$\frac{1}{36} ah^3$	$\frac{h}{3\sqrt{2}}$
	$\frac{1}{12} ah^3$	$\frac{h}{\sqrt{6}}$
	$\frac{1}{4} \pi r^4 = \frac{1}{64} \pi d^4$	$\frac{1}{2} r = \frac{1}{4} d$
	$\frac{1}{4} \pi a^3 b$	$\frac{1}{2} a$

Exempet. Man skal bestemme Hovedaxernes Stilling og Hovedinertimomenterne for et Z-Jærn, N. P. Nr. 16. Alle Dimensioner findes i Fig. 38, Pl. 5.

For at finde I_x , I_y og Z_{xy} inddeles Figuren i tre Rektangler, Hoved, Fod og Krop.

$$I_x = \frac{1}{12} \cdot 0,85 \cdot 13,8^3 + \frac{1}{12} \cdot 7 (16^3 - 13,8^3) = 1043 \text{ cm}^4.$$

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 13,8 \cdot 0,85^3 + 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot 1,1 \cdot 7^3 + 2 \cdot 7 \cdot 1,1 \cdot 3,075^2 = 209 \text{ cm}^4.$$

$$Z_{xy} = 2 \cdot 7 \cdot 1,1 \cdot 7,45 \cdot 3,075 = + 353 \text{ cm}^4.$$

Z_{xy} er Nul for Kroppen, for Hoved og Fod findes det ved Formlen for Parallelflytning af Axerne.

Af Lign. (6) faas:

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{2 \cdot 353}{209 \div 1043} = \div 0,846.$$

$$\div 2\gamma = n \cdot \pi + 40^{\circ} 14'.$$

$$\gamma = \begin{cases} \div 20^{\circ} 7', \\ \div 110^{\circ} 7'. \end{cases}$$

Da Z_{xy} er positiv, skal tages: $\gamma = -20^{\circ} 7'$, hvorved $\operatorname{tg} \gamma = \div 0,366$.

Af Lign. (7) findes nu:

$$I_1 = 1043 + 353 \cdot 0,366 = 1172 \text{ cm.}^4.$$

$$I_2 = 209 - 353 \cdot 0,366 = 80 \text{ cm.}^4.$$

Hovedaxernes Stilling er vist i Fig. 38.

ANDET AFSNIT.

Usammensatte Paavirkninger.

§ 13. Den tekniske Elasticitetslære beskæftiger sig med to Hovedopgaver, nemlig at bestemme Dimensionerne af et Legeme, der er paavirket af givne ydre Kræfter, og at bestemme de af Kræfterne bevirkede Formforandringer. Naar man gaar til Bunds i Sagen, vil det imidlertid vise sig, at ogsaa Dimensionsbestemmelsen beror paa en Bestemmelse af Formforandringer, — Dimensionerne maa være tilstrækkelige til at hindre Formforandringerne i at overskride den »tilladelige Grænse«. Den tekniske Elasticitetslæres Maal er altsaa direkte eller indirekte en Bestemmelse af Formforandringerne som Funktioner af de ydre Kræfter.

Den rationelle Mekanik giver Ligevægtsbetingelserne for de ydre Kræfter, idet Legemerne i Almindelighed betragtes som absolut faste. De paa denne Maade udledede Ligevægtsbetingelser have ikke desto mindre fuld Gyldighed ogsaa her, naar man indskrænker sig til at undersøge Forholdene, efterat Formforandringen har fundet Sted og der er indtraadt Ligevægt. I de første Øjeblikke efterat Kræfterne have begyndt at virke, vil der, hvis dette er sket pludseligt, indtræde Svingninger om Ligevægtsstillingen; Undersøgelsen af de herved bevirkede Formforandringer og deres Tilladelighed har selvfølgelig overordentlig stor praktisk Betydning, men er i de fleste Tilfælde ugennemførlig eller i alt Fald meget vidtløftig, saa man søger at komme udenom Spørgsmaalet og hjælpe sig

med de for Ligevægt fundne Resultater, idet man modificerer disse ved Tilføjeelse af Erlaringskoefficienter. Vi ville kun enkelte Gange i det følgende komme til at strejfe ind paa dette »dynamiske Omraade: i Almindelighed forudsætte vi Ligevægten indtraadt.

Formforandringerne kunne være *elastiske*, d. v. s. de forsvinde, naar Kræfterne høre op at virke, eller *permanente*, og Legemernes Forhold overfor de ydre Kræfters Virkning er højst forskelligt, eftersom det ene eller det andet er Tilfældet. Naar et Legeme kun er i Stand til at undergaa permanente Formforandringer, er den Modstand, Legemet gør mod at deformeres, kun passiv, naar Formforandringen er foregaaet, hersker der ingen indre Spændinger. Hvis Legemet derimod er fuldstændig elastisk, frenkaldes der aktive indre Kræfter, der modsætte sig Formforandringen, og denne fortsættes kun, indtil der bliver Ligevægt mellem de ydre Kræfter og de indre Modstande. Legemet forholder sig som en spændt Fjeder. Til givne ydre Kræfter svarer der ganske bestemte Spændinger i Legemets forskellige Punkter, og idet Formforandringerne variere med Spændingerne, maa man først bestemme disse sidste.

Til Bestemmelse af Spændingerne har man, at de skulle holde Ligevægt mod de ydre Kræfter, og til Ligevægt fordres, at hver enkelt Del af Legemet for sig skal være i Ligevægt. Hvis man derfor skærer en Del af Legemet løs fra det øvrige ved et eller flere, plane eller krumme Snit, maa altsaa de indre Kræfter, der virke paa disse Snit, holde Ligevægt mod de ydre Kræfter paa det udskaarne Stykke af Legemet. Spændingerne variere naturligvis i Almindelighed fra Punkt til Punkt i Snittene, og naar man vil have denne Variation bestemt, maa man derfor begynde med at skære en uendelig lille Del af Legemet løs og opstille Ligevægtsbetingelserne herfor. Ofte interesserer det kun at bestemme Resultanten af Spændingerne paa et Snit af endelig Størrelse, og ifølge den beskrevne »Snitmethode« maa denne Resultant da holde Ligevægt mod alle de ydre Kræfter, der virke paa det udskaarne Stykke af Legemet (»paa den ene Side af Snittet«).

Naar man paa denne Maade har bestemt Spændingernes Afhængighed af de ydre Kræfter, mangler man endnu kun en Relation mellem Spændinger og Formforandringer: en saadan

kan kun udledes ved Forsøg med de enkelte forskellige Legemer. De Legemer, vi her have med at gøre, ere kun saadanne, der anvendes i Bygnings-, Maskin- eller lignende Konstruktioner, og de ere som oftest ikke fuldkommen elastiske: Formforandringen bestaar af en elastisk og en permanent Del selv for de mindste Paavirkninger, fuldkommen Elasticitet findes sandsynligvis aldrig, i alt Fald ikke i Legemernes oprindelige Tilstand. Naar Formforandringerne saaledes ere dels elastiske, dels blivende, er det kun de første, der fremkalde aktive indre Kræfter, Spændinger, og den omtalte Relation mellem Spændinger og Formforandringer angaar altsaa i alle Tilfælde kun de elastiske Formforandringer.

Hvad nu selve denne Relation angaar, saa har man i lange Tider antaget den for lineær. Det blev allerede fremsat i Aaret 1678 af Englænderen *Hooke*, at Spændinger og Formforandringer vare ligefrem proportionale, og denne *Hooke's Lov* har dannet Grundlaget for Elasticitetslæren lige op til vor Tid. I Tidens Løb blev man efterhaanden klar over, at den i alt Fald kun gælder, saalænge Paavirkningen (eller Formforandringen) ikke overskrider en vis Grænse, og op til samme Grænse antog man saa i lang Tid, at Formforandringerne vare fuldkommen elastiske. De senere Aars videnskabelige Materialundersøgelser have imidlertid vist, at der er en Mængde Legemer, for hvilke Loven ikke gælder — naturlige og kunstige Sten, Cementmørtel, Støbejern og forøvrigt vistnok Størstedelen af Metallerne — og for Øjeblikket staar Sagen nærmest saaledes, at man kun kan antage den som rigtig for smedeligt Jærn op til en vis Grænse.

Imidlertid er smedeligt Jærn nu til Dags langt det vigtigste af alle Byggematerialer, og den Grænse, indenfor hvilken *Hooke's Lov* her gælder, ligger i alt Fald saa højt, at de i permanente Konstruktioner optrædende Spændinger holde sig indenfor den. Og selv om man er sig bevidst, at *Hooke's Lov* ikke er nøjagtig for de andre Materialer, regner man dog endnu som oftest med de ved den udledede Formler, dels paa Grund af de mange Aars Hævd, dels fordi Beregningerne blive ulige vidtløftigere, saasnt man antager en anden Lov; undertiden kan man ved en Erfaringskoefficient bringe Overensstemmelse til Veie med de virkelige Forhold. I et følgende Afsnit skulle

vi komme nærmere ind paa de enkelte Materialers virkelige elastiske Forhold og de heraf følgende korrektere Beregningsmaader. I dette Afsnit ville vi gaa ud fra Hooke's Lov som almindeligt gældende; men de her udledede Formler kunne altsaa strengt taget kun anvendes for Svejsjærn og Staal og endda kun under Forudsætning af, at Paavirkningen ikke overskrider Lovens Gyldighedsgrænse, den saakaldte *Proportionalitetsgrænse*. I Overensstemmelse hermed ville vi ogsaa i dette Afsnit ganske afholde os fra Undersøgelsen af Fænomener, der vise sig i Nærheden af Materialernes Brudgrænse, hvor Hooke's Lov absolut aldrig gælder.

Ogsaa de for de enkelte Materialer gældende Konstanter, som man faar Brug for ved Beregningerne, skulle først meddeles senere.

I. Træk eller Tryk.

§ 14. Naar en Stang er paavirket til *Træk* efter sin Længderetning, vil Formforandringen bestaa i en Forøgelse af Længden og en Formindskelse af Tværnittets Dimensioner.

Vi se foreløbig bort fra den sidste Virkning og betragte en fuldstændig prismatisk Stang af homogent Materiale, paavirket til Træk af en ensformigt over Normalsnittet fordelt Kraft; Kraften er parallel med Stangens Længderetning. Stangens oprindelige Længde er l , dens Tværnit F ; hele Kraftens Størrelse er P (kg), Kraften pr. Arealenhed af Normalsnittet (ifølge den ensformige Fordeling):

$$\sigma = \frac{P}{F} \text{ (kg./cm.}^2\text{)}.$$

Idet alle de forskellige »Fibre« paalangs i Stangen maa forholde sig ens, kunne vi betragte et Prisme med Tværnit lig Arealenheden, Længde l , og have for et saadant, idet Forlængelsen kaldes λ :

ifølge Hooke's Lov: $\lambda = C \cdot \sigma$,

ifølge Forudsætningen om Homogenitet: $\lambda = C_1 \cdot l$,

altsaa: $\lambda = K \cdot \sigma \cdot l$ eller $\sigma = K_1 \cdot \frac{\lambda}{l}$,

hvor K_1 (eller K) er en Konstant, der alene afhænger af Materialet. Konstanten K_1 benævnes *Elasticitetskoefficienten* *) og betegnes ved E , hvorved Ligningen bliver:

$$\lambda = \frac{\sigma l}{E} \text{ eller } \sigma = E \frac{\lambda}{l}, \quad (1).$$

og ved Indførelse af $\frac{P}{F} = \sigma$:

$$\lambda = \frac{Pl}{EF} \text{ eller } P = EF \frac{\lambda}{l}. \quad (1 a).$$

Betydningen af Størrelsen E kan findes ved i Formlen (1) at sætte $\lambda = l$, hvilket giver $E = \sigma$; E er altsaa den *Kraft pr. Arealen* (kg. / cm.^2), der bevirker en Forlængelse lig den oprindelige Længde, eller som vilde bevirke en saadan Forlængelse, hvis det var muligt; imidlertid er selvfølgelig Proportionalitetsgrænsen overskreden længe forinden.

Af Ligning (1) findes ogsaa, idet man indfører Betegnelsen:

$$\frac{\lambda}{l} = \varepsilon = \text{Forlængelsen pr. Længdeenhed:}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

Elasticitetskoefficienten er altsaa Forholdet mellem Kraften pr. Arealen og Forlængelsen pr. Længdeenhed.

Hvis man i et Koordinatsystem afsætter σ som Ordinaten, ε som Abscisse, vil Ligning (1), $\sigma = E \cdot \varepsilon$, fremstille en ret Linie gennem Begyndelsespunktet; E er altsaa lig tg. af denne Linies Vinkel med ε -Aksen. Almindeligt har man $\sigma = f(\varepsilon)$; den herved bestemte Kurve er forskellig for de forskellige Materialer. Denne Kurve kaldes Materialets »Arbejdslinie« og er af stor Vigtighed ved Bedømmelsen af Materialets elastiske Egenskaber; dens nærmere Udseende komme vi tilbage til i et følgende Afsnit. Den indbefatter Hooke's Lov som specielt Tilfælde. Naar Hooke's Lov ikke gælder, kan man naturligvis udtrykke dette saaledes, at Arbejdslinien kun er retlinet for en uendelig lille Tilvæxt til σ eller ε ; man kommer paa den

*) C. Bach benytter ikke Konstanten E , men $\alpha = 1:E$, som han kalder »Forlængelseskoefficient« (Dehnungskoefficient). Udtrykket for λ bliver derved ganske analogt med det for en Temperaturvariation gældende ($\lambda = \varepsilon t$); dog fastholdes sædvanlig Benyttelsen af E .

Maade til at opfatte E som tg. af Vinklen mellem ϵ -Axen og Tangenten til Kurven $\sigma = f(\epsilon)$ og taler derfor om en variabel Elasticitetskoefficient for vedkommende Materiale. I hele dette Afsnit betragte vi imidlertid E som konstant.

Naar et Prisme er paavirket til Tryk efter sin Længderetning af en over Normalsnittet ensformig fordelt Kraft $P = \sigma F$, udleder man paa ganske den samme Maade som ovenfor en Relation mellem Kraft og Formforandring. Relationen bliver den samme som for Træk [Lign. (1) eller (1 a)], naar man heri lader λ betegne den totale Forkortelse, E Elasticitetskoefficienten for Tryk. Denne sidste Størrelses Betydning er ganske analog med Betydningen af Elasticitetskoefficienten for Træk, altsaa er E her lig *Forholdet mellem Kraften pr. Arealenhed og Forkortelsen (ϵ) pr. Længdeenhed*. For smedeligt Jærn har E meget nær samme Værdi for Træk og Tryk, og da de paa Grundlag af Hooke's Lov udviklede Formler nærmest kun gælde for dette Materiale, ville vi, som man ogsaa plejer at gøre, her almindeligt regne med samme Værdi for Træk og Tryk og bruge samme Betegnelse E for begge Størrelser.

Idet vi ogsaa afsætte Størrelserne σ og ϵ for Tryk som Ordinater og Abscisser i et Koordinatsystem, og idet vi regne Tryk-Spændinger og Forkortelser negative (i Sammenligning med Træk), komme vi ogsaa her til en ret Linie som Udtryk for Relationen mellem σ og ϵ , og naar E har samme Værdi for Træk og Tryk, falde de to rette Linier i hinandens Forlængelse.

For fuldstændig at faa Formforandringen bestemt mangle vi endnu et Udtryk for Tværsnitsformindskelsen, hvis Legemet er strakt, eller Tværsnitsforøgelsen, hvis det er trykket. Man antager Formforandringen pr. Længdeenhed ϵ_q vinkelret paa Kraftretningen lige stor i alle Retninger og ligefrem proportional med Formforandringen pr. Længdeenhed i Kraftretningen (ϵ), sætter altsaa:

$$\epsilon_q = \frac{1}{m} \cdot \epsilon.$$

For fuldkomment homogene Legemer have Navier og Poisson ad theoretisk Vej udledt, at $m = 4$. Direkte Maalinger have i Almindelighed for Byggematerialer givet Værdier mellem

3 og 4. Man finder forøvrigt temmelig forskellige Opgivelser, formodentlig hidrørende fra ikke ganske identisk Beskaffenhed af de undersøgte Stoffer. Exempelvis anføres følgende:

	Værdier af $\frac{1}{m}$, angivne af	
	Amagat *)	Everett **)
Staal	0,269	0,310
Svejsjærn		0,275
Støbejærn		0,267
Kobber	0,327	0,378
Messing	0,328	0,469 ?
Deltametal	0,340	
Bly	0,428	

I Praxis regner man i Almindelighed $m = 4$, hvilket ikke synes at afvige meget fra det rette for de forskellige Arter af Jærn og Staal.

Vi have nu fundet de nødvendige Relationer mellem Spændinger og Formforandringer, og hvis de ydre Kræfter virkelig ere ensformig fordelte over Stangens Endeflader, og-saa mellem de ydre Kræfter og Formforandringerne. Den nævnte Betingelse er ganske vist sjældent opfyldt, meget ofte paavirkes Legemet kun (tilnærmelsesvis) i et enkelt Punkt, af en *Enkeltkraft*. For at Formlerne (1) og (1 a) i saa Fald skulle være anvendelige, maa det i alt Fald forlanges, at Kraftens Angrebepunkt er Endefladens Tyngdepunkt, ellers kan den ikke holde Ligevægt mod ensformigt over Normalsnittet fordelte Spændinger; og selv da kan Spændingen i Tværsnittene nærmest Enderne ikke være ensformig fordelt. Hvis Stangen imidlertid er nogenlunde lang, kan man nok for det midterste Stykke regne med Ligningerne (1) og (1 a). Paa samme Maade maa, hvis man har flere Enkeltkræfter, disses Resultant gaa gennem Tyngdepunktet, for at Spændingen skal kunne fordele sig ensformigt, og selv da sker dette kun tilnærmelsesvis i Midten af lange Legemer. Som Exempel herpaa kan nævnes

*) Rapport XXVI. de la commission des méthodes d'essai des matériaux de construction, T. III, Paris 1895.

***) Christiansen: Indledning til den mathematiske Fysik, Kbhvn. 1887. I. S. 125.

det almindelige Normal-Prøvelegeme for Cementmørtel (Trækprøver), til hvilket Trækket fra Prøvemaskinen overføres i to symmetriske Punkter; men paa Grund af Prøvestykkernes ringe Længde kan Spændingen i Brudtværnittet ikke antages ensformig fordelt; den sædvanligt opgivne Brudbelastning, som findes ved Formlen $P = \sigma \cdot F$, er derfor sandsynligvis en Del for lille. Dette skulle vi senere komme tilbage til (§ 51).

Vi have nu alt fornødent for at løse de forskellige Opgaver, der kunne stilles. For et prismatisk Legeme med givne Dimensioner og paavirket af en given Kraft P , der nøjagtigt nok kan regnes ensformig fordelt over Stangens Endeflade, finder man Forlængelsen eller Forkortelsen ved Ligning (1 a). Naar man omvendt skal bestemme *Dimensionerne* (F), maa der foruden Kraften (P) og Materialet (E) være givet den *tilladelige Formforandring* (ϵ_1); man finder da af Ligning (1 a):

$$F = \frac{P}{E \cdot \epsilon_1}.$$

Til Formforandringen ϵ_1 svarer der en Spænding r , den *tilladelige Fiberpaavirkning*, bestemt ved Ligning (1), altsaa:

$$r = E \cdot \epsilon_1,$$

og herved bliver Ligningen til Dimensionsbestemmelse:

$$\underline{\underline{F = \frac{P}{r}}}. \quad (1b).$$

Man former i Almindelighed Ligningen saaledes, fordi det er bekvemmere at angive den tilladelige Fiberpaavirkning end den tilladelige Formforandring, og fordi Betydningen af Ligningen er mere umiddelbart indlysende.

Denne Form af Ligningen vilde man forøvrigt have faaet direkte, hvis man som Princip for Dimensionsbestemmelsen havde opstillet dette, at Spændingen ikke maa overskride den tilladelige Fiberpaavirkning; saalænge Spænding og Formforandring ere proportionale, er det naturligvis ogsaa ligegyldigt, om man udtrykker sig paa den ene eller den anden Maade, men naar Proportionaliteten hører op, maa man træffe et Valg mellem de to Muligheder, og der kan da ikke godt være Tale om at gaa ud fra andet end Formforandringerne. Hvis man paa en eller anden Maade hindrer Formforandringen

i at finde Sted, kunne Legemerne taale Indvirkningen af saa at sige uendelig store Kræfter; et Legeme, der paavirkes til Tryk, men ved Indeslutning paa hele den upaavirkede Del af sin Overflade hindres i at vige ud til Siden, kan ikke knuses ved noget Tryk.

Ved Formlerne (1 a) bestemmes kun Tværsnitsarealets Størrelse, dets Form er ligegyldig. Dette er dog ikke ganske Tilfældet i Virkeligheden, men da det navnlig konstateres ved *Brudforsøg*, skulle vi opsætte Omtalen deraf til næste Afsnit.

Endnu maa det bemærkes, at de udviklede Formler til Dimensionsbestemmelse af *trykkede* Legemer kun kunne anvendes, naar Længden ikke er for stor i Forhold til Tværsnitsdimensionerne. Det forudsættes nemlig, at Legemet kun paavirkes til direkte Tryk, men ved lange Prismer, *Søjler*, optræder der næsten altid en Tilbøjelighed til Bøjning ud til Siden, og derved kompliceres Sagen. Beregningen af Søjler skulle vi senere komme tilbage til.

Exempel. En 5^m. lang Rundjærnsstang skal taale et Træk paa 12^{te}. Bestem Diameteren og Stangens Forlængelse. Tilladelig Paavirkning regnes til 750 kg./cm.², $E = 2000000$ kg./cm.².

$$\text{Man har: } F = \frac{1}{4} \pi d^2 = \frac{12000}{750} = 16 \text{ cm.}^2,$$

$$\text{altsaa } d = 4,52 \text{ cm.} \approx 4,6 \text{ cm.}$$

$$\lambda = \sigma \frac{l}{E} = 750 \cdot \frac{500}{2000000} = 0,19 \text{ cm.}$$

Alle Længder maa indføres i cm. og Kraften i kg., naar r og E ere givne i disse Enheder.

Opg. 6. Hvor store Spændinger bevirkes der i en Jærnstang ved en Temperaturvariation af $\pm 35^\circ$ C., naar den er anbragt saaledes, at den ikke kan udvide sig eller trække sig sammen. Udvidelseskoefficienten er 0,000012 for 1° C., $E = 2000000$ kg./cm.².

Opg. 7. Hvor stor Afstand kan man anvende mellem Ophængningspunkterne for en Telegraftraad af 4 mm. Diameter, naar den hænger i en Bue med Pilhøjde lig $\frac{1}{10}$ af Længden. Vægten pr. m. er 0,1 kg., tilladelig Paavirkning 1200 kg./cm.². (Denne meget flade Kædelinie kan uden væsentlig Fejl erstattes med en Parabel under Beregningerne.)

§ 15. For en prismatisk Stang paavirket til Træk eller Tryk skal endnu undersøges, hvor stor en *Arbejdsmængde*,

der behøves til at frembringe en vis Formforandring λ . Det antages, at Formforandringen voxer jævnt, uden Svingninger, op til Værdien λ_1 : den ydre Kraft, der frembringer Formforandringen, maa altsaa ogsaa voxe jævnt op til den Værdi P_1 , der ifølge Ligning (1 a) svarer til λ_1 , og saaledes at den i hvert Øjeblik udvikler lige saa stor en Arbejdsmængde, som de indre Spændinger konsumere. I et eller andet Øjeblik under Bevægelsen har den ydre Kraft Værdien P , Formforandringen λ ifølge Ligning (1 a) tilsvarende Værdi λ , og i det paafølgende Tidselement udvikles og konsumeres der Arbejdsmængden $P \cdot d\lambda$. Hele den søgte Arbejdsmængde er da

$$\int_0^{\lambda_1} P d\lambda.$$

Naar man (Fig. 39, Pl. 5) afsætter P som Ordinats, λ som Abscisse, faar man ifølge Ligning (1 a) en ret Linie OA, og Størrelsen $P \cdot d\lambda$ betyder det i Fig. 39 skraverede Arealelement; den søgte Arbejdsmængde K er altsaa lig Arealet af Trekanten OAA₁,

$$K = \frac{1}{2} P_1 \cdot \lambda_1.$$

Indføres heri:

$$P_1 = \sigma_1 \cdot F, \quad \lambda_1 = \frac{\sigma_1 l}{E},$$

$$\text{faas:} \quad K = \frac{\sigma_1^2 \cdot Fl}{2E} = \frac{1}{2E} \cdot \sigma_1^2 \cdot V, \quad (2).$$

hvor V betegner Legemets Volumen.

Den konsumerede Arbejdsmængde er altsaa proportional med Slutningsspændingens Kvadrat og med Legemets Volumen. Størrelsen K kaldes Legemets Deformationsarbejde; Udtrykket forudsætter, at Proportionalitetsgrænsen ikke er overskreden. For fuldkommen elastiske Legemer angiver det tillige Størrelsen af den Arbejdsmængde, der kan magasineres i Legemet, og som dette vil give fra sig igen, naar det faar Lov til at gaa tilbage til sin oprindelige Længde.

Ved Udtrykket (2) kan ogsaa findes den Spænding og ved Ligning (1) dernæst den tilsvarende Formforandring, der frembringes, naar en given ydre Arbejdsmængde meddeles til Legemet, bl. a. ogsaa naar den overføres pludseligt, altsaa

virker som et Stød. Vi ville undersøge et Par specielle Tilfælde af Stød.

1) *Kraften P_1 begynder strax at virke med sin fulde Størrelse, dog uden Begyndelseshastighed.* Legemet kan ikke strax antage den til Kraften svarende Forlængelse; i et vilkaarligt Øjeblik under Bevægelsen, hvor Formforandringen har naaet Størrelsen λ , har den ydre Kraft udviklet et Arbejde, der (Fig. 39) er repræsenteret ved Rektanglet $OC_2C_3A_1$, medens Legemet kun har konsumeret det ved Trekanten OC_2C fremstillede Arbejde. Bevægelsen vil ikke standse, førend det udviklede Arbejde er lig det forbrugte, hvilket først er Tilfældet, naar Forlængelsen er bleven $OB_1 = 2 \cdot OA_2$; den tilsvarende Spænding er $B_1B = 2 \cdot A_2A$. Punktet B kaldes den dynamiske Ligevægtsstilling, Punktet A den statiske; hvis Kraften voxede jævnt, saa der stadig var Ligevægt mellem den og de indre Spændinger, vilde Forlængelsen kun blive OA_2 . Naar Kraften strax virker med sin fulde Størrelse, vil altsaa baade Spænding og Formforandring blive dobbelt saa store som de til statisk Ligevægt svarende. Naar Bevægelsen er standset i B , vil der ikke være statisk Ligevægt, Formforandringen vil derfor aftage, svinge forbi den statiske Ligevægtsstilling til den anden Side o. s. v. og tilsidst paa Grund af ufuldstændig Elasticitet o. l. standse i denne.

2) *Legemet er paavirket af en Kraft $P_{min.}$ og den dertil svarende Ligevægtsstilling O_1 (Fig. 40, Pl. 5) har indstillet sig; Kraften faar pludselig en Tilvæxt, saa den bliver $P_{max.}$* Forholdene ville da stille sig, ganske som om Begyndelsespunktet O var flyttet til O_1 ; der vil først blive dynamisk Ligevægt i B , idet $B_3B = P_{max.} \div P_{min.}$. Den hele dynamiske Spænding bliver:

$$B_3B = P_{max.} + (P_{max.} \div P_{min.}) = P_{max.} + \text{Variationen.}$$

Denne Formel gælder ogsaa, hvis $P_{max.}$ og $P_{min.}$ have modsat Fortegn, og kan i det hele bruges, naar Kraften pludselig varierer mellem en højere og en lavere Værdi, naar blot Punktet B ikke falder udenfor Gyldighedsgrænsen for Hooke's Lov. Ogsaa her vil der indtræde Svingninger om den statiske Ligevægtsstilling A .

3) *En Vægt Q falder ned fra Højden h og træffer en lodret prismatisk Stang, der ved Stødet paavirkes til Strækning eller Sammentrykning.* I den dynamiske Ligevægtsstilling er Formforandringen λ_1 , Resultanten af Spændingerne P_1 . Vægten Q

har da gennemløbet Vejen $h + \lambda_1$, og ved at sætte det udviklede Arbejde lig det forbrugte faas:

$$Q(h + \lambda_1) = \frac{1}{2} P_1 \cdot \lambda_1.$$

Kaldes den til Kraften Q svarende statiske Formforandring λ , haves:

$$\frac{P_1}{\lambda_1} = \frac{Q}{\lambda},$$

hvorved:

$$\lambda(h + \lambda_1) = \frac{1}{2} \lambda_1^2,$$

$$\lambda_1 = \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda h},$$

$$P_1 = Q \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda}} \right).$$

For $h = 0$ findes heraf: $\lambda_1 = 2\lambda$, $P_1 = 2Q$, stemmende med Resultatet ovenfor. For $h = 4\lambda$ faas: $\lambda_1 = 4\lambda$, $P_1 = 4Q$, og man ser i det hele, at den dynamiske Spænding voxer meget hurtigt med h . Naar h er saa stor, at λ kan regnes som forsvindende i Sammenligning hermed, faar man:

$$\lambda_1 = \sqrt{2\lambda h}, \quad P_1 = Q \sqrt{\frac{2h}{\lambda}},$$

hvilket man strax vilde finde ved at bortkaste Arbejdsmængden $Q \cdot \lambda_1$ *).

Exempel. Hvor stor en Faldvægt Q kan den i Exemplet i § 14 behandlede Rundjærnsstang med Diameter 4,6^{cm}. taale, naar Fiberpaavirkningen ikke maa overskride 750 kg./cm.², og naar Faldhøjden $h = 2^m$?

Til Spændingen 750 kg./cm.² svarer en Formforandring 0,19^{cm}, som beregnet i § 14, og denne Værdi maa λ_1 ikke overskride. Af Tilnærmelsesformlen findes da

$$\lambda = \frac{0,19^2}{400} = 0,00009^{\text{cm}},$$

$$\text{og derefter } Q = \frac{EF\lambda}{l} = \frac{2000000 \cdot 16 \cdot 0,00009}{500} = 5,7 \text{ kg.}$$

*) En nærmere Undersøgelse af Virkningen af Stød paalangs findes f. Ex. i:
Flamant: Résistance des matériaux, Paris 1886.

I Stedet for at benytte denne Tilnærmelsesformel kan man lige saa let direkte gøre Brug af Udtrykket for Stangens Deformationsarbejde i Ligning (2) og sætte:

$$Q \cdot 200 = \frac{\sigma_1^2}{2E} \cdot V = \frac{750^2}{2 \cdot 2000000} \cdot 16 \cdot 500 = 1125 \text{ kg. cm.}$$

§ 16. *Variabelt Tværsnit.* Hidtil har det paavirkede Legeme været forudsat fuldstændig prismatisk; Formlerne kunne imidlertid temmelig let anvendes, selv om dette ikke er Tilfældet, naar blot Legemet har en retlinet Axe, der indeholder Tyngdepunkterne af alle Tværsnit vinkelret paa denne Axe (Omdrejningslegemer o. l.). Kraftretningen skal da falde i Axen.

Man lægger en Række Snit vinkelret paa Axen og uendelig nær ved hinanden og anvender de tidligere fundne Formler paa de mellem Snittene liggende uendelig tynde Skiver. For en saadan Skive med Tykkelse dx og Tværsnit F havest Forlængelsen ifølge Ligning (1 a):

$$d\lambda = \frac{Pdx}{EF},$$

hvoraf

$$\lambda = \int_0^l \frac{Pdx}{EF}.$$

Naar man her kender F og P som Funktioner af x , kan Integrationen udføres.

Forlængelsen pr. Længdeenhed ϵ er her variabel,

$$\epsilon = \frac{d\lambda}{dx} = \frac{P}{EF} = \frac{\sigma}{E}.$$

Hvis Kraften P er konstant, ses ϵ at være størst i det Tværsnit, hvis Areal er mindst; dette maa derfor — naturligt nok — lægges til Grund ved Dimensionsbestemmelsen. Denne udføres saa forøvrigt, idet σ og ϵ ogsaa her ere proportionale, ved Ligningen $P = F_0 \cdot r$, hvor F_0 er det mindste Tværsnitsareal.

Som Anvendelse heraf plejer man at beregne Formen af en lodret Stang, der er ophængt i sin ene Ende og skal bære en i den anden Ende ophængt Vægt P foruden sin egen Vægt, idet Fiberpaavirkningen skal være den samme i alle Snit (Fig. 41, Pl. 5). Tværsnittet af Stangen skal være en

Cirkel, og da Kraften voxer opad, maa Tværsnittet ligeledes voxe opad.

Det nederste (mindste) Tværsnit har Radius ρ_0 , bestemt af:

$$\pi \rho_0^2 \cdot r = P.$$

I Afstanden x fra den nederste Ende er Radius ρ ; Kraften er her $P + Q_x$, hvor Q_x er Vægten af Længden x af Stangen. Det konsekutive Tværsnit har Radius $\rho + d\rho$ og skal bære $P + Q_x + dQ_x$, hvor $dQ_x = q \cdot \pi \rho^2 \cdot dx$, idet Vægtfylden kaldes q ; dette Snits Areal er: $\pi \rho^2 + 2\pi \rho \cdot d\rho$.

Altsaa haves:

$$(\pi \rho^2 + 2\pi \rho d\rho) r = P + Q_x + q \cdot \pi \rho^2 dx,$$

$$\pi \rho^2 \cdot r = P + Q_x,$$

hvoraf:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{q}{2r} \cdot dx,$$

og ved Integration, idet $x = 0$ giver $\rho = \rho_0$:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = e^{\frac{q}{2r} \cdot x},$$

der er Ligningen for Legemets Meridiankurve. Forlængelsen findes her overmaade let, da ¹Spændingen er konstant:

$$\lambda = \int_0^l \epsilon dx = \frac{r}{E} \int_0^l dx = \frac{rl}{E}.$$

Den fundne Form gælder selvfølgelig ogsaa for Tryk. Den kunde tænkes anvendt for høje, fritstaaende Bropiller (Mellem-piller), men faar ingen praktisk Betydning, fordi man af andre Grunde maa gøre det mindste Tværsnit større end nødvendigt for den direkte Trykpaavirkning.

§ 17. Træk- eller Trykpaavirkning samtidigt i flere Retninger. Da Formforandringerne baade i Kraftens Retning og vinkelret derpaa ere lineære Funktioner af Belastningerne, kan den fra flere samtidig virkende Kræfter hidrørende Formforandring findes ved Addition af de af hver Kraft for sig bevirkeede. Har man saaledes et Parallelopipedum (Fig. 42, Pl. 5), der i sine tre Hovedretninger er paavirket af Kræfterne P_x , P_y og P_z (positive for Træk, negative for Tryk),

saa beregner man først Formforandringerne pr. Længdeenhed fra hver Kraft for sig. Kraften P_x alene giver $\varepsilon_x = \frac{P_x}{EF_x} = \frac{\sigma_x}{E}$, idet Tværsnittet vinkelret paa x -Retningen har Arealet F_x og $\frac{P_x}{F_x} = \sigma_x$; med analoge Betegnelser i de andre Retninger faas følgende Sammenstilling:

Forlængelser i			
	x -Retningen	y -Retningen	z -Retningen
P_x alene giver . . .	ε_x	$-\frac{1}{m} \cdot \varepsilon_x$	$-\frac{1}{m} \cdot \varepsilon_x$
P_y — — . . .	$-\frac{1}{m} \varepsilon_y$	ε_y	$-\frac{1}{m} \cdot \varepsilon_y$
P_z — — . . .	$-\frac{1}{m} \cdot \varepsilon_z$	$-\frac{1}{m} \varepsilon_z$	ε_z

Ved samtidig Virkning af alle tre Kræfter faas Forlængelserne pr. Længdeenhed i de tre Retninger ε_1 , ε_2 og ε_3 , hvor

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x \div \frac{1}{m} (\varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \frac{1}{m} (\sigma_y + \sigma_z) \right),$$

og analoge Udtryk for ε_2 og ε_3 .

Nu ere Formforandringerne bekendte. Hvis man skal bestemme Dimensionerne for et paa den Maade paavirket Legeme, har man blot at sørge for, at den største af disse Formforandringer ikke overskrider den tilladelige Grænse. Af de i § 14 angivne Grunde plejer man imidlertid at forme denne Beregning saaledes, at man først bestemmer den *ideelle Spænding* σ_i , d. v. s. den Spænding (pr. Arealenhed), som vilde frembringe samme største Formforandring, hvis den virkede alene. Hvis f. Ex. ε_2 er den største af Formforandringerne, har man:

$$\sigma_i = E \cdot \varepsilon_2 = \sigma_y - \frac{1}{m} (\sigma_z + \sigma_x),$$

og nu skulle Dimensionerne bestemmes saaledes, at $\sigma_i \leq r$ (den tilladelige Fiberpaaavirkning).

Man ser, at Spændingen her ikke er ligefrem proportional med Formforandringen, saa det er ikke ligegyldigt, hvilken af disse Størrelser man gaar ud fra ved Dimensionsbestemmelsen.

Naar alle Kræfterne virke til Træk, ser man, at σ_i er mindre end den største af Spændingerne $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$; Dimensionerne kunne altsaa gøres mindre, naar alle Kræfter virke samtidigt, end naar den største virker alene. Det kan følgelig være en Fordel at tilføje nye Kræfter, naar de nemlig modvirke den Formforandring, som de oprindelige Kræfter stræbe at frembringe. Hermed stemmer det ogsaa, at det virker til Gunst, naar man paa anden Maade end just ved Tilføjelse af nye Kræfter formindsker Formforandringen, saaledes f. Ex. hvis man paa en eller anden Maade hindrer Tværsnittets Formindskelse (ved Træk) eller Forøgelse (ved Tryk). Dette kan direkte eftervises ved Forsøg, som vi senere skulle se (§ 42).

Opg. 8. Et retvinklet Parallelopipedum af Støbejern med Kantlængderne a, b og c er parallelt med Kanten b paavirket af et Træk paa 12^{te} , parallelt med Kanten a af et Tryk paa 20^{te} . Kanten c er 10 cm. lang; find de to andre Kanters Længde, naar den tilladelige Paavirkning er 150 kg./cm.² for Træk og 700 kg./cm.² for Tryk.

II. Forskydning.

§ 18. De Formforandringer, vi hidtil have betragtet, vare Ændringer af *Længder*; nu skulle vi undersøge Ændringer af *Vinkler*.

Af et Legeme, der er paavirket af ydre Kræfter, tænke vi os et uendelig lille Parallelopipedum skaaret ud og lade Spændingerne i dets Sideflader virke derpaa som ydre Kræfter. Foreløbig tænke vi os, at der kun findes Spændinger i to modsaaende Sideflader AA og BB (Fig. 43, Pl. 5), og at disse Spændinger virke i Sidefladernes Planer; de maa da være lige store og modsat rettede, for at der kan være Ligevægt. De nævnte Kræfter kunne aabenbart ikke bevirke nogen som helst Længdeforandring af Siderne AA og BB ; det eneste, der kan ske, er, at Sidefladerne AA og BB komme til at glide i deres Planer, saa de blive *forskudte* for hinanden, og det viser sig ved, at de oprindelig rette Vinkler have forandret deres Størrelse.

Idet den uendelig lille Kraft, der virker i AA , kaldes dT , Sidefladen AA 's Areal dF , haves Kraften pr. Arealenhed

$$\tau = \frac{dT}{dF},$$

hvilken Størrelse kaldes *Forskydningsspændingen*. Formforandringen BB' maa ifølge Hooke's Lov være proportional med Kraften dT , ifølge Forudsætningen om Homogenitet ligefrem proportional med Længden AB , omvendt med Tværsnittet dF ; man har altsaa:

$$BB' = K \cdot AB \frac{dT}{dF} \text{ eller } \tau = K_1 \cdot \frac{BB'}{AB}.$$

K_1 er en Konstant, der kun er afhængig af Materialet; den kaldes *Elasticitetskoefficienten for Forskydning* og betegnes sædvanlig ved G . Af Ligningen ovenfor ses Betydningen af G at være ganske analog med Betydningen af E i § 14; man har nemlig G lig *Forholdet mellem Kraften pr. Arealenhed* (τ) og *Forskydningen pr. Længdeenhed* $\left(\frac{BB'}{AB}\right)$. G er af Dimensionen kg./cm.^2 .

Idet $\frac{BB'}{AB} = \text{tg. } \varphi$ (Fig. 43), skrives Udtrykket for τ :

$$\tau = G \text{ tg. } \varphi, \quad (3).$$

hvilket er Relationen mellem Spænding og Formforandring. Denne sidste er udtrykt ved $\text{tg. } \varphi$, hvor φ er *Ændringen af den rette Vinkel mellem det Snit, hvis Forskydning der er Tale om, og dets Normal*. Hvis Snittet selv flytter sig under Legemets Formforandring, kan man tænke sig det bragt hen i sin nye Stilling ved en Parallelforskydning og Drejning uden Ændring af nogen Vinkel og først derefter Forskydnings-Formforandringen udført; Vinklen φ , der skal bruges som Maal for Formforandringen, er i saa Fald den *Vinkel, som Snittets Normal maa dreje sig, efterat Snittet er bragt hen i sin nye Stilling*.

Vi skulle nu have fat paa en Relation mellem Forskydningsspændingen τ og de ydre Kræfter. Hvis vi lægge et Snit, der deler Legemet i to Dele, og kun betragte det paa den ene Side af Snittet liggende Stykke af Legemet og de herpaa virkende ydre Kræfter, skal Resultanten T af alle de ydre Kræfters Projektioner paa Snitplanen være lig Resultanten af de forskydende Kræfter $\tau \cdot dF$ i de enkelte Arealelementer dF af Snittet. Man kunde nu paa sædvanlig Maade opskrive tre Ligevægtsbetingelser for alle disse Kræfter i Snitplanen, men alene derved vilde man dog ikke faa tilstrækkeligt til at

bestemme Størrelsen af τ i alle de forskellige Punkter. Vi skulle senere efterhaanden se, hvorledes man i specielle Tilfælde kan naa til en saadan Bestemmelse; her skal blot bemærkes, at hvis Forskydningsspændingen var ensformig fordelt over Snittet (τ lige stor og ens rettet i alle Punkter), vilde man have:

$$T = \int \tau dF = \tau \cdot F = G \cdot F \cdot \operatorname{tg.} \varphi, \quad (3 a).$$

hvor T er Projektionen af de ydre Kræfters Resultant paa Snitplanen, F Snittets Areal.

Den nævnte Fordeling af Forskydningsspændingerne kan, som vi strax skulle se, aldrig forekomme, men man regner i Praxis i mange Tilfælde, som om den var til Stede; man faar naturligvis saa ikke den nøjagtige Størrelse af τ , men en Middelværdi for det paagældende Snit, og dette kan ofte være nøjagtigt nok.

Hvis vi ville gaa videre med Forudsætningen om den ensformige Fordeling af Forskydningsspændingen, have vi i Ligning (3 a) Relationen mellem de ydre Kræfter og Formforandringen, saa denne sidste kan bestemmes, naar T er givet.

Naar man skal bestemme Dimensioner, har man hertil, at Formforandringen $\operatorname{tg.} \varphi$ ikke i noget Punkt maa overskride den tilladelige Værdi. Da $\operatorname{tg.} \varphi$ og τ ere proportionale, kan man imidlertid ligesom i § 14 i Stedet herfor sætte den Betingelse, at Forskydningsspændingen τ ikke i noget Punkt maa overskride den tilladelige Værdi f . Under Forudsætning af ensformig Fordeling af τ faas da til Dimensionsbestemmelsen (Bestemmelse af F):

$$T = f \cdot F.$$

Denne Lignings Anvendelse i Praxis er ofte fuldkommen berettiget; thi som vi senere skulle se, gaar man ved Fastsettelsen af f 's Værdi ud fra den Spænding τ , som ved Forsøg findes at frembringe Brud; og denne Spænding τ beregnes af den Kraft T , der er nødvendig for at frembringe Brud, og af Tværsnittet F ved samme Ligning: $T = \tau \cdot F$.

§ 19. Forskydningsspændingerne i to paa hinanden vinkelrette Snit. Naar man i et af ydre Kræfter paavirket Legeme lægger et Snit, vil Spændingen heri i Al-

mindelighed være skraat rettet mod Snittet og altsaa kunne opløses i en Komposant vinkelret paa Snittet og en i Snittets Plan. Den første bevirker alene Træk eller Tryk (*Normal-spændinger*), den sidste alene Forskydning.

Hvis man betragter et bestemt Punkt i Legemet og udskræer et uendelig lille tresidet Prisme om Punktet, og hvis man endvidere forudsætter, at der ingen Kræfter virker i Retning af Prismets Kanter, hvad som oftest vil være Tilfældet i de praktiske Anvendelser, har man (Fig. 44, Pl. 5) Spændingerne paa Sidefladerne AB og AC fremstillede ved de skraat rettede Kræfter P_c og P_b . P_c opløses i $P_c' \neq AC$ og P_c'' i AB , ligesaa P_b i $P_b' \neq AB$ og P_b'' i AC . Idet AB og AC ere uendelig smaa, kunne P_c og P_b og ligeledes Kraften P_a paa BC altid betragtes som ensformig fordelte over de Snit, hvorpaa de virke, og derfor som gaaende gennem Snittenes Midtpunkter. For at der skal være Ligevægt, maa de tre Kræfter gaa gennem samme Punkt og danne en lukket Krafttrekant. Ligevægtsbetingelsen kan ogsaa udtrykkes saaledes, at Resultanten af P_b og P_c skal være lig P_a og modsat rettet. Sammensætningen af P_b og P_c kan foretages ved at sammensætte deres ovenfor nævnte Komposanter, og da P_c' og P_b' aabenbart give en Resultant gennem Midtpunktet af BC , maa dette ogsaa være Tilfældet med P_c'' og P_b'' ; for at det sidste skal være muligt, maa imidlertid:

$$\frac{P_c''}{AB} = \frac{P_b''}{AC}.$$

Disse Brøker fremstille Spændingerne pr. Arealenhed i Snittenes Planer, naar Opløsningen af Kræfterne foretages som her angivet. Hvis man i Stedet for Kræfterne P_c og P_b havde opløst Spændingerne $\frac{P_c}{AB}$ og $\frac{P_b}{AC}$ efter de to Snitretninger, vilde man altsaa faa de i Snitplanerne faldende Spændinger lige store.

Hvis specielt $\frac{P_c''}{AB} = 0$, maa ogsaa $\frac{P_b''}{AC} = 0$, hvorefter følger, at naar man i et Punkt kender et Snit a og Retningen af den derpaa virkende Spænding P_a , saa maa Spændingen P_b paa et Snit $b \neq P_a$ være rettet parallelt med Snittet a . Snittene a og b kaldes konjugerede Snitretninger, $P_a \neq b$, $P_b \neq a$. Til Benyttelsen heraf skulle vi komme tilbage i et senere Afsnit.

Hvis specielt Snittene AB og AC ere vinkelrette paa hinanden, angive Komposanterne P' og P'' de normale og tangentielle Kræfter; Spændingen $\frac{P_c''}{AB} = \tau_c$ er Forskydningsspændingen i Snittet AB . Man har altsaa:

$$\tau_c = \tau_b,$$

følgelig: i to paa hinanden vinkelrette Snit ere Forskydnings-spændingerne lige store, og man ser fremdeles, at det er nødvendigt for Ligevægten, at τ_b og τ_c begge virke hen mod Skæringslinien A mellem Snittene eller begge bort fra denne.*)

I § 18 forudsatte vi, at der paa det uendelig lille Parallelopipedum (Fig. 43, Pl. 5) kun virkede Forskydningsspændinger i to modstaaende Sideflader, og det bemærkedes, at disse to Kræfter maatte være lige store og modsat rettede, for at der skulde kunne være Ligevægt. Naturligvis er dette ikke tilstrækkeligt til at skaffe Ligevægt; de to Kræfter i Snittene AA og BB danne et Kraftpar, og der kan følgelig kun blive Ligevægt, naar Parallelopipedet er paavirket af endnu et Kraftpar med lige saa stort Moment og drejende i modsat Retning. Ifølge den nu beviste Sætning maa der imidlertid i de to Sideflader AB ogsaa virke Spændingerne τ (pr. Arealenhed), og naar $AA = dx$, $AB = dy$ og den tredie Kant $= dz$, har man Momentet af det første Kraftpar lig $(\tau dx dz) \cdot dy$, af det andet $(\tau dy dz) \cdot dx$. Sætningen om Forskydningsspændingernes Ligestorhed i to paa hinanden vinkelrette Snit er her kun bevist under Forudsætning af, at der ingen Kræfter virker parallelt med Prismets Kanter i Fig. 44. Den gælder imidlertid ganske almindeligt.

Vi betragte igen et uendelig lille Parallelopipedum (Fig. 45, Pl. 5), der er skaaret ud af et af ydre Kræfter paavirket Legeme, og i alle sine Sideflader er paavirket af normale og tangentielle Kræfter. Vi lægge et Koordinatsystem med Begyndelsespunkt O i det ene Hjørne og med Axerne sammenfaldende med de tre fra O udgaaende Kanter. Parallelopipedets Kantlængder ere dx , dy og dz . Sidefladen OA er paavirket af en Normalspænding σ_x og af en forskydende Spænding τ_x , der har Komposanterne τ_{xz} og

*) Udviklingen hidtil er taget efter W. Ritter: *Anwendungen der grafischen Statik*, I., Zürich, 1888.

τ_{xy} efter z - og y -Aksene. I Sidefladen BC maa der da, idet vi forudsætte en kontinuerlig Variation af Spændingerne, virke Normalspændingen $\div \left(\sigma_z + \frac{\delta \sigma_z}{\delta x} dx \right)$ og Forskydningsspændingerne $\div \left(\tau_{xz} + \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta x} dx \right)$ og $\div \left(\tau_{zy} + \frac{\delta \tau_{zy}}{\delta x} dx \right)$.

Alle Spændinger regnes positive i de positive Koordinatretninger. Ovenstaaende Udtryk angive Spændingerne, d. v. s. pr. Arealenhed; Kræfterne (absolute Størrelser) findes ved at multiplicere med Sidefladens Areal $dydz$. Spændingerne i de andre Sideflader betegnes analogt hermed. Foruden de nævnte Kræfter virker der visse Massekræfter, $\gamma dx dy dz$, angribende i Parallelopipedets Midtpunkt; Overfladekræfterne angribe i Sidefladernes Midtpunkter.

Vi ville opskrive Momentligningen for en Axe gennem Parallelopipedets Midtpunkt og f. Ex. parallel med y -Aksen. Alle Normalkræfter og Massekræfter skære Axen eller ligge i den og give altsaa ingen Momenter, Forskydningsspændingerne i Sidefladerne OB og AC heller ikke og endelig de med y -Aksen parallelle Komposanter af Forskydningsspændingerne i de fire tilbageværende Sideflader heller ikke. — Tilbage er der nu kun Forskydningsspændingerne τ_{xz} (i AO) og τ_{zx} (i OC) samt de tilsvarende i BC og AB ; kun disse ere derfor viste i Fig. 45. Momentligningen bliver da:

$$(\tau_{xz} dz dy) \frac{1}{2} dx + \left(\tau_{xz} + \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta x} dx \right) dz dy \cdot \frac{1}{2} dx$$

$$\div (\tau_{zx} dx dy) \frac{1}{2} dz \div \left(\tau_{zx} + \frac{\delta \tau_{zx}}{\delta x} dx \right) dx dy \cdot \frac{1}{2} dz = 0.$$

Naar uendelig smaa Størrelser af 4de Orden bortkastes og $dx dy dz$ bortdivideres, faas heraf:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

I sin almindeligste Form hedder Sætningen altsaa: *i to vilkaarlige paa hinanden vinkelrette Snit ere de Komposanter af Forskydningsspændingerne, der staa vinkelret paa Snittenes Skæringslinie, lige store, og de virke begge hen mod eller begge bort fra denne Skæringslinie.* Den sidste Del af Sætningen

følger af, at man fandt: $\tau_{xx} = -\tau_{xx}$ med de i Fig. 45 angivne Kraftretninger.

Ved Hjælp af denne Sætning kan man indse, at den ovenfor omtalte ensformige Fordeling af Forskydningsspændingerne er umulig. Vi lægge de to paa hinanden vinkelrette Snitelementer a og b saaledes (Fig. 46, Pl. 5), at det ene (b) falder i Overfladens Tangentplan; for denne Beliggenhed af Snittene gælder Sætningen ovenfor lige saa godt som ellers, og da Forskydningsspændingen i Overfladen er Nul, maa ogsaa den Komposant af Forskydningsspændingen i a være Nul, der er vinkelret paa Snittenes Skæringslinie (Tangenten til Snittet a 's Omrids). Heraf følger altsaa, at *Forskydningsspændingen i et Snitelement ude ved Legemets Overflade og vinkelret paa denne er rettet efter Snittets Tangent*; den kan selvfølgelig ikke i alle et Snits Punkter være parallel med den tangentielle Komposant T af de ydre Kræfter, saaledes som den ensformige Fordeling ovenfor forudsætter. Endvidere kan *Spændingens Størrelse ikke være den samme i alle et Normalsnits Punkter*; thi i det Element, hvis Tangent er vinkelret paa T , er Forskydningsspændingen Nul.

§ 20. Relationer mellem Konstanterne for Normalspændinger og Forskydningsspændinger. Hidtil have vi betragtet Træk og Tryk for sig, Forskydninger for sig; i Virkeligheden optræde de imidlertid altid samtidigt.

Hvis vi saaledes tage et Prisme (Fig. 47, Pl. 5), der er paavirket til Træk eller Tryk efter sin Længderetning af en Kraft $P = \sigma \cdot F$, ensformig fordelt over Normalsnittet, saa vil der i alle skraa Snit optræde Forskydningsspændinger. I et Snit under Vinklen ϑ med Normalsnittet, altsaa med Areal $F \sec \vartheta$, er Spændingen i P 's Retning lig $\frac{P}{F \sec \vartheta} = \sigma \cos \vartheta$. Ved Opløsning af denne efter Snittet og dets Normal findes, at dette Snit er paavirket af en Normalspænding σ' og en Forskydningsspænding τ' bestemte ved:

$$\sigma' = \sigma \cos^2 \vartheta, \quad \tau' = \sigma \cos \vartheta \sin \vartheta = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\vartheta.$$

σ' har Maximumsværdien σ for $\vartheta = 0$, Minimumsværdien 0 for $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. τ' har Maximumsværdien $\frac{1}{2} \sigma$ for $\vartheta = \frac{\pi}{4}$,

Minimumsværdien 0 for $\vartheta = 0$ eller $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Sættes $\frac{\pi}{2} \div \vartheta$ for ϑ , faas Forskydningen i dette Snit $\tau'' = \tau'$, stemmende med den ovenfor beviste Sætning. I det følgende skulle vi navnlig gøre Brug af det Resultat, at i et Prisme, der er paa-
virket til Træk eller Tryk med Spændingen σ , vil den største Forskydningsspænding optræde i Snit, der danne 45° med Kraftretningen, og denne Maximumsværdi er: $\tau = \frac{1}{2} \sigma$.

Naar man dernæst undersøger et elementært Parallelepipedum $ABCD$ (Fig. 48, Pl. 5), paavirket af Forskydnings-
spændingen τ i Fladerne BC og AD , vil man finde, at der i de forskellige Snit ogsaa optræder Træk- eller Trykspændinger. Under Forskydningens Indvirkning er Parallelepipedets Form
bleven $AEFD$; Maalet for Forskydningen er

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{CF}{CD}.$$

Diagonalen AC er kommen hen i Stillingen AF og er der-
ved bleven forlænget Stykket CG , idet $FG = AC$ (den vinkel-
rette FG træder i Stedet for en Cirkelbue med Centrum A ,
idet Formforandringerne behandles som smaa Størrelser). Man
har altsaa Forlængelsen pr. Længdeenhed:

$$\varepsilon = \frac{CG}{AC} = \frac{CF \cos \vartheta}{CD \operatorname{cosec} \vartheta} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin 2\vartheta.$$

Variationen af ε for de forskellige Værdier af ϑ — i for-
skellige Snit — er givet herved. For $\vartheta = 0$ og $\vartheta = \frac{\pi}{2}$
haves $\varepsilon = 0$; største og mindste Værdi af ε findes for
 $\vartheta = \pm \frac{\pi}{4}$, og Værdierne ere $\pm \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi$. Forskydningen er all-
saa altid ledsaget af Træk og Tryk; største Forlængelse og For-
kortelse optræder i Retninger, der danne $\pm 45^\circ$ med Forskydnings-
retningen, og have Værdierne $\pm \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi$.

Relationen mellem Forskydningsspændingen τ og de
største Træk- og Trykspændinger $\sigma_{\max}$ findes ved i Ligningen
 $\varepsilon_{\max} = \pm \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi$ at indføre:

$$\sigma_{\max} = E \cdot \varepsilon_{\max}, \quad \tau = G \operatorname{tg} \varphi,$$

$$\text{hvorved } \frac{\sigma_{\max}}{E} = \pm \frac{1}{2} \frac{\tau}{G} \text{ eller } \tau = \pm 2 \frac{G}{E} \cdot \sigma_{\max}.$$

Naar man skal bestemme Dimensioner af et Legeme, der er paavirket til Forskydning, maa man selvfølgelig sørge for, at hverken den tilladelige Forskydning ($\text{tg. } \varphi$) eller den tilladelige Forlængelse (ϵ) overskrides. Heraf følger, at den tilladelige Værdi af Forskydningen ($\text{tg. } \varphi$) højst maa være dobbelt saa stor som den tilladelige Forlængelse, eller idet Spændinger og Formforandringer her ere proportionale, at

$$f \leq 2 \frac{G}{E} \cdot r. \quad (4)$$

Herved kan man udlede den tilladelige Forskydnings-spænding f af den tilladelige Træk- eller Trykpaavirkning r , hvis man kender G og E . Naturligvis gælder Relationen (4) kun for fuldstændig isotrope Legemer.

G og E kunne bestemmes ved Forsøg. Imidlertid kan man ad rent theoretisk Vej udlede en Relation mellem dem, saaledes som vi nu skulle se.

Vi betragte en Tærning $ABCD$ med Kanten 1 (Fig. 49, Pl. 5) paavirket til Træk af Spændingen (Kraften) σ . Herved forlænges AB til $A_1B_1 = 1 + \epsilon$ og forkortes AD til $A_1D_1 = 1 - \frac{\epsilon}{m}$. Som vi ovenfor have set, optræder der i skraa Snit i Tærningen Forskydningsspændinger, som naa deres Maximum i Diagonalplanerne AC og BD . Disse danne op-rindelig en ret Vinkel med hinanden, og et Maal for Forskydningen haves i Ændringen φ af denne rette Vinkel.

$$\text{Idet } \angle BOB_1 = \frac{1}{2} \varphi, \text{ og } \text{tg. } \alpha = \frac{1 - \frac{\epsilon}{m}}{1 + \epsilon}, \text{ haves}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \div \angle B_1OC_1 = \frac{\pi}{2} - 2\alpha,$$

$$\text{tg. } \varphi = \cot 2\alpha = \frac{1 - \text{tg.}^2 \alpha}{2 \text{tg. } \alpha} = \frac{1 - \left(\frac{1 - \frac{\epsilon}{m}}{1 + \epsilon} \right)^2}{2 \cdot \frac{1 - \frac{\epsilon}{m}}{1 + \epsilon}}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1+\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{m}} - \frac{1-\frac{\varepsilon}{m}}{1+\varepsilon} \right],$$

og ved her at multiplicere den første Brøk i Tæller og Nævner med $1 + \frac{\varepsilon}{m}$, den anden med $1 - \varepsilon$ og bortkaste 2den Potens af den lille Størrelse ε findes:

$$\operatorname{tg.} \varphi = \varepsilon \left(1 + \frac{1}{m} \right).$$

Ovenfor have vi fundet, at Forskydningen τ i Diagonalplanen er:

$$\tau = G \operatorname{tg.} \varphi = \frac{1}{2} \sigma,$$

hvorved

$$\sigma = 2G\varepsilon \left(1 + \frac{1}{m} \right),$$

og idet $\sigma = E \cdot \varepsilon$:

$$\frac{G}{E} = \frac{m}{2(m+1)}. \quad (5).$$

Idet man herved kender Forholdet mellem G og E , bliver Ligning (4) til:

$$f \leq \frac{m}{m+1} \cdot r. \quad (4 a).$$

Sættes $m = 4$, haves altsaa:

$$G = 0,4 \cdot E, \quad f \leq 0,8 \cdot r. \quad (6).$$

$m = 3$ giver $G = 0,375 \cdot E$, $f \leq 0,75 \cdot r$, saa det spiller ikke stor Rolle, om man tillægger m den ene eller den anden Værdi. Man regner gerne $m = 4$. En Verifikation af disse Resultater ved Forsøg kan bedst iværksættes ved Vridning, hvorom nedenfor. Her skal blot anføres, at Forsøg af *Appleby**), *Bauschinger***) o. fl. med forskellige Sorter smedeligt Jærn

*) Forsøgene refererede af: *Commission des méthodes d'essai des matériaux de construction. Rapport XXXII. T. III., Paris, 1895.*

**) *Mittheilungen aus dem mech.-techn. Laboratorium der techn. Hochschule in München. Heft 3.*

have givet $G : E = 0,36 - 0,49$, som Middeltal $G : E = 0,43$. Det sædvanlig brugte Forhold, $G : E = 0,4$ er altsaa nærmest lidt for lavt. De specielle Værdier af Konstanterne for de særlige Materialer komme vi tilbage til i et følgende Afsnit.

III. Vridning.

§ 21. Vridning af en ret, cirkulær Cylinder. Naar en saadan Cylinder i sine to Endeflader er paavirket af to lige store, modsat drejende Kraftpar, hvis Planer staa vinkelret paa Axen, vil Formforandringen bestaa i, at de forskellige Tværsnit blive drejede i Forhold til hinanden om Cylindrens Axe. Idet vi forudsætte Cylindren fuldstændig homogen, maa Drejningen være ensformig fordelt over Længden; *Vridningsvinklen pr. Længdeenhed* kaldes ϑ . Endvidere forudsætte vi, at alle Normalsnit i Cylindren holde sig plane; i saa Fald kan Formforandringen *kun* bestaa i en Drejning om Axen; denne maa nemlig blive ved med at være en Symmetrilinie, Normalsnittene maa derfor vedblive at være vinkelrette paa den, og da Axens Længde ikke forandres, maa Normalsnittene ved Vridningen glide i deres egne Planer. — Af det nu sagte følger, at en Linie i Cylindren, der oprindeligt var parallel med Axen, efter Formforandringen er gaaet over til at blive en Skruelinie.

Vi lægge to konsekutive Normalsnit i Afstanden dz (Fig. 50, Pl. 6). Idet Vridningsvinklen pr. Længdeenhed er ϑ , vil det ene af de to Snit dreje sig Vinklen $\vartheta \cdot dz$ i Forhold til det andet. Idet vi tænke os det nederste Normalsnit liggende fast, vil et Punkt A i det øverste Snit blive drejet hen til Stillingen A' , idet $\angle AOA' = \vartheta \cdot dz$. Af den uendelig tynde Skive mellem de to Normalsnit tænke vi os dernæst udskaaet et Prisme omkring den lodrette Linie AA med Arealelementer i Normalsnittene som Grundflader; ved Formforandringen vil Prismets øverste Endeflade glide i det øverste Normalsnit, saaledes at Kanterne lægge sig efter Skruelinie-Elementer som AA' . Den Formforandring, Prismet herved er undergaaet, er en ren Forskydning, og den Vinkel φ , der er et Maal for Forskydningen, ses i Fig. 50 lodret projiceret som $\angle A'LA$.

Idet Punktet A befinder sig i Afstanden ρ fra Axen, haves:

$$\operatorname{tg.} \varphi = \frac{\rho \cdot \vartheta \cdot dz}{dz} = \rho \cdot \vartheta.$$

Det erindres, at Vinklen φ skal være Ændringen af den rette Vinkel mellem et Snit og dets Normal, altsaa her Komplement til den Vinkel, som Prismets Kanter danne med dets Ende-flade, og deraf følger, at ovenstaaende Udtryk for $\operatorname{tg.} \varphi$ kun er rigtigt, hvis Normalsnittet har holdt sig plant og vinkelret paa Axen.

Spændingerne i et Normalsnit maa aabenbart holde Lige-vægt mod det ved den ene Ende af Cylinderen virkende ydre Kraftpar med Moment M_v , det *vridende Moment*. Forskydnings-spændingen paa Arealelementet dF ved A (Fig. 50) er:

$$\tau = G \cdot \operatorname{tg.} \varphi = G \cdot \rho \cdot \vartheta.$$

Kraften $\tau \cdot dF$ paa Arealelementet dF virker vinkelret paa Radius; ved at tage Momenterne med Hensyn til Axen faas:

$$M_v = \int G \rho \vartheta dF \cdot \rho = G \cdot \vartheta \int \rho^2 dF = G \cdot \vartheta \cdot I_p,$$

hvor I_p betegner Tværnsnittets polære Inertimoment. Denne Ligning vilde gælde ganske uafhængig af Tværsnitsformen, hvis de Forudsætninger, under hvilke den er udviklet, vare korrekte i Almindelighed; dette er dog kun Tilfældet for cirkulært Tværnsnit, som vi skulle se nedenfor.

For den cirkulære Cylinder haves: $I_p = \frac{1}{2} \pi r^4$, idet r betegner Radius til Omkredsen, hvorved:

$$\vartheta = \frac{2M_v}{\pi G r^4} \text{ og } \theta = \frac{2M_v}{\pi G r^4}, \quad (7).$$

idet θ betegner Vridningsvinklen for Længden l . Ligning (7) er Relationen mellem de ydre Kræfter og Formforandringen ϑ eller θ ; hvis man afsætter M_v som Ordinat, ϑ som Abscisse, faas en ret Linie gennem Begyndelsespunktet, ganske analogt med Forholdene ved Træk og Tryk.

Den største Forskydning optræder aabenbart ude ved Omkredsen, og Dimensionerne skulle bestemmes saaledes, at denne største Formforandring ϑ ikke overskrider det tilladelige, ϑ_1 . Naar vi her, som sædvanligt, hvor Kræfter og Formforandringer

ere proportionale, udtrykke den tilladelige Formforandring ϑ_1 ved den tilladelige Spænding f , haves altsaa hertil:

$$f = Gr\vartheta_1,$$

og ved at indføre denne Værdi af ϑ_1 i (7) findes:

$$M_v = \frac{1}{2} \pi f r^3 \quad (8).$$

til Bestemmelse af Dimensionerne.

For en *hul cirkulær Cylinder* med Radierne r_1 og r_0 haves:

$$I_p = \frac{1}{2} \pi (r_1^4 - r_0^4),$$

$$\text{hvorved:} \quad \vartheta' = \frac{2M_v'}{\pi G (r_1^4 - r_0^4)} \quad (7a).$$

$$\text{og} \quad M_v' = \frac{1}{2} \pi f \frac{r_1^4 - r_0^4}{r_1}. \quad (8a).$$

Sammenlignes en hul og en massiv Cylinder med samme Volumen, haves: $r^2 = r_1^2 - r_0^2$, og sættes $r_1 = nr$ ($n > 1$), faas: $r_0^2 = (n^2 - 1)r^2$, $r_1^2 + r_0^2 = (2n^2 - 1)r^2$, og endelig: $r_1^4 - r_0^4 = (2n^2 - 1)r^4$. Man finder da Forholdet mellem Vridningsvinklerne for samme vridende Moment ($M_v = M_v'$):

$$\frac{\vartheta}{\vartheta'} = 2n^2 - 1 > 1,$$

altsaa er en hul Cylinder »stivere« end en massiv med samme Volumen (at et Legeme er i Besiddelse af stor Stivhed, vil sige, at dets Formforandring under Paavirkning af en given Kraft er lille). Paa samme Maade findes Forholdet mellem de vridende Momenter, som de to Cylindre kunne modstaa med samme tilladelige Fiberpaavirkning f :

$$\frac{M_v}{M_v'} = \frac{n}{2n^2 - 1} < 1.$$

Bæreevnen er altsaa ogsaa størst for den hule Cylinder, men da $2n^2 - 1 > \frac{2n^2 - 1}{n}$, er Fordelen ved at anvende en hul Cylinder større for Stivhedens end for Styrkens Vedkommende. Denne Sammenlignings Resultater ere paa Forhaand temmelig indlysende, idet Materialet i Nærheden af Cylinderens Axe kun bliver svagt paavirket og altsaa ikke gør synderlig Nyttæ.

Exempel. En Smedejærns Axel af 9^m. Længde skal overføre et vridende Moment paa 6,4^{te}.^m. Bestem Dimensionen og Vridningsvinklen, idet $f = 560 \text{ kg./cm.}^2$, $G = 800000 \text{ kg./cm.}^2$.

Man har:
$$r = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 640000}{\pi \cdot 560}} = 9 \text{ cm.}$$

$$\theta = \frac{2 \cdot 900 \cdot 640000}{\pi \cdot 800000 \cdot 9^4} = 0,07 \approx 4^\circ.$$

Man finder lettere θ , naar man i Forvejen har beregnet r ved Hjælp af Relationen:

$$\theta = \vartheta \cdot l = \frac{f \cdot l}{G \cdot r} = \frac{560 \cdot 900}{800000 \cdot 9} = 0,07.$$

Ligesom Formlerne for Træk og Tryk kunne ogsaa de her udviklede for Vridning anvendes paa Omdrejningslegemer. For at finde Vridningsvinklen af et saadant Legeme opskriver man ved (7) den uendelig lille Vinkel, der faas for en Skive, begrænset af to konsekutive Planer vinkelrette paa Axen:

$$d\theta = \frac{2M_v dz}{\pi G r^4},$$

og finder hele Vridningsvinklen ved en Integration; for at kunne udføre denne maa man kende Relationen mellem r og z , Ligningen for Meridiankurven. Legemets Bæreevne bestemmes ved Ligning (8), hvor r er Radius i det mindste Tværsnit.

§ 22. Den *Arbejdsængde*, der er nødvendig for at frembringe en vis Vridning (θ'), bestemmes ganske paa samme Maade som ved Træk eller Tryk (§ 15), idet Relationen mellem Kraft og Formforandring [Ligning (7)] ligesom for Træk og Tryk er grafisk fremstillet ved en ret Linie.

Vi antage foreløbigt, at Formforandringen foregaar uden Stød, altsaa at det vridende Moment begynder med Værdien Nul og voxer jævnt op til Slutningsværdien M_v , idet der stadig udvikles og konsumeres lige meget Arbejde. I et vilkaarligt Øjeblik er det vridende Moment M_v , Vridningsvinklen θ , og i det derpaa følgende Tidselement udvikles og konsumeres Arbejds- mængden $M_v \cdot d\theta$. Hvis man i Fig. 39, Pl. 5, lader Ordinaterne betyde M_v , Abscisserne θ , er $M_v \cdot d\theta$ fremstillet ved et Areal-

element som det skraverede, og hele Arbejdsmængden K er altsaa lig Arealet af Trekant OAA_1 , idet $OA_1 = \theta'$, $A_1A = M_r'$, følgelig:

$$K = \frac{1}{2} M_r' \cdot \theta'.$$

Indføres heri:

$$\theta' = \vartheta' \cdot l = \frac{\tau' \cdot l}{G \cdot r}, \quad M_r' = \frac{1}{2} \pi \cdot \tau' \cdot r^2,$$

hvor τ' er Spændingen paa Radius r (den største Spænding), faas:

$$K = \frac{1}{4} \cdot \frac{\tau'^2 \cdot \pi r^2 l}{G} = \frac{\tau'^2}{4G} \cdot V, \quad (9)$$

hvor V er Cylindrens Volumen.

Den konsumerede Arbejdsmængde er altsaa ligesom i § 15 proportional med Slutningsspændingens Kvadrat og med Legemets Volumen.

Ved Ligning (9) kan man ganske som i § 15 finde den Spænding, der frembringes, naar en given ydre Arbejdsmængde meddeles til Legemet, altsaa bl. a. ogsaa Virkningen af et Stød, og man kommer naturligvis til ganske analoge Resultater. *Et vridende Moment, der strax begynder at virke med sin fulde Styrke, vil altsaa frembringe en dynamisk Spænding, der er dobbelt saa stor som den statiske, og der vil indtræde Svingninger om den statiske Ligevægtsstilling. En pludselig Tilvæxt til det vridende Moment vil bevirke en dynamisk Spænding lig den statiske Maximumsspænding plus Variationen.*

§ 23. Vridning af en Cylinder med vilkaarligt Normalsnit. Ovenfor have vi gjort forskellige Forudsætninger, som ganske vist ville vise sig at være opfyldte for et cirkulært Tværnit, men som ogsaa kun slaa til for et saadant. Vi have navnlig forudsat, at Normalsnittene blive ved at være Planer; imidlertid er det ifølge § 19 bekendt, at der ikke kan optræde Forskydningsspændinger i Normalsnittet, uden at det samme vil være Tilfældet i Planer vinkelret derpaa, og disse med Axen parallelle Forskydningsspændinger ville i Almindelighed bevirke, at Normalsnittet netop ikke holder sig plant. — Endvidere regnede vi ovenfor Forskydningsspændingen i et vilkaarligt Punkt af Normalsnittet som vinkelret paa Radius: dette er rigtigt for en cirkulær Cylinder, hvor de oprindelig

retlinede Frembringere antage Form af Skruelinier, men for et andet Tværsnit kan det ikke være rigtigt, hvilket indses ved at gaa ud til Konturen; her maa Forskydningsspændingen være rettet efter Tangenten. Vi skulle se, hvorledes man kan gennemføre Beregningen uden disse Forudsætninger. *)

Vi lægge (Fig. 51, Pl. 6) som ovenfor to konsekutive Normalsnit i Legemet og betragte et uendelig lille Prisme med lodrette Kanter og med sine Endeflader beliggende i Normal-snittene; den nederste Endeflade dannes af Arealelementet om Punktet A . Formforandringen bestaar i en ren Forskydning, hvorved den øverste Endeflade kommer hen til Punktet A' . For at faa et Udtryk for Spændingen maa man have fat paa den Vinkel φ , der er et Maal for Forskydningen. φ er Komplement til Vinklen mellem Prismets Kanter og Endeflade, efterat Formforandringen har fundet Sted, men man maa her erindre, at Prismets Endeflade ikke er bleven liggende i det oprindelige Normalsnit. Dette har antaget Form af en krum Flade $z = f(x, y)$, og Prismets Endeflade ligger i Tangentplanen til denne Flade i Punktet A med Koordinaterne x, y, z . φ er altsaa Vinklen mellem denne Flades Normal N i A og Linien AA' .

Man har nu Spændingens Størrelse $\tau = G \cdot \operatorname{tg} \varphi$; for ogsaa at faa dens Retning bestemt ville vi søge dens Komposanter τ_x og τ_y efter Koordinataxerne x og y ; z -Aksen er den Axe, hvorom Vridningen finder Sted. Idet Formforandringen $\operatorname{tg} \varphi$ betragtes som en lille Størrelse, kan man sætte $\operatorname{tg} \varphi = \varphi$ og behandle Vinklens Projektioner paa xz - og yz -Planerne paa samme Maade. Man har da: $\tau_x = G \operatorname{tg} \varphi'$, hvor φ' er Projektionen af φ paa xz -Planen, og naar Normalen N er projiceret i N_L (Fig. 51), haves med Figurens Betegnelser: $\varphi' = \alpha + \beta$. Ved Behandlingen af den cirkulære Cylinder havdes $\beta = 0$ og $\varphi' = \alpha$; endvidere $\operatorname{tg} \varphi = \vartheta \cdot \rho$, hvoraf $\operatorname{tg} \varphi' = \div \vartheta \cdot y$ ($\vartheta \cdot \rho$ afsættes i Retningen $A_V A'_V$ og projiceres paa x -Aksen); her er altsaa $\operatorname{tg} \alpha = \div \vartheta \cdot y$. $\operatorname{tg} \beta$ er som bekendt lig $\frac{\partial z}{\partial x}$, hvorefter man har:

$$\tau_x = G \operatorname{tg} \varphi' = G (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = G \left(\frac{\partial z}{\partial x} \div \vartheta y \right), \quad (a).$$

* Problemet er navnlig behandlet af *de Saint-Venant*. Fremstillingen her følger nærmest den af *Flamant* (*Résistance des matériaux*, Paris, 1886) givne.

og paa samme Maade findes:

$$\tau_y = G \left(\frac{\delta z}{\delta y} + 3x \right). \quad (b).$$

Vi tænke os dernæst, at det betragtede uendelig lille Prisme om Punktet A er et retvinklet Parallelopipedum med Kanterne dx , dy , dz (Fig. 52, Pl. 6). I dettes nederste Flade, AB , virke Spændingerne τ_x og τ_y , altsaa maa der i AC virke en Spænding τ_x , i BD : $\div (\tau_x + d\tau_x)$, i AD : τ_y , i BC : $\div (\tau_y + d\tau_y)$; der virker ingen Normalspændinger. Ligevægten fordrer, at Summen af de lodrette Kræfter er Nul, hvorved:

$$\tau_x dy dz \div (\tau_x + \frac{\delta \tau_x}{\delta x} dx) dy dz + \tau_y dx dz \div (\tau_y + \frac{\delta \tau_y}{\delta y} dy) dx dz = 0,$$

eller
$$\frac{\delta \tau_x}{\delta x} + \frac{\delta \tau_y}{\delta y} = 0,$$

og ved Indførelse af de ovenfor fundne Værdier af τ_x og τ_y :

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = 0, \quad (c).$$

hvilket er Differentialligningen for den Flade, hvorefter Normalsnittet har krummet sig.

Som i Indledningen til denne Paragraf bemærket, have vi endnu en Betingelse, der skal tilfredsstilles: ude ved Normalsnittets Omkreds er Forskydningen rettet efter Omkredsens Tangent. Derved faas (Fig. 51):

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{dy}{dx} = \frac{\tau_y}{\tau_x}, \quad (d).$$

hvilken Betingelse skal være opfyldt i alle Punkter af Omkredsen (med Ligningen $F(x, y) = 0$).

Hvis man nu ved Integration af Ligning (c) har faaet den Flade bestemt, hvorefter Normalsnittet vil krumme sig, kender man $\frac{\delta z}{\delta x}$ og $\frac{\delta z}{\delta y}$ i Ligningerne (a) og (b) og derved Spændingens Variation, og man kan da opskrive Ligevægtsbetingelsen for det ydre vridende Moment og de indre Kræfter i et Normalsnit ganske som for den cirkulære Cylinder.

Vi ville søge Betingelsen for, at Normalsnittet holder sig

plant. Den Flade $z = f(x, y)$, hvorefter Normalsnittet krummer sig, skal i saa Fald have Ligningen: $z = C$, hvorved aabenbart Differentialligningen (c) er tilfredsstillet. Ligning (d) bliver da ved Hjælp af (a) og (b) til:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

som er Differentialligningen for Normalsnittets Omkreds. Dens Integration giver:

$$x^2 + y^2 = C.$$

Udviklingen i § 21 for en cirkulær Cylinder er altsaa korrekt.

Vi ville dernæst undersøge Vridningen af en *elliptisk Cylinder*. Normalsnittet har Ligningen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

hvorved Ligning (d) bliver:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y} = -\frac{\tau_y}{\tau_x}.$$

Dette Forhold mellem Spændingerne gælder foreløbigt kun ude ved Omkredsen, men vi ville prøve, om det ikke kan gælde for alle Tværnittets Punkter.

Hvis vi sætte:

$$\tau_x = Ay, \quad \tau_y = Bx,$$

faas af Ligningerne (a) og (b):

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{A}{G} y + \vartheta y, \quad \frac{\delta z}{\delta y} = \frac{B}{G} x - \vartheta x,$$

og ved Differentiation heraf ses, at Ligning (c) er tilfredsstillet; den antagne Spændingsfordeling er altsaa rigtig. Ved Integration af de to Ligninger faas:

$$z = \left(\frac{A}{G} + \vartheta \right) yx + \varphi(y), \quad \text{og} \quad z = \left(\frac{B}{G} - \vartheta \right) xy + \psi(x),$$

og da disse to skulle være identiske, maa:

$$\frac{A}{G} - \vartheta = \frac{B}{G} - \vartheta = K \text{ og } \varphi(y) = \psi(x) = C,$$

hvorved $z = Kxy - C.$

Normalsnittet krummer sig altsaa efter en hyperbolsk Paraboloid.

Da $\frac{A}{G} - \vartheta = \frac{B}{G} - \vartheta,$

og da $\frac{\tau_x}{\tau_y} = -\frac{a^2 y}{b^2 x} = \frac{Ay}{Bx},$ altsaa $\frac{A}{B} = -\frac{a^2}{b^2}.$

faar man: $A = -\frac{2a^2}{a^2 - b^2} 9G, B = \frac{2b^2}{a^2 - b^2} 9G.$

Nu har man, at det ydre vridende Moment skal være lig Momentet af alle de forskydende Kræfter i Normalsnittet. For et Arealelement $dx dy$ er Forskydningens Moment lig:

$$(\tau_y \cdot x - \tau_x \cdot y) dx dy,$$

altsaa:

$$M_r = \iint (Bx^2 - Ay^2) dx dy = \frac{29G}{a^2 + b^2} \iint (b^2 x^2 + a^2 y^2) dx dy,$$

hvor Integrationen udstrækkes over hele Tværsnittet. Man finder:

$$M_r = \frac{29G}{a^2 + b^2} (b^2 I_y + a^2 I_x) = \frac{29G}{a^2 + b^2} (b^2 \cdot \frac{1}{4} \pi a^3 b + a^2 \cdot \frac{1}{4} \pi b^3 a),$$

$$M_r = \pi 9G \cdot \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2},$$

hvoraf Vridningsvinklen kan beregnes.

Forskydningsspændingen i det vilkaarlige Punkt (x, y) er:

$$\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} = \sqrt{A^2 y^2 + B^2 x^2}.$$

Ved Differentiation under Benyttelse af Ellipsens Ligning findes heraf, idet $a > b$, at største Spænding optræder for $x = 0, y = \pm b$, altsaa i Endepunkterne af den lille Axe. Hvis man derimod regnede ganske som ved den cirkulære Cylinder, altsaa under Forudsætning af plane Normalsnit efter Formforandringen, vilde man finde den største Spænding længst borte fra Axen, d. v. s. i Endepunkterne af den store Axe.

Maximumsværdien af τ bliver:

$$\tau_{\max.} = 29G \cdot \frac{a^3b}{a^3 + b^3} = \frac{2M_v}{\pi ab^2};$$

herved kan Bæreevnen undersøges, idet $\tau_{\max}$ ikke maa overskride den tilladelige Paavirkning f , altsaa:

$$M_v = \frac{1}{2} \pi f ab^3.$$

Paa lignende Maade som her vist for Ellipsen kunne andre Tværsnit behandles; rektangulært Tværsnit f. Ex. har langt større praktisk Betydning end elliptisk, men Undersøgelsen er vanskeligere paa Grund af Omkredsens Diskontinuitet. Saadanne Beregninger have givet følgende almindelige Resultater:

Bæreevnen er givet ved:

$$M_v = n f \frac{I_{\min.}}{b}, \quad (10).$$

Vridningsvinklen pr. Længdeenhed ved:

$$\vartheta = n_1 \frac{I_p M_v}{G \cdot F^3}, \quad (11).$$

hvor $I_{\min.}$ betegner det mindste Inertimoment af Tværsnittet, I_p det polære Inertimoment, F Tværsnitsarealet.

b betegner en Længde, n og n_1 Talværdier, nemlig: *)

Tværsnitsform	b	n	n_1
Cirkel	Radius	2	$4\pi^2 = 39,5$
Cirkelring	udv. Radius		
Ellipse	lille Halvaxe	2	$4\pi^2 = 39,5$
Ellipsering	udv. —		
Rektangel, $\frac{b}{h} = 1$. .	mindste Side	$\frac{8}{3}$	42,68
— — — — — $\frac{1}{2}$. .	„	„	42,0
— — — — — $\frac{1}{4}$. .	„	„	40,2
— — — — — $\frac{1}{8}$. .	„	„	38,5
Ligesidet Trekant . . .	Siden	1,385	45,0
Regulær Sexkant . . .	„	1,694	41,0

*) Se f. Ex. C. Bach: *Elasticität und Festigkeit*, 2^{te} Aufl. Berlin. 1894, S. 175 og 199.

For et Rektangel med Siderne b og h faas saaledes:

$$M_v = \frac{2}{3} f \cdot \frac{\frac{1}{2} b^3 h}{b} = \frac{2}{3} f b^2 h.$$

$$\vartheta = n_1 \frac{\frac{1}{2} (b^3 h + b h^3)}{G b^3 h^3} M_v = \frac{n_1}{12} \frac{b^3 + h^3}{b^3 h^3} \frac{M_v}{G}.$$

Koefficienterne n_1 ere saa lidt forskellige, at man sædvanlig sætter $n_1 = 40$, uafhængigt af Tværsnitsformen.

Alle de her udviklede eller blot anførte Formler gælde selvfølgelig kun indenfor Proportionalitetsgrænsen, og ved Forsøg til Verifikation af dem maa følgerig denne Grænse ikke overskrides. Der kan derfor ikke godt være Tale om Verifikation af andre Formler end (11) hvor man kan maale sammenhørende Værdier af ϑ og M_v .

Her skal nævnes nogle Forsøg af *Bauschinger*.*)

1. *Smedeligt Jærn*. Som Middeltal af 13 Forsøg med cirkulære Cylindre med 10^{cm} Diameter og kvadratiske Prismer af samme Materiale, med Sidelinie 10^{cm} fandtes:

$$\frac{\text{Vridningsvinkel for Cylinder}}{\text{Vridningsvinkel for Prisme}} = \frac{1}{0.696},$$

medens Formel (11) giver: $\frac{1}{0.698}.$

De enkelte Forsøgsresultater varierede dog betydeligt (fra 1:0,633 til 1:0,747).

2. *Støbejærn*. Som Middeltal af 2 Forsøg med Stænger af følgende Tværnit:

a. Cirkel,		Vridningsvinkel = ϑ_a
b. Ellipse,	$\frac{a}{b} = \frac{2}{1}$,	— = ϑ_b
c. Kvadrat		— = ϑ_c
d. Rektangel,	$\frac{b}{h} = \frac{1}{2}$	— = ϑ_d
e. —	$\frac{b}{h} = \frac{1}{4}$	— = ϑ_e

*) *Bach: Elasticität und Festigkeit. 2^{te} Aufl. Berlin, 1894. S. 198 o. f.*

$$\mathfrak{I}_a : \mathfrak{I}_b : \mathfrak{I}_c : \mathfrak{I}_d : \mathfrak{I}_e$$

fandtes følgende Forhold: 1 : 1,24 : 1,20 : 1,47 : 9,65

medens Formel (11) giver: 1 : 1,25 : 1,13 : 1,40 : 9,10.

Støbejern følger imidlertid slet ikke Hooke's Lov, saa man kan ikke vente nøjagtig Overensstemmelse.

Til Brudforsøg komme vi tilbage i et følgende Afsnit.

IV. Bøjning.

§ 24. Almindelig Behandling af en lige Bjælke med konstant Tværsnit, idet Kraftplanen er en Symmetriplan.

En Bjælke bliver bøjet, naar den er paavirket af ydre Kræfter vinkelrette paa Længderetningen. Disse ydre Kræfter maa naturligvis først og fremmest selv være i Ligevægt, og idet vi her antage *alle Kræfterne parallelle og beliggende i samme Plan*, faas derved to Ligevægtsbetingelser:

$$\Sigma P = 0, \Sigma Px = 0; \quad (12)$$

x-Aksen er lagt i Bjælkens Længderetning, *y*-Aksen vinkelret derpaa.

De ydre Kræfter ere to Slags: givne aktive Kræfter (Belastningen) og Understøtningsreaktionerne; de sidstes Størrelse er ikke bekendt forud, men til deres Bestemmelse tjener netop Ligningerne (12). Herved kan der bestemmes to ubekendte, og hvis Bjælkens Understøtninger ere saaledes beskafne, at der optræder to ubekendte Reaktioner og ikke flere, er Bestemmelsen mulig ved (12) alene, og Bjælken kaldes *statisk bestemt*. Er der kun én ubekendt Reaktion, vil der ikke kunne være Ligevægt, med mindre begge Ligningerne (12) tilfældigvis af sig selv skulde være tilfredsstillende, altsaa kun for en speciel Størrelse eller Virkemaade af de aktive ydre Kræfter; ved en lille Variation i Belastningens Størrelse forstyrres Ligevægten strax, hvorfor en saaledes understøttet Bjælke ikke kan anvendes til Bygningskonstruktioner. — Er der endelig flere end to ubekendte Reaktioner, ville de statiske Ligevægtsligninger (12) alene ikke være tilstrækkelige til deres Bestemmelse; Bjælken kaldes *statisk ubestemt*. Som vi senere skulle se, er Beregningen dog mulig, naar man tager Ligningerne til Bestemmelse af Formforandringerne til Hjælp.

Under Indvirkning af disse Kræfter vil Bjælken antage en krummet Ligevægtsform. Fibrene paa den konvexe Side ville blive forlængede (strakte), paa den konkave Side forkortede (sammentrykkede), og idet der maa være en kontinuerlig Overgang fra Strækning til Sammentrykning, maa der et eller andet Sted i Legemet findes et Lag Fibre, som beholde deres oprindelige Længde; dette Lag kaldes *den neutrale Flade*. Foruden de her omtalte Træk- og Trykspændinger optræder der, som vi skulle se, i Almindelighed ogsaa Forskydnings-spændinger i Bjælkens Tværsnit.

Vi skulle nu se at finde det tilstrækkelige Antal Relationer mellem Spændingerne i et Normalsnit i Bjælken og de ydre Kræfter. For at simplificere Sagen forudsætte vi, at *Bjælken har en Symmetriplan* (efter Længderetningen) og at alle de ydre Kræfter virke i denne Plan. Vi kunne da tænke os ogsaa alle de indre Kræfter i et Normalsnit flyttede hen i samme Plan, idet de Kraftpar, der maa tilføjes ved Flytningen af Kræfterne fra to symmetriske Elementer, ophæve hinanden. — Den omtalte Symmetriplans Skæringslinie med den neutrale Flade kaldes Bjælkens *neutrale Linie*; paa Grund af Symmetrien skæres endvidere den neutrale Flade af Tværsnittets Plan i en vinkelret paa Symmetriplanen, og den neutrale Flade er altsaa en Cylinder med denne Skæringslinie, Tværsnittets *neutrale Axe*, som Frembringer, den neutrale Linie som Ledelinie.

Vi lægge et Normalsnit i Bjælken; der skal da være Ligevægt mellem alle de ydre Kræfter paa den ene Side af Snittet og de indre Kræfter i Snittet; de sidste ville i Almindelighed være dels Normalspændinger, dels Forskydninger. Da alle Kræfter tænkes virkende i Symmetriplanen, faa vi saaledes tre Ligevægtsbetingelser af den almindelige Form:

$$\Sigma Y = 0, \Sigma X = 0, \Sigma (Yx - Xy) = 0, \quad (13)$$

idet vi lægge x -Aksen i det ubøjede Legemes Længderetning.

Ved den nærmere Undersøgelse af disse Ligninger ville vi gøre Brug af følgende to Forudsætninger: *Bjælkens Formforandringer betragtes som forsvindende* (i Sammenligning med Længden), og *Normalsnittene anlages at holde sig plane*. Ligningerne (13) gælde selvfølgelig først, efterat Bjælken har antaget sin krumme Ligevægtsform, men ifølge den første Forudsætning regne vi dog med de oprindelige Koordinater til

Kræfternes Angrebepunkter. Tværnittene i Bjælken, der oprindelig stode vinkelret paa x -Aksen, dreje sig ved Bøjningen en lille Vinkel, men ikke desto mindre regne vi Normalspændingerne i Tværnittet som parallelle med x -Aksen, de forskydende Spændinger parallelle med y -Aksen.

Vi ville nu undersøge Betydningen af hver af Ligningerne (13) for sig.

Den første indeholder kun Kræfter i y -Aksens Retning, altsaa dels alle de ydre Kræfter f. Ex. til venstre for Snittet ab (Fig. 53 Pl. 6), herunder indbefattet Understøtningernes Reaktionen, dels de forskydende Spændinger i Snittet. Resultanten af Forskydningerne kaldes T ; det er den eneste ubekendte i Ligningen. Denne kan med Betegnelserne i Fig. 53 skrives:

$$P_1 + P_2 + \dots P_m + T = 0,$$

$$T = -\sum_1^m P. \quad (14)$$

T maa regnes med Fortegn i samme Retning som Kræfterne ellers; vi *vedtage y -Aksens positive Retning som den positive Kraftretning*. Det almindeligst forekommende Tilfælde er en vandret Bjælke med lodret Belastning, og i saa Fald lægge vi y -Aksen med sin positive Retning nedad og regne altsaa *Kraftretningen positiv nedad*.

Ved Ligning (14) faa vi kun Resultanten af Forskydnings-spændingerne bestemt; til Størrelsen af Spændingen i de enkelte Tværnitpunkter skulle vi senere vende tilbage. — Ligning (14) indeholder Kræfterne tilvenstre for Snittet; man kunde naturligvis lige saa godt have taget Kræfterne til højre for Snittet, hvorved:

$$P_{m+1} + P_{m+2} + \dots P_n + T_1 = 0,$$

$$T_1 = -\sum_{m+1}^n P.$$

Imidlertid er ifølge Ligning (12):

$$\sum_1^m P + \sum_{m+1}^n P = 0, \text{ altsaa } T = -T_1.$$

Dette Resultat er paa Forhaand indlysende, idet T og T_1 staa i samme Forhold til hinanden som Aktion og Reaktion. T betegner Indvirkningen af Bjælkestykket til højre for Snittet

paa det til venstre, T_1 Indvirkningen af Stykket til venstre paa det til højre.

Forskydningen i et Tværsnit er altsaa lig Summen af Kræfterne paa den ene Side af Snittet; dens Fortegn er i og for sig ligegyldigt, da det, forstaaet paa rigtig Maade, kan være baade positivt og negativt. — Man bruger undertiden Betegnelsen Transversalkraft for det samme; her ville vi hellere tillægge hvert af disse Ord sin bestemte Betydning. Ved Forskydning ville vi forstaa den indre Kraft, der virker i Snittets Plan og søger at bevirke en Forskydningsformsforandring, hvorimod Transversalkraften for Snittet skal betegne Resultanten af de ydre Kræfter paa den ene Side af Snittet, ogsaa i Henseende til Beliggenhed. Størrelsen af Forskydning og Transversalkraft er altsaa den samme, Beliggenheden forskellig; Fortegnet er ligegyldigt for Forskydningen, for Transversalkraften ville vi derimod vedtage, at den skal være lig Resultanten af Kræfterne til venstre for Snittet, altsaa positiv, hvis denne Resultant virker i den positive Kraftretning. Transversalkraften betegnes i det følgende ved Q .

Den anden af Ligningerne (13) indeholder kun Kræfter i x -Axens Retning, altsaa kun Normalspændingerne i det betragtede Snit. For at finde et Udtryk for dem maa vi bruge Formforandringerne som Gennemgangsled. — Som ovenfor bemærket ville nogle Fibre blive forlængede ved Bøjningen, andre forkortede. Hvis vi derfor betragte to oprindelig parallelle, konsekutive Normalsnit AA og BB (Fig. 54, Pl. 6), kunne de ikke under Bøjningen vedblive at være parallelle, men da vi forudsætte, at de fremdeles holde sig plane, maa de nu danne en lille Vinkel med hinanden og skære hinanden i Afstanden ϱ fra den neutrale Linie OO ; ϱ er Krumningsradius for den neutrale Linie i det betragtede Punkt. I Afstanden y fra OO vil den derværende Fiber være forlænget eller forkortet et Stykke λ , og man har Spændingen σ i dette Punkt bestemt ved:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\lambda}{dx}.$$

Af Figuren findes imidlertid:

$$\frac{\lambda}{dx} = \frac{y}{\varrho},$$

hvorved Spændingen $\sigma = \frac{E}{\rho} y$, (15)

og Kraften paa Arealelementet dF af Tværsnittet:

$$dS = \sigma dF = \frac{E}{\rho} y dF.$$

dS er et Træk, hvis y er positiv, Tryk, hvis y er negativ. Ifølge Ligningen (13) haves nu:

$$\int dS = 0,$$

og idet Hooke's Lov antages at gælde (E konstant), og idet ρ er den samme, saalænge vi befinde os i samme Tværsnit, faas:

$$\frac{E}{\rho} \int y dF = 0, \text{ eller altsaa } \int y dF = 0,$$

hvor Integrationen skal udstrækkes over hele Tværsnittet. Denne Ligning udtrykker, at Tværsnittets statiske Moment med Hensyn til den neutrale Axe (Linien gennem O , vinkelret paa Papirets Plan) skal være Nul, altsaa at *den neutrale Axe gaar gennem Tværsnittets Tyngdepunkt*. Vi have her tillige set, at *Normalspændingerne i et Tværsnit ere proportionale med Afstandene fra den neutrale Axe* ($\sigma = C \cdot y$) og altsaa grafisk fremstillede som Ordinator til en ret Linie gennem O . Hvis vi sammensætte alle de strækkende Kræfter til en Resultant S , og ligeledes alle de trykkende Kræfter til en Resultant S' , haves $S = -S'$, saa S og S' danne et Kraftpar.

I den tredie af Ligningerne 13 indeholder det ene Led — ΣXy — kun Normalspændingerne i Tværsnittet, det andet — ΣYx — kun de ydre Kræfter og Forskydningen T . Vælg vi imidlertid som Momentcentrum et Punkt af Kraften T 's Retningslinie — Skæringslinien mellem Tværsnittets Plan og Symmetriplanen —, bliver Forskydningens Moment Nul, og Ledet ΣYx indeholder kun Momentet af de ydre Kræfter paa den ene Side af Snittet; vi ville kalde det M . Dette Moment skal nu være lig Momentet af Kraftparret S, S' , dannet af Normalspændingerne.

Vi tage Momenterne med Hensyn til Punktet O (Fig. 54); Kraften paa Arealelementet i Afstanden y fra O er $\frac{E}{\rho} y dF$, og

dens Moment altsaa $\frac{E}{\rho} y^2 dF$. Summen af alle den Slags Momenter faas ved Integration over hele Tværsnittets Areal, saa at den sidste af Ligningerne (13) nu kan skrives:

$$M = \frac{E}{\rho} \int y^2 dF = \frac{E}{\rho} I, \quad (16)$$

hvor I betegner Tværsnittets Inertimoment med Hensyn til den neutrale Axe.

Vi fandt ovenfor (15) Loven for Normalspændingernes Fordeling over Tværsnittet; nu kunne vi ved Ligning (16) finde deres Størrelse. (16) giver nemlig: $\frac{E}{\rho} = \frac{M}{I}$, hvorved Ligning (15) bliver til:

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y = \frac{M}{I} y. \quad (17)$$

Største Spænding optræder i de længst fra den neutrale Axe fjernede Punkter ($y = e_1$ eller $y = e_2$, Fig 54) og er:

$$\sigma_{\max.} = \frac{M}{I} e_1 \text{ eller } \sigma_{\min.} = \frac{M}{I} e_2. \quad (17a)$$

Ved Ligningerne (16) og (17) kan man løse de forskellige Opgaver, der kunne stilles, under Forudsætning af at der ses bort fra Forskydningen, hvad vi her ville gøre. I Almindelighed er Forskydningsspændingernes Indflydelse paa f. Ex. Formforandringerne temmelig lille i Sammenligning med Normalspændingernes, dog just ikke altid forsvindende; vi skulle i § 39 komme tilbage hertil.

Dimensionsbestemmelsen udføres i Almindelighed saaledes, at den største Normalspænding (givet ved 17a) ikke overskrider den tilladelige Paavirkning til Træk (r_1) eller Tryk (r_2). Dette er for saa vidt rigtigt, som Forskydningsspændingen er Nul for $y = e_1$ eller $y = e_2$ (ifølge § 19), men dermed er det rigtignok ikke givet, at den resulterende Spænding ikke kan være større i et andet Punkt, hvor Normalspændingen ganske vist er mindre, men hvor der tillige optræder en Forskydning; vi skulle i § 68 nærmere undersøge dette Spørgsmaal, og det vil da vise sig, at det næsten altid er tilstrækkeligt at tage Hensyn til de yderste Fibre og altsaa at sørge for, at Normalspændingen her ikke bliver for stor.

For specielle Materialer, der have en særlig lille Modstandsevne overfor Forskydningsspændinger, f. Ex. Træ, i Længderetningen, kan det dog blive Forskydningsspændingerne alene, der bestemme Dimensionerne (se § 38, Slutningen, og § 57, Slutningen).

Naar man kender Belastningen, kan man finde M , og idet man i Ligningerne (17a) indfører den tilladelige Paavirkning i Stedet for $\sigma_{\max}$ eller $\sigma_{\min}$, kan man ved disse Ligninger bestemme e_1 eller $\frac{e_2}{I}$, der alene ere Funktioner af Tværnittets Dimensioner. Derimod kan man i Almindelighed ikke direkte beregne de enkelte Tværsnitsdimensioner — f. Ex. for rektangulært Tværnit: Bredde og Højde —, da man kun har den ene Ligning til Raadighed. Der er da ikke andet at gøre end ved Forsøg at finde et Tværnit, for hvilket Funktionen $\frac{I}{e_1}$ eller $\frac{I}{e_2}$ har den forlangte Størrelse.

Man indfører sædvanligt en særlig Benævnelse for denne Funktion, nemlig *Modstandsmomentet*, der betegnes ved W ; Modstandsmomentet er af Dimensionen cm^3 . Ligningerne til Dimensionsbestemmelsen blive da:

$$M = r_1 W_1 \text{ eller } M = r_2 W_2, \quad (18).$$

eller for Tværnit, der ere symmetriske om den neutrale Axe ($W_1 = W_2$), og for hvilke den tilladelige Paavirkning til Træk og Tryk ere lige store ($r_1 = r_2$):

$$M = r \cdot W. \quad (18 a).$$

Naar alle Tværnit have mindst det saaledes bestemte Modstandsmoment, er Bjælken stærk nok, men den nødvendige Størrelse af W kan tilvejebringes paa mange Maader, og i Almindelighed gælder det om at vælge det mest økonomiske, altsaa at skaffe et saa stort W som muligt med det mindst mulige Tværsnitsareal. En nærmere Undersøgelse af dette Forhold for de forskellige Tværsnitsformer findes i § 33.

Selv om man nu ved at give Bjælken et Tværnit med tilstrækkelig stort Modstandsmoment har sørget for, at den bliver stærk nok, er det ikke dermed givet, at den er *stiv* nok; det kan være, at Nedbojningerne blive større end ønske-

ligt. Som tilladelig Grænse for Nedbøjningernes Størrelse sættes ofte ved Husbygningsarbejder (det er i Almindelighed kun ved saadanne, der kan være Fare for utilstrækkelig Stivhed)

$\frac{1}{600} - \frac{1}{800}$ af Bjælkens Længde, og det kan undertiden være denne Fordring, der alene bliver bestemmende for Dimensionerne; inden vi kunne indlade os paa at opstille Formler herfor, maa vi imidlertid have en Relation mellem de ydre Kræfter og Nedbøjningerne.

Bestemmelsen af Formforandringen udføres ligeledes ved Ligning (16), der kan skrives:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EI}.$$

Idet vi her forudsætte konstant Tværsnit, altsaa I konstant, og tillige E konstant, ses af Udtrykket for ϱ , at naar Momentet er konstant, vil Bjælken bøje sig efter en Cirkelbue. I Almindelighed vil imidlertid M variere fra Punkt til Punkt, altsaa være givet som en Funktion af x , og man indfører da Krumningsradiens Værdi:

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

hvorved man faar Differentialligningen for Bjælkens neutrale Linie. Idet man dernæst igen benytter sig af Forudsætningen, at Nedbøjningerne y ere smaa Størrelser i Forhold til Bjælkens Længde, kan man betragte $\frac{dy}{dx}$ som forsvindende i Sammenligning med 1, hvorved den neutrale Linies Differentialligning bliver:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{M}{EI}. \quad (19).$$

Det dobbelte Fortegn i (19) hidrører fra, at Fortegnet for ϱ er ubestemt — ligesom foreløbig Fortegnet for M . M betyder Momentet af de ydre Kræfter paa den ene Side af Snittet, altsaa Transversalkraftens Moment; hvis det kun drejer sig om den absolute Størrelse af M , er det ligegyldigt, om man tager

Momentet af Kræfterne paa den ene eller den anden Side af Snittet, idet ifølge Ligning (12) disse to Momenter have Summen Nul, altsaa ere lige store med modsat Fortegn. For at komme ud over Ubestemtheden for Fortegnets Vedkommende vedtage vi imidlertid *ved M altid at forstaa Momentet af Kræfterne til venstre for Snittet*; hvis dette drejer i samme Retning som Viserne paa et Uhr, er M positivt. Idet vi betragte Bjælkestykket til venstre for et vilkaarligt Snit, skal Momentet af Normalspændingerne i Snittet holde Ligevægt med M , altsaa være modsat drejende, og heraf følger, at et positivt M bevirker Tryk foroven, Træk forneden i Bjælken i dette Snit, altsaa at Bjælken i dette Punkt kommer til at vende Konkaviteten opad. Retningen af Kurvens Konkavitet er imidlertid bestemt ved Fortegnet for $\frac{d^2y}{dx^2}$, og idet vi ovenfor have vedtaget at regne y positiv nedad, skal Ligning (19) for at være korrekt med Hensyn til Fortegnet skrives:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}. \quad (19a).$$

Heraf findes den neutrale Linies *) Ligning ved to Integrationer, hvorved der indkommer to Konstanter. Disse kunne bestemmes, hvis man kender et tilstrækkeligt Antal sammenhørende Værdier af x og y eller $\frac{dy}{dx}$, og saadanne leveres af Understøtningspunkterne. — Bjælken kan være understøttet paa forskellig Maade. En *simpel Understøtning* er en saadan, der tillader Bjælken frit at dreje sig om Understøtningspunktet; den giver kun en Enkeltkraft som Reaktion, altsaa kun én ubekendt, og den leverer kun ét Par sammenhørende Værdier af x og y . En *Indspænding* er derimod en saadan Understøtning, der umuliggør enhver Drejning af Bjælken i dette Punkt; Tangenten til den neutrale Linie er den samme før og efter Bøjningen. Den leverer altsaa et Sæt sammenhørende Værdier af x , y og $\frac{dy}{dx}$. Reaktionen bestaar her baade af en Enkeltkraft og et Kraftpar og kræver altsaa Bestemmelsen af to ubekendte. Kraftparret er nødvendigt for at hindre Drejning

*) Den neutrale Linie benævnes ogsaa ofte »den elastiske Linie«.

af Tangenten; ved en simpel Understøtning optræder derimod intet Moment. Naar Bjælken skal være statisk bestemt, maa der, som ovenfor udviklet, kun være to ubekendte Reaktioner at bestemme; heraf følger, at en statisk bestemt Bjælke kun kan være understøttet ved én Indspænding, men ved to simple Understøtninger. En Bjælke med en simpel Understøtning og en Indspænding eller med to Indspændinger eller med flere end to simple Understøtninger o. s. v. er statisk ubestemt.

§ 25. Inden vi føre den almindelige Behandling videre, ville vi anvende det nu udviklede paa et specielt Exempel, en *kun ved den ene Ende indspændt Bjælke AB* (Fig. 55, Pl. 6). Belastningen bestaar af to Enkeltkræfter P_1 og P_2 , Reaktionen i Indspændingspunktet af en lodret Enkeltkraft A og et Kraftpar M_a , der regnes positive i de i Fig. ved Pilespidser angivne Retninger. Koordinatsystemet lægges med Begyndelsespunkt i Indspændingspunktet, x -Aksen positiv til højre, y -Aksen positiv nedad.

Til Bestemmelse af A og M_a have Ligningerne (12):

$$A + P_1 + P_2 = 0,$$

$$M_a + P_1x_1 + P_2x_2 = 0,$$

hvoraf: $A = -(P_1 + P_2)$, $M_a = -(P_1x_1 + P_2x_2)$.

Dernæst ville vi finde Transversalkræfterne Q og Momenterne M for de forskellige Snit i Bjælken.

Transversalkraften i et Punkt med Abscisse x , beliggende mellem P_1 og P_2 , er lig Resultanten af Kræfterne til venstre for Punktet, altsaa Resultanten af P_1 , A og M_a . Her er det imidlertid lettere at finde Resultanten af Kræfterne til højre for Snittet; man skal da blot forandre Fortegnet for at have Transversalkraften; ganske det samme gælder om Momentet i Punktet.

Saaledes faas:

$$Q_x = -P_2, \quad M_x = -P_2(x_2 - x).$$

Disse Udtryk gælde kun, saalænge det betragtede Punkt ligger mellem P_1 og P_2 . Hvis Punktet ligger mellem P_2 og B , findes der slet ingen Kræfter til højre, altsaa er her $Q_x = 0$,

$M_x = 0$. Hvis endelig Punktet x ligger mellem A og P_1 , faas:

$$Q_x = -(P_1 + P_2), \quad M_x = -P_2(x_2 - x) - P_1(x_1 - x).$$

Vi kunne nu danne os et Billede af Transversalkraftens og Momentets Variation; fra Axen $A'B'$ er Transversalkraften afsat som Ordinater opad, Momentet nedad (Fig. 55). Transversalkraften er konstant mellem de enkelte Kræfter, saa man faar den aftrappede Linie $B'A_1$; Højden af Trinnet ved P_1 er lig Størrelsen af Kraften P_1 , Transversalkraften ved A er lig Reaktionen A . Momentet er mellem to Kræfter fremstillet ved Ordinaterne til en ret Linie; af Udtrykkene for M_x ovenfor ses, at de forskellige rette Linier (mellem de forskellige Kræfter) skære hinanden paa Kraftlinierne, hvorfor *Momentkurven* bliver en Polygon som $B'A_2$. Maximummomentet faas ved Indspændingen, og det er lig $A'A_2 = \div (P_1x_1 + P_2x_2)$; naar Bjælkens Tværsnit er konstant, maa det være dette største Moment, der bliver bestemmende for Dimensionerne.

Exempel. $P_1 = 1,5^t$, $P_2 = 0,6^t$, $x_1 = 0,4^m$, $x_2 = 1,5^m$. Bjælken skal være af Træ (Halvtømmer), for hvilket den tilfældige Fiberpaavirkning kan regnes til 60 kg./cm.^2 ($r_1 = r_2$). Største Moment findes (numerisk) at være:

$$M_{\max.} = 1,5 \times 0,4 + 0,6 \times 1,5 = 1,5^t m.$$

Af Ligning (18 a) findes det nødvendige Modstandsmoment

$$W = \frac{M_{\max.}}{r} = \frac{150000}{60} = 2500 \text{ cm.}^3.$$

For et rektangulært Tværsnit med Siderne b og h (b parallel med den neutrale Axe) er $W = \frac{1}{6} bh^2$; her skal specielt $b = \frac{1}{2} h$, hvorved

$$W = \frac{1}{8} h^3 = 2500, \quad h = 31,1 \text{ cm.}$$

Tværsnittet skal altsaa være $15,6 \times 31,1 \text{ cm.}$ ($6'' \times 12''$ Halvtømmer).

Transversalkræfter og Momenter kunne ogsaa let findes grafisk (§ 6 og § 10). Man tegner blot en Tovpolygon til de givne Kræfter (Fig. 56, Pl. 6). Idet vi, som ovenfor bemærket, lettest tage Kræfterne til højre for det betragtede Punkt, faas Momentet i Punktet C at være lig $h \cdot y$, hvor h betegner Pol-distancen, y det Stykke, der afskæres paa den lodrette Linie

gennem C af Tovpolygonsiderne før og efter de betragtede Kræfter. I Punktet C_1 faas paa samme Maade $M = h \cdot y_1$, og i det hele ser man, at Momenterne ere fremstillede ved Ordinaterne til Tovpolygonen, maalte ud fra den forlængede første Side; den skraverede Flade kaldes *Momentfladen*. Momentmaalestokkens Enheder ere $\frac{1}{h}$ af Kraftmaalestokkens, idet h

maales paa Længdemaalestokken. Transversalkraften i Punktet C er Resultanten af Kræfterne til højre for C med modsat Fortegn, altsaa her naturligvis lig P_2 ; hvis man havde en hel Række Kræfter til højre for C , kunde man imidlertid finde Transversalkraften lige saa let, nemlig som *det Stykke, der i Kraftpolygonen afskæres af et Par Straaler, parallelle med de af Snittet overskaarne Tovpolygonsider*. Et System af Kræfter faas nemlig ved Tovpolygonen erstattet med to enkelte Kræfter, virkende i Tovpolygonsiderne før og efter alle Kræfterne (og det er netop disse Tovpolygonsider, der træffes af Snittet), og hvis Størrelser angives af de tilsvarende Straaler i Kraftpolygonen; Transversalkraften er nu Resultant af disse to Kræfter, altsaa i Størrelse lig den tredje Side i den Trekant i Kraftpolygonen, der bestemmes af de to nævnte Polstraaler. — Q 's Retningslinie gaar gennem de overskaarne Tovpolygonsiders Skæringspunkt.

Vi gaa dernæst over til at bestemme den neutrale Linie. Da Momentet er udtrykt som en diskontinuert Funktion af x , maa den neutrale Linie være sammensat af flere Kurvestykker, idet Overgangen fra det ene til det andet sker i Kræfternes Retningslinier. Imidlertid kan Bjælken ikke bøje sig saaledes, at der forekommer pludselige Knæk i den neutrale Linie, og de forskellige Kurver, hvoraf denne er sammensat, maa derfor tangere hinanden i Sammenstødspunkterne (se ogsaa næste Paragraf).

For Bjælkestykket $A - P_1$ haves:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_x = P_2(x_2 - x) + P_1(x_1 - x),$$

$$\text{hvoraf: } EI \frac{dy}{dx} = (P_1 x_1 + P_2 x_2) x - \frac{1}{2} (P_1 + P_2) x^2 + C$$

$$\text{og } EI y = \frac{1}{2} (P_1 x_1 + P_2 x_2) x^2 - \frac{1}{6} (P_1 + P_2) x^3 + Cx + C_1.$$

Idet $x = 0$ skal give $y = 0$ og $\frac{dy}{dx} = 0$, findes $C = 0$,
 $C_1 = 0$.

For Bjælkestykket $P_1 - P_2$ haves:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_x = P_2(x_2 - x);$$

efter Udførelsen af Integrationerne bestemmes Konstanterne derved, at $x = x_1$ skal give de samme Værdier for y og $\frac{dy}{dx}$ her som i de ovenfor fundne Ligninger for Bjælkestykket $A - P_1$.

Endelig har man for Bjælkestykket $P_2 - B$:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

hvor Integrationskonstanterne bestemmes ved, at man skal finde samme Værdier af y og $\frac{dy}{dx}$ ved at sætte $x = x_2$ i Ligningerne her og i Ligningerne for Bjælkestykket $P_1 - P_2$. Ved at gennemføre Beregningerne finder man Ligningen for den neutrale Linie paa Stykket $P_2 - B$:

$$EI y = \frac{1}{2} (P_1 x_1^2 + P_2 x_2^2) \cdot x - \frac{1}{6} (P_1 x_1^3 + P_2 x_2^3);$$

herved fremstilles en ret Linie, hvilket Resultat man kunde vide paa Forhaand, da ingen Kræfter virke til Bøjning af dette Stykke af Bjælken. Nedbøjningen i den frie Ende af Bjælken er, idet $AB = l$,

$$y_l = \frac{l}{2EI} (P_1 x_1^2 + P_2 x_2^2) - \frac{l}{6EI} (P_1 x_1^3 + P_2 x_2^3).$$

Exempel. For den i Talexemplet ovenfor behandlede Bjælke findes, idet $l = 2,0^m$, og idet E regnes til 120000 kg. cm^2 :

$$I = \frac{1}{12} \cdot 15,6 \cdot 31,1^3 = 39100 \text{ cm}^4.$$

$$P_1 x_1^2 + P_2 x_2^2 = 1500 \cdot 40^2 + 600 \cdot 150^2 = 15900000 \text{ kg. cm}^2.$$

$$P_1 x_1^3 + P_2 x_2^3 = 2121000000 \text{ kg. cm}^3.$$

$$y_l = 0,26 \text{ cm}.$$

Forøvrigt kan ingen Beregning, der er opstillet under Forudsætning af Homogenitet, gælde nøjagtigt for et saa uhomogent Materiale som Træ, saa et Resultat som dette er ikke meget paalideligt.

§ 26. Vi skulle nu føre den almindelige Behandling i § 24 videre.

Hvis Belastningen paa Bjælken er kontinuerlig fordelt efter Belastningskurven $p = f(x)$ (Fig. 57, Pl. 6), og vi betragte to konsekutive Snit 1 og 2, er Forskellen mellem Transversalkræfterne Q_1 og Q_2 i de to Snit lig Belastningen $p \cdot dx$ paa det uendelig lille Stykke dx mellem Snittene, altsaa:

$$Q_2 - Q_1 = dQ = p dx,$$

$$\frac{dQ}{dx} = p. \quad (20)$$

Hvis Belastningen er ensformig fordelt, p altsaa konstant, ses heraf, at Transversalkraftkurven (den Kurve, hvis Ordinater angive Størrelsen af Transversalkræfterne i Bjælkens forskellige Punkter) er en ret Linie, der med Abscisseaxen danner en Vinkel, hvis tg er lig p . Naar Belastningen bestaar af Enkeltkræfter som i Exemplet i forrige §, er Q konstant mellem Kræfterne, og Transversalkraftkurven har pludselige Spring i Kraftlinierne; Ordinatdifferensen i et saadant Punkt er lig den i Punktet angribende Kraft.

Endvidere faas i Fig. 57, idet vi som i Fig. angivet antage Q beliggende til højre:

$$M_1 = + Q \cdot \xi, \quad M_2 = + Q(\xi - dx) - p dx \cdot \frac{1}{2} dx,$$

hvoraf med Bortkastelse af sidste Led, der er uendelig lille af 2den Orden, faas:

$$M_2 - M_1 = dM = - Q dx,$$

$$\frac{dM}{dx} = - Q. \quad (21)$$

Hvis Q virkede til venstre for Snit 1, vilde man have:

$$M_1 = - Q\xi, \quad M_2 = - Q(\xi + dx),$$

saa Resultatet vilde blive det samme. Relationen (21) gælder

ogsaa, selv om Belastningen bestaar af Enkeltkræfter; i Kræfternes Retningslinier varierer baade Q og $\frac{dM}{dx}$ pludseligt.

Af (21) følger, at *Momentkurven har et Maximums- eller Minimumspunkt, naar $Q = 0$.*

Af (20) og (21) udledes:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -p, \quad (22)$$

hvoraf følger, at *Momentkurven er en Tovpolygon til Belastningen med Poldistance 1 (cfr. den almindelige Differential-ligning for en Tovpolygon, § 7). Naar p er konstant, faas af (22), at Momentkurven er en Parabel. —*

Vi ville nu tage *Nedbøjningerne y og »Tangentvinklerne«* (de Vinkler, som Tangenterne til den neutrale Linie danne med x -Aksen) $\alpha \sim \lg \alpha = \frac{dy}{dx}$ med i vore Betragtninger.

Af Ligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

sammenlignet med (22) følger, at Nedbøjningen y findes af $\frac{M}{EI}$ ganske paa samme Maade, som M findes af p .

$$\text{Af} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d \cdot \frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d\alpha}{dx} = -\frac{M}{EI}$$

sammenlignet med (20) følger, at Tangentvinklen α ligeledes findes af $\frac{M}{EI}$ paa samme Maade, som Q findes af p . *Nedbøjning og Tangentvinkel kunne altsaa findes som Moment og Transversalkraft i en Bjælke med Belastningen pr. Længdeenhed $\frac{M}{EI}$ (Belastningskurven $p = \frac{M}{EI}$).*

For at kunne beregne y og α paa denne Maade maa man imidlertid vide, hvorledes den Bjælke er understøttet, hvorpaa Belastningen $\frac{M}{EI}$ virker. Dette faar man Oplysning om ved at gøre sig klart, hvorledes man skulde have bestemt Integrationskonstanterne, hvis man havde fundet den elastiske Linie ved

Integration; i saa Fald vilde man have benyttet to Betingelser, hentede fra Beskaffenheden af den givne Bjælkes Understøtninger, og disse samme to Betingelser bestemme Beskaffenheden af den nye (tænkte) Bjælkes Understøtninger. Spørgsmaalet forstaas lettest, naar vi nedenfor vise, hvorledes den elastiske Linie kan konstrueres grafisk. Vi skulle derfor ikke indlade os videre derpaa her; blot skal bemærkes, at da man kun benytter to Betingelser til at bestemme Integrationskonstanterne for den elastiske Linie, maa den nye Bjælkes Understøtninger være saaledes beskafne, at der kun kan hentes to Betingelser derfra, hvorfor den nye Bjælke maa være statisk bestemt, selv om den oprindelig givne Bjælke ikke er det.

Som det er vist i Indledningen og ogsaa benyttet i § 25, kunne Momenter og Transversalkræfter overmaade let bestemmes grafisk ved Hjælp af Kraft- og Tovpolygon; man maa derfor kunne finde y og α paa samme Maade. Dette ses ogsaa ved Sammenligning af den almindelige Differentialligning for en Tovpolygon med den elastiske Linies Differentialligning:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{h} \text{ og } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI};$$

den elastiske Linie er følgelig en Tovpolygon*) (den elastiske eller 2den Tovpolygon) med Poldistance 1 til Belastningskurven

$p = \frac{M}{EI}$ eller med Poldistance EI til Belastningskurven $p = M$.

For at kunne maale Momenterne som Ordinater til en Tovpolygon maa man imidlertid kende den Axe, Slutlinien, hvorfra de skulle maales. Denne Slutlinie er bestemt i § 10 for en Bjælke med to simple Understøtninger, i § 25 for en i den ene Ende indspændt Bjælke, og vi skulle i det følgende se flere Exempler herpaa. For den elastiske Tovpolygon er Slutlinien ikke andet end den rette Linie, der angiver den ubøjede Bjælkes Axe, og den faas bestemt derved, at man kender Understøtningernes Beskaffenhed. Antage vi f. Ex., at Kurven $A'B'$ (Fig 58, Pl. 6) er en Tovpolygon med Poldistance EI til Belastningskurven $p = M$ for den simpelt understøttede Bjælke AB , saa vides det, at Nedbøjningen er Nul i A og B , og den rette Linie $A'B'$ maa derfor angive Beliggenheden af den

*) Først vist af Mohr, 1868.

ubøjede Bjælkeaxe i Forhold til Tovpolygonen; Nedbøjningen i Punktet C maales som den lodrette Ordinater y . — Vi kunne nu ogsaa for dette specielle Exempels Vedkommende besvare det ovenfor stillede Spørgsmaal, hvorledes den Bjælke skal være understøttet, hvorpaa $p = \frac{M}{EI}$ skal virke som Belastning, hvis man vil *beregne* (og ikke tegne) Nedbøjningerne som Momenter. For at gøre det betragte vi Fig. 58 som en ren Momentbestemmelse; vi vide, hvorledes Slutlinien for Momentkurven $A'B'$ er lagt ind, og kunne deraf slutte os til, hvorledes den Bjælke maa være understøttet, for hvilken Momenterne ere bestemte som i Fig. 58. Slutlinien $A'B'$ er indlagt saaledes, at Ordinaterne til Tovpolygonen i A' og B' blive Nul, altsaa maa Understøtningerne være saaledes beskafne, at Momenterne i A og B ere Nul, d. v. s. den Bjælke, hvorpaa $p = \frac{M}{EI}$ skal virke som Belastning, maa være simpelt understøttet i A og B .

Vi ville tage endnu et Exempel. For en i den ene Ende indspændt Bjælke AB (Fig. 59, Pl. 6) kendes Momentkurven, og til den som Belastningskurve antage vi at have tegnet Tovpolygonen $A'B'$ med Poldistancen EI ; $A'B'$ angiver altsaa Formen af den elastiske Linie efter Bøjningen. For at kunne maale Nedbøjningerne y som Ordinater til Kurven $A'B'$ maa vi finde Stillingen af den ubøjede Bjælkeaxe i Forhold til Kurven $A'B'$. Hertil have vi, at Nedbøjningen i A er Nul, saa den søgte Slutlinie maa gaa gennem Punktet A' , og endvidere at Tangenten til den elastiske Linie i A' skal falde sammen med den ubøjede Bjælkeaxe, hvorfor denne maa tangere Kurven $A'B'$ i A' ; derved er Slutlinien $A'B''$ bestemt. Tangenten til Tovkurven $A'B'$ i A' er Tovpolygonsiden umiddelbart til venstre for A' . Ved Sammenligning med den grafiske Momentbestemmelse i § 25 se vi nu, at Slutlinien $A'B''$ her er indlagt ganske paa samme Maade, som hvis $A'B'$ var Momentkurve for en ved B indspændt, ved A fri Bjælke; saaledes maa derfor den Bjælke være understøttet, hvorpaa man her skal lade Belastningen $p = M$ virke. — Tangentvinklerne α findes som Transversalkræfter i den samme tænkte Bjælke. Vi ville i det følgende komme til at se flere Exempler paa, at den tænkte Bjælke ikke falder sammen med den virkelige.

Naar man vil konstruere den elastiske Linie som Tovpolygon, maa man som altid ved grafiske Konstruktioner have Opmærksomheden henvendt paa Maalestokken. Man skal konstruere en Tovpolygon til Belastningskurven med Ordinater

$\frac{M}{EI}$ og Poldistance 1. Kræfterne, der skulle benyttes, ere da $\frac{Mdx}{EI}$, eller idet man som sædvanligt maa erstatte de uendelig

smaa Længder dx med endelige Længder Δx , $\frac{M\Delta x}{EI}$, hvor Δx betegner Bredden af de Strimler, hvori man inddeler Momentfladens Areal. $M \cdot \Delta x$ er af Dimensionen kg. cm.². EI ligesaa, Kræfterne ere altsaa rene Tal. Hvis man nu efter at have foretaget Inddelingen i Strimler beregner de tilsvarende Størrelser $\frac{M \cdot \Delta x}{EI}$ og afsætter dem i Kraftpolygonen efter en vilkaarlig Maalestok for rene Tal, saa skal man blot vælge Poldistancen lig 1 efter samme Maalestok; Tovpolygonen leverer da Nedbøjningerne i Tegningens Maalestok for Længder.

I Almindelighed opnaar man dog intet paa denne Maade. fordi Nedbøjningerne ere for smaa til at kunne maales i Tegningens Maalestok; for at faa et brugeligt Resultat maa man sørge for, at Tovpolygonen leverer Nedbøjningerne i forstørret Maalestok. Dette kan opnaas ved at bruge Poldistancen $\frac{1}{n}$, hvorved Ordinaterne i Tovpolygonen blive multiplicerede med n . Ofte kan det være bekvemt at finde Nedbøjningerne i sand Størrelse, uafhængigt af Tegningens Længdemaalestok; i saa Fald skal man blot vælge $\frac{1}{n}$ lig Tegningens Maalestoksforhold.

Saaledes som nu beskrevet udføres Konstruktionerne dog sjældent. I Almindelighed har man nemlig fundet Momenterne ved Hjælp af en Tovpolygon (Poldistance h), og man danner da ikke Udtrykkene $\frac{M \cdot \Delta x}{EI}$, men bruger direkte Tovpolygonens Areal som Belastning. Analogt med lignende tidligere omtalte Konstruktioner gaar man da frem saaledes: Bjælkens Længde inddeles i et Antal lige store Dele Δx , de tilsvarende Arealer af Momentfladen (Tovpolygonen) forvandles til Rektangler med fælles Grundlinie a og disse Rektanglers Højder anvendes som

Kraftstørrelser (det hele udføres ved Hjælp af en Reduktionsvinkel). Idet Tovpolygonens Ordinater ere $\frac{M}{h}$, bliver Arealet af en Strimmel af Momentfladen lig $\frac{M}{h} \cdot \Delta x$, og naar dette Areal forvandles til et Rektangel med Grundlinie a , bliver Rektanglets Højde lig $\frac{M \cdot \Delta x}{h \cdot a}$; dette er Størrelsen af de anvendte Kræfter. Hvis Kraftstørrelserne vare $M \cdot \Delta x$, skulde man bruge Poldistancen $\frac{1}{n} \cdot EI$ for den elastiske Tovpolygon; nu har man divideret Kraftstørrelserne med $h \cdot a$, hvorfor man ogsaa maa dividere Poldistancen med $h \cdot a$, hvis Tovpolygonen skal blive den samme. Naar man gaar frem som ovenfor beskrevet, skal man altsaa benytte en Poldistance

$$h_1 = \frac{EI}{n \cdot a \cdot h}. \quad (23).$$

a maales paa Tegningens Længdemaalestok; af Størrelserne h og h_1 maales den ene paa Kraftmaalestokken, den anden paa Længdemaalestokken (EI er af Dimensionen kg. cm.^2).

Exempel. En 16^m . lang, i begge Ender simpelt understøttet Jærnbjælke (Fig. 60, Pl. 7) er belastet med de i Fig. angivne Enkeltkræfter; tegn Nedbøjningslinien.

De givne Kræfter ere afsatte i en Kraftpolygon efter Maalestokken: $1^m.m. = 1^{\text{ton}}$, med Poldistancen $h = 5^m$. (maalt paa Længdemaalestokken) er der tegnet en Tovpolygon $A'E'F'B'$, og Slutlinien $A'B'$ er indlagt som i § 6 beskrevet. Momenterne i de forskellige Punkter af Bjælken ere da fremstillede ved de lodrette Ordinater mellem Slutlinie og Tovpolygon (§ 10, se ogsaa § 28), idet Momentmaalestokken er: $1^m.m. = 5^{10}.m.$. Største Moment findes at være $87,5^{10}.m.$. Idet den tilladelige Fiberpaavirkning regnes til $r = 750 \text{ kg./cm.}^2$, findes det nødvendige Modstandsmoment at være:

$$W = \frac{8750000}{750} = 11667 \text{ cm.}^3.$$

Bjælken konstrueres som en nittet Pladejærnsdrager; Bestemmelsen af dennes Dimensioner kunne vi ikke komme

nærmere ind paa her, som Resultat anføres blot, at et passende Tværsnit vil være det i Fig. 60 længst til højre viste, for hvilket det nyttige Modstandsmoment $W = 11910 \text{ cm}^3$.

Nu skulle vi konstruere Nedbøjningslinien som Tovpolygon til den fundne Momentflade (de punkterede, savtakke Tilføjelser til Momentkurven ved begge Ender have ingen Betydning her). Momentfladen inddeles i Strimler af den konstante Bredde $\Delta x = 2^m$, og ved Hjælp af Reduktionsvinklen afsættes $\frac{1}{3}$ af Strimlernes Middelhøjder som Kræfter (Kraftpolygonen nederst til højre i Fig.); Størrelsen a i Formel (23) er altsaa lig $3 \times 2^m = 6^m$. Inertimomentet (uden Fradrag af Nitte-huller) er 910750 cm^4 . Hvis vi ville have Nedbøjningerne i sand Størrelse, sættes $n = 200$ (Tegningens Længdemaalestok er 1:200), og man skal da for den elastiske Tovpolygon bruge en Poldistance ($E = 2000000 \text{ kg./cm}^2$):

$$h_1 = \frac{2000000 \cdot 910750}{200 \cdot 600 \cdot 500} = 30358 \text{ kg.} = 30,36^m,$$

idet alle Størrelser i Formlen ere indførte i kg. og cm. Største Nedbøjning findes paa Fig. at blive $1,25 \text{ cm}$.

Den Tovpolygon, man faar tegnet paa denne Maade, tangerer som bekendt den virkelige Tovkurve i Punkterne lodret under Skillelinierne mellem Strimlerne. Undertiden har man, som vi skulle se i det følgende, kun Brug for at finde Tangenterne til Tovkurven lodret under Understøtningspunkterne, de yderste Tovpolygonsider; disse blive de samme, hvorledes man end inddeler Momentfladens Areal, ved lodrette eller skraa Skillelinier, og man kan f. Ex. ogsaa finde dem ved at lade hele Momentfladens Areal virke som Enkeltkraft i dens Tyngdepunkt og tegne Tovpolygonen hertil.

Endnu et Par almindelige Bemærkninger maa finde Plads her. Transversalkraftens Størrelse findes jo som en Sum af Kræfter, Momentets ligeledes som Summen af de enkelte Kræfters Momenter; det samme gælder om Tangentvinkler og Nedbøjninger, da de som ovenfor vist kunne findes som Transversalkræfter og Momenter. Heraf følger, at man kan bestemme de af en hel Række Kræfter frembragte Transversalkræfter, Momenter, Tangentvinkler og Nedbøjninger ved først at finde disse Virkninger for hver enkelt af Kræfterne, betragtet som virkende alene, og til Slut addere de enkelte Virkninger.

Af de i Begyndelsen af denne Paragraf udviklede Relationer mellem p , Q , M , α og y kan videre dannes:

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = Q,$$

og

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = p.$$

Hvis nu Q i et Punkt af Bjælken varierer i Spring (ved en Enkeltkraft), vil $\frac{d^3 y}{dx^3}$ ligeledes variere i Spring, altsaa have to forskellige Værdier i Punktet. Derimod vil $\frac{d^4 y}{dx^4}$ kun have én Værdi i et saadant Punkt, da M kun har én Værdi, og det samme gælder $\frac{dy}{dx}$. I en Enkeltkrafts Angrebepunkt vil der altsaa (som vi ogsaa have set i § 25) være en Diskontinuitet i den neutrale Linie; denne vil bestaa af forskellige Kurvestykker, der støde sammen i Punktet. Men de to Kurver skulle have samme y , $\frac{dy}{dx}$ og $\frac{d^2 y}{dx^2}$ i Sammenstødspunktet. Paa samme Maade ses let, at et pludseligt Spring i Belastningskurven (p) ligeledes vil bevirke en Diskontinuitet i den neutrale Linie; men her skulle de to Kurvestykker endog have $\frac{d^3 y}{dx^3}$ fælles i Sammenstødspunktet *).

Vi skulle nu gaa over til at behandle de almindeligst forekommende Understøtnings- og Belastningsmaader for Bjælker i det enkelte.

§ 27. En kun ved den ene Ende indspændt Bjælke. I § 25 er den almindelige Methode til *Beregning* af Spændinger og Formforandringer vist; der er ganske vist kun behandlet en Belastning bestaaende af to Enkeltkræfter, men Udvidelsen til flere Kræfter foretages uden Vanskelighed. Sammesteds er ogsaa vist den *grafiske* Bestemmelse af Momenter og Transversalkræfter. I § 26 er forklaret, hvorledes Slutlinien for den elastiske Tovpolygon indlægges, hvorefter den *grafiske* Konstruktion af Nedbøjningerne let foretages. Endelig er det i

*) Grashof: *Theorie der Elasticität und Festigkeit*, Berlin, 1878.

§ 26 vist, hvorledes den Bjælke skal være understøttet, hvorpaa man skal lade Momentfladen virke som Belastning, hvis man vil *beregne* Nedbøjningerne som Momenter: naar den givne Bjælke er indspændt ved *A*, fri ved *B*, skal den tænkte Bjælke være indspændt ved *B*, fri ved *A*. Vi ville nu undersøge nogle specielle Belastninger og til Beregning af Nedbøjningerne navnlig anvende den sidste Fremgangsmaade.

1. *Der virker kun en Enkeltkraft P i den frie Ende B .* Man finder let, at Transversalkraften er konstant over hele Længden og lig P , og at Momentkurven er en ret Linie, der har Ordinaten Nul ved *B* og Ordinaten $-P \cdot l$ ved Indspændingspunktet *A*, Momentfladen altsaa en Trekant. Lader man denne Trekants Areal virke som Belastning paa en ved *B* indspændt Bjælke (Fig. 61, Pl. 6) og bestemmer Transversalkraft og Moment ved *B*, finder man Tangentvinklen α_b og Nedbøjningen y_b i den givne Bjælkes frie Ende ved blot at dividere disse Størrelser med EI . Transversalkraften ved *B* (Fig. 61) er lig Belastningstrekantens Areal $\frac{1}{2} Pl^2$, Momentet ved *B* findes ved at lade dette Areal virke som en Enkeltkraft i Trekantens Tyngdepunkt, hvorved faas: $\frac{1}{3} Pl^3$; altsaa er:

$$\alpha_b = \frac{Pl^2}{2EI}, \quad y_b = \frac{Pl^3}{3EI}.$$

2. *Belastningen er ensformig fordelt, p pr. Længdeenhed.* I Fig. 62, Pl. 6, er Koordinatsystemets Begyndelsespunkt lagt i *B*. Til venstre for Punktet med Abscisse x virker Belastningen $p \cdot x$, altsaa er:

$$Q_x = + p \cdot x, \quad M_x = - p x \cdot \frac{1}{2} x = - \frac{1}{2} p x^2.$$

Transversalkraftkurven er en ret Linie $B'A'_1$, Momentkurven en Parabel $B'A'_2$ (Fig. 62); Parablen kan konstrueres ved § 7, Fig. 18, idet Toppunktet er B' og $A'A'_2 = \frac{1}{2} pl^2$. Den elastiske Linie kan findes ved Integration af Ligningen:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = + \frac{1}{2} p x^2,$$

idet Konstanterne bestemmes derved, at $x = l$ giver $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$.

Tangentvinklen α_b og Nedbøjningen y_b i den frie Ende findes lettest ved at lade Momentfladen virke som Belastning

paa en ved B indspændt Bjælke (Fig. 63, Pl. 7). Momentfladen betragtes som Differens mellem Rektanglet AA_1B_1B og Parabelsegmentet A_1B_1B . Transversalkraften ved B er lig $\frac{1}{2}pl^3 - \frac{1}{3}pl^3 = \frac{1}{6}pl^3$, Momentet sammesteds: $\frac{1}{2}pl^3 \cdot \frac{1}{2}l - \frac{1}{3}pl^3 \cdot \frac{8}{3}l = \frac{1}{8}pl^4$; altsaa haves:

$$\alpha_b = \frac{pl^3}{6EI}, \quad y_b = \frac{pl^4}{8EI}.$$

Hvis der samtidig virker en Enkeltkraft P i den frie Ende og en ensformig Belastning p , bliver Nedbøjningen i den frie Ende:

$$y_b = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3}Pl^3 + \frac{1}{8}pl^4 \right).$$

3. *Trekantbelastning* (Fig. 64, Pl. 7). Idet Begyndelsespunktet lægges i den frie Ende, er Belastningskurvens Ligning $p = k \cdot x$. Man finder:

$$Q_x = +\frac{1}{2}kx^2, \quad M_x = -\int Q_x dx + C = -\frac{1}{6}kx^3,$$

idet Konstanten C er bestemt saaledes, at $x = 0$ giver $M_x = 0$. Største Moment findes ved A og er $\frac{1}{6}kl^3$. Indfører man heri hele Belastningen paa Bjælken $= P = \frac{1}{2}kl^2$, faas

$$M_{\max.} = -\frac{1}{3}Pl.$$

Den neutrale Linie bestemmes ved Integration af Ligningen:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{6}kx^3;$$

man finder:

$$\alpha_b = \frac{kl^4}{24EI} = \frac{Pl^3}{12EI}, \quad y_b = \frac{kl^6}{30EI} = \frac{Pl^3}{15EI}.$$

Trapezbelastning, hvor Belastningskurven er: $p = a + kx$, behandles som Sum af en ensformig Belastning a pr. Længdeenhed og en Trekantbelastning. Man faar saaledes:

$$M_{\max.} = -\left(\frac{1}{2}al^2 + \frac{1}{6}kl^3\right), \quad y_b = \frac{al^4}{8EI} + \frac{kl^5}{30EI}.$$

Disse Belastningsmaader forekomme ved Vandtryk.

§ 28. En ved begge Ender simpelt understøttet Bjælke.

1. *Belastningen består af en Række Enkeltkræfter* (Fig. 65, Pl. 7). *Beregning.* Reaktionen A og B bestemmes ved (12), hvorved (idet $P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_nx_n$ betegnes ΣPx):

$$B = -\frac{\Sigma Px}{l}, \quad A = -\frac{\Sigma P(l-x)}{l}.$$

For et Tværsnit mellem A og P_1 , i Afstanden x fra A , findes:

$$Q_x = A, \quad M_x = -A \cdot x;$$

for et Tværsnit mellem P_1 og P_2 , i Afstanden x fra A , findes:

$$Q_x = A + P_1, \quad M_x = -Ax - P_1(x - x_1).$$

Paa lignende Maade bestemmes Transversalkraft og Moment i hvilket som helst Punkt af Bjælken. Man ser, at Q er konstant paa Stykket mellem to Kræfter, Transversalkraftkurven bliver en aftrappet Linie (Fig. 66, Pl. 7); ligeledes indser man, at Momentkurven bliver en Polygon med Vinkelspidser paa Kraftlinierne.

Den elastiske Linie bestemmes ved Integration af Ligning (19 a). Da M er en diskontinuert Funktion af x , maa Integrationen deles, og man faar den elastiske Linie sammensat af forskellige Kurvestykker mellem de forskellige Kræfter. Imidlertid have vi i Slutningen af § 26 vist, at de to Stykker af den elastiske Linie, der støde sammen i en Kraftlinie, have fælles Tangent i Sammenstødspunktet. Herved kan man faa alle Integrationskonstanterne bestemt; man begynder med Stykket $A - P_1$ og bestemmer Konstanterne saaledes, at $x = 0$ giver $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = \alpha$ (foreløbig ubekendt); for Stykket $P_1 - P_2$ benytter man, at $x = x_1$ skal give samme Værdier af y og $\frac{dy}{dx}$ her som i Stykket $A - P_1$, og saaledes gaar man efterhaanden videre; for Stykket $P_n - B$ endelig bestemmes Konstanterne ved Værdierne af y og $\frac{dy}{dx}$ for $x = x_n$, hvorefter man har, at $x = l$ skal give $y = 0$, og dette tjener til Bestemmelse af α .

Grafisk Methode. (Fig. 66, Pl. 7). Ved Hjælp af Kraft- og Tovpolygon bestemmes først Reaktionen A og B , idet Slutlinien ab og den dermed parallelle Straale i Kraftpolygonen drages. Momenterne ere fremstillede ved Ordinaterne i Tovpolygonen, maalte ud fra Slutlinien ($M_c = h \cdot y_c$); Transversalkraften i C findes som det Stykke, der i Kraftpolygonen afskæres af et Par Straaler, parallelle med de Tovpolygonsider, der træffes af Snittet gennem C : $Q_c = A + P_1$, og da $A > P_1$, er Q_c negativ. Den ene af de nævnte Tovpolygonsider er altid Slutlinien; det er derfor kun den ene af de nævnte Straaler i Kraftpolygonen, der flytter sig, naar C varierer. Man ser, at Transversalkraften er negativ, saalænge den bevægelige Straale ligger *over* den med Slutlinien parallelle, positiv, naar den ligger *under* denne; Bjælken deles altsaa i to Dele, saaledes at Transversalkraften i den til venstre altid er negativ, i den til højre altid positiv. Den aftrappede Transversalkraftkurve er konstrueret i Figuren lige ud for Kraftpolygonen. Transversalkraften gaar over fra at være negativ til at være positiv i Punktet P_2 ; i Overensstemmelse med Ligning (21) findes det største Moment i samme Punkt. Q_c 's Angrebspunkt er Skæringspunktet for de Tovpolygonsider, der træffes af Snittet gennem C ; af Figuren ses, at Q_c virker til venstre for C , saalænge den er negativ, til højre for C , naar den er positiv, stemmende med at Momentet i den simpelt understøttede Bjælke altid er positivt (Momentet er lig Transversalkraftens Moment). Det største Moment maa altid findes som Ordinat til en af Tovpolygonens Vinkelspidser, altsaa i Angrebspunktet for en af Kræfterne.

Nedbøjningerne konstrueres ved at tegne en Tovpolygon til Momentfladen som Belastning, saaledes som det er vist i § 26 (Fig. 60, Pl. 7); de kunne *beregnes* som Momenter i den oprindelige, simpelt understøttede Bjælke, paavirket af Momentfladen som Belastning.

Specielt antages der *kun at virke en Enkeltkraft* P (Fig. 67, Pl. 7). Man har da Reaktionen

$$A = -P \cdot \frac{b}{l}, B = -P \cdot \frac{a}{l};$$

• Momentfladen er en Trekant, største Moment findes ved P og er lig $\div A \cdot a$, altsaa

$$M_{\max.} = P \cdot \frac{ab}{l}.$$

Opg. 9. Find det Punkt af den i Fig. 67 viste Bjælke, hvor Nedbøjningen er størst. Benyt, at Nedbøjningerne kunne beregnes som Momenter, og at Maximumsmomentet findes i det Punkt, hvor Transversalkraften er Nul. (Hvis $a < b$, er det søgte Punkts Afstand fra B: $b \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2a}{3b}}$.)

Hvis P virker i Midtpunktet, bliver hver af Reaktionerne $\div \frac{1}{2}P$; største Moment er:

$$M_{\max.} = \frac{1}{4} Pl.$$

Naar Momentfladen virker som Belastning paa Bjælken (Fig. 68, Pl. 7), frembringes der Reaktionen $\frac{1}{8} Pl^2$. Momentet i Midtpunktet findes ved at erstatte Trekantbelastningen til venstre herfor med en Enkeltkraft i Tyngdepunktet, hvorved man faar:

$$\frac{1}{6} Pl^2 \cdot \frac{1}{2} l - \frac{1}{6} Pl^2 \cdot \frac{1}{6} l = \frac{1}{8} Pl^2.$$

Tangentvinklen α_a i Understøtningspunkterne og Nedbøjningen i Midten, $y_{\max}$, ere altsaa:

$$\alpha_a = \frac{Pl^2}{16EI}, \quad y_{\max.} = \frac{Pl^3}{48EI}.$$

Der virker to lige store Kræfter, lige langt fra Midten (Fig. 69, Pl. 7). Reaktionen blive: $A = B = \div P$; Momentet er konstant paa Stykket mellem de to Kræfter og lig:

$$M_{\max.} = P \cdot a.$$

Transversalkraften paa dette Stykke er Nul.
Af Ligningen

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

følger, at Bjælken paa Stykket mellem de to Kræfter krummer sig efter en Cirkelbue (ρ er konstant). Ved Benyttelse af det tilnærmede Udtryk for Krumningsradius i den neutrale Linies Differentialligning finder man derimod en Parabel; Fejlen er som sædvanlig uden Betydning. Nedbøjningerne findes paa sædvanlig Maade ved at lade Momentfladen (Trapezet i Fig. 69) virke som Belastning paa Bjælken; man finder Tangentvinklen α_a i Understøtningspunkterne og Nedbøjningen $y_{\max.}$ i Midten:

$$\alpha_a = \frac{P \cdot a(l-a)}{2EI}, \quad y_{\max.} = \frac{Pa}{24EI} (3l^2 - 4a^2).$$

2. *Belastningen er ensformig fordelt, p pr. Længdeenhed.* Reaktionen blive: $A = B = \div \frac{1}{2} pl$. Transversalkraften i et vilkaarligt Punkt i Afstanden x fra Understøtningen A (Fig. 70, Pl. 7) er:

$$Q_x = A + px = p(x - \frac{1}{2} l);$$

Transversalkraftkurven er altsaa en ret Linie, der afskærer Stykkerne $\pm \frac{1}{2} pl$ af Understøtningsvertikalerne og har Ordinaten Nul i Midten. Momentet i Punktet x er:

$$M_x = -A \cdot x - px \cdot \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} p (lx - x^2),$$

hvorved fremstilles en Parabel, der gaar gennem Understøtningspunkterne og har største Ordinaten (paa Midten) lig

$$M_{\max.} = \frac{1}{8} pl^2.$$

Parablen kan let konstrueres ved disse givne Størrelser.

Den elastiske Linies Differentialligning er:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_x = \frac{1}{2} p (x^2 - lx);$$

ved Integration findes:

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} p (\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} lx^2) + C,$$

$$EI y = \frac{1}{2} p (\frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{6} lx^3) + Cx + C_1,$$

og til Bestemmelse af Konstanterne haves, at $x = 0$ og $x = l$ give $y = 0$; dette giver $C_1 = 0$, $C = \frac{1}{24} pl^3$. Tangentvinklen α_a i Understøtningspunkterne og Nedbøjningen $y_{\max.}$ i Midten blive:

$$\alpha_a = \frac{pl^3}{24EI}, \quad y_{\max.} = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{EI}.$$

De samme Resultater findes ved at lade Momentfladen virke som Belastning paa Bjælken AB . Reaktionen A er lig det halve Parabelsegments Areal (Fig. 70), altsaa:

$$A = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} l \cdot \frac{1}{8} pl^2 = \frac{1}{24} pl^3 = EI \cdot \alpha_a.$$

Momentet i Midten af den med Parabelsegmentet belastede Bjælke findes ved at lade det halve Parabelsegments Areal

virke som Enkeltkraft i Tyngdepunktet ($\frac{3}{16} l$ fra Midten), hvorved faas:

$$M = \frac{1}{24} pl^3 \cdot \frac{1}{2} l - \frac{1}{24} pl^3 \cdot \frac{3}{16} l = \frac{5}{384} pl^4 = EI \cdot y_{\max}$$

Opg. 10. En i begge Ender simpelt understøttet Bjælke er paavirket af en ensformig Belastning p pr. Længdeenhed, der dækker en Længde $a (< l)$, symmetrisk beliggende om Midten. Bestem største Moment og Nedbøjning.

Opg. 11. En Træbjælke med kvadratisk Tværsnit er simpelt understøttet i to Punkter med $4,2^m$ Afstand. Belastningen bestaar af tre Kræfter paa $0,9^t$, der virke i Midten og i to symmetriske Punkter $1,2^m$ fra Midten samt af Bjælkens Egenvægt (Vægtfylden regnes til $0,8$). Bestem Dimensionerne, Tangentvinklen ved Understøtningerne og Nedbøjningen i Midten, idet den tilladelige Paavirkning $r = 60 \text{ kg. cm.}^2$, og $E = 120000 \text{ kg. cm.}^2$. Først foretages en foreløbig Beregning uden Hensyn til Egenvægten for at finde denne.

3. *Trekantbelastning.* Med Begyndelsespunktet i A er (Fig. 71, Pl. 7) Belastningskurvens Ligning $p = kx$; hele Belastningen paa Bjælken er $P = \frac{1}{2} kl^2$. Reaktionerne findes ved at lade P virke som Enkeltkraft i Trekantens Tyngdepunkt, hvorved:

$$A = -\frac{1}{3} P, B = -\frac{2}{3} P.$$

Endvidere findes:

$$Q_x = A + \frac{1}{3} kx^3, M_x = -\int Q_x dx + C = -Ax - \frac{1}{6} kx^3,$$

idet Konstanten C er bestemt saaledes, at $x = 0$ giver $M_x = 0$. Maximumsmomentet findes i det Punkt, hvor $Q_x = 0$, hvorved faas:

$$x = l \sqrt{\frac{1}{3}}, M_{\max.} = \frac{2}{9\sqrt{3}} Pl = 0,128 Pl.$$

Trapezbelastning, hvor Belastningskurven er $p = a + kx$, behandles som en Sum af den ensformige Belastning a og Trekantbelastningen $p = kx$. Udtrykkene for Q_x og M_x kunne direkte adderes, Udtrykkene for $M_{\max.}$ derimod naturligvis ikke, da $M_{\max.}$ ikke optræder i samme Punkt for de to enkelte Belastningsarter. Det Punkt, hvor Momentet er størst, findes ved at sætte $Q_x = 0$ som ovenfor, men det almindelige Resultat bliver noget kompliceret. —

§ 29. En ved begge Ender simpelt understøttet Bjælke, der i Understøtningspunkterne er paavirket af Kraftpar.

Bjælken AB (Fig. 72, Pl. 8) er i Punkterne A og B paavirket af to givne Kraftpar med Momenter M_a og M_b , drejende i de paa Fig. angivne Retninger; der findes ingen anden Belastning. Reaktionen bestemmes som sædvanligt; ved at tage Momenterne med Hensyn til B eller A findes:

$$\left. \begin{aligned} M_a - M_b - Al &= 0 \\ M_a - M_b + Bl &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad A = -B = \frac{M_a - M_b}{l};$$

Reaktionerne A og B danne et Kraftpar med Moment $M_a - M_b$. Transversalkraften i et vilkaarligt Punkt er lig Reaktionen A , altsaa konstant for alle Bjælkens Punkter:

$$Q_x = \frac{M_a - M_b}{l}. \quad (24)$$

Momentet i Punktet x er:

$$\begin{aligned} M_x &= M_a - A \cdot x = M_a \left(1 - \frac{x}{l}\right) + M_b \cdot \frac{x}{l}, \\ M_x &= M_a \cdot \frac{x'}{l} + M_b \frac{x}{l}. \end{aligned} \quad (25)$$

Momentkurven er en ret Linie, der af Understøtningsvertikalerne afskærer Stykkerne M_a og M_b (Fig. 72); Momentfladen er et Trapez; hvis M_a eller M_b specielt er Nul, faas en Trekant.

Nedbøjninger og Tangentvinkler findes ved at lade Momentfladen virke som Belastning paa Bjælken AB ; denne Belastning giver en Reaktion A , der findes ved at dele Trapezet i to Trekanter (Fig. 72):

$$A = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} M_a l + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} M_b l = \frac{1}{6} l (2M_a + M_b);$$

Reaktionen B findes ved Ombytning af M_a og M_b . Tangentvinklerne α_a og α_b i Understøtningspunkterne ere altsaa:

$$\alpha_a = \frac{l}{6EI} (2M_a + M_b), \quad \alpha_b = \frac{l}{6EI} (M_a + 2M_b). \quad (26)$$

Formlerne (24)–(26) skulle benyttes flere Gange i det

følgende; ved deres Anvendelse maa man erindre, at M_a og M_b her ere indførte som positive, naar deres Omdrejningsretning er den i Fig. 72 angivne (naar de altsaa søge at bøje Bjælken saaledes, at den vender Konkaviteten opad). — Nedbøjningerne kunne findes som Momenter af Momentfladens Areal, men de have ikke den Interesse; største Nedbøjning findes i det Punkt, hvor Transversalkraften fra Momentfladen som Belastning er Nul.

Hvis der foruden Kraftparrene M_a og M_b tillige virker en given lodret Belastning, kan man, som tidligere vist, ligefrem addere de fra hver Art af Belastning for sig hidrørende Virkninger. Idet Transversalkraft og Moment i et vilkaarligt Snit, hidrørende fra den lodrette Belastning alene, kaldes Q_0 og M_0 , haves altsaa fra den kombinerede Belastning:

$$Q_x = Q_0 + \frac{M_a - M_b}{l}. \quad (28)$$

$$M_x = M_0 + M_a \frac{x'}{l} + M_b \frac{x}{l}. \quad (29)$$

I Fig. 73, Pl. 8, er Bjælken AB saaledes paavirket af Kræfterne P_1 og P_2 foruden af Kraftparrene. Momentkurven for P_1 og P_2 er konstrueret som Tovpolygon med Slutlinien $a'b'$, og for Snittet x findes de paa Fig. angivne Q_0 og M_0 . Den resulterende Momentflade findes ved til M_0 -Fladen at lægge et Trapez med Ordinaterne M_a og M_b ved Enderne, M_x maales altsaa fra den nye Slutlinie ab til Tovpolygonen. Transversalkraften Q_x skal bestemmes efter Formlen (28), men det kan vises, at Q_x kan findes paa sædvanlig Maade ved i Kraftpolygonen at trække et Par Straaler parallelle med de af Snittet x overskaarne Tovpolygonsider, naar man blot lader ab være den ene af disse i Stedet for $a'b'$. Idet nemlig $aa' = \frac{M_a}{h}$, $bb' = \frac{M_b}{h}$ (Nævneren h er udeladt i Fig.) findes let ved ligedannede Trekkanter:

$$\frac{m}{h} = \frac{\frac{1}{h} (M_a - M_b)}{l}, \quad m = \frac{M_a - M_b}{l}.$$

Q_x er altsaa lig $Q_0 + m$, men dette Stykke afskæres netop i Kraftpolygonen mellem Straaler parallelle med ab og med den overskaarne Tovpolygonside.

I Fig. 74, Pl. 8, er Bjælken AB paaavirket af en ensformig Belastning p pr. Længdeenhed og to Kraftpar M_a og M_b , der søge at bøje Bjælken opad (ere negative). M_0 -Kurven er en Parabel, der let kan tegnes, idet Ordinaten paa Midten er $\frac{1}{8} p l^2$. Da M_0 er positiv, M_a og M_b negative, faas M_x som en Differens; M_x -Fladen er skraveret i Fig. 74. Q_0 -Kurven er en ret Linie, der af Understøtningsvertikalerne afskærer Stykkerne $\pm \frac{1}{2} pl$; de positive Ordinator ere i Fig. 74 afsatte nedad. Stykket $\frac{M_a - M_b}{l} = m$ er i Fig. 74 aabenbart positivt, da

M_a og M_b ere negative og M_b numerisk større end M_a ; den resulterende Q_x -Flade er skraveret i Figuren. Nulpunktet for Q_x -Kurven skal ligge lodret under Maximumspunktet for M_x -Kurven.

§ 30. En i to Punkter simpelt understøttet Bjælke, der er forlænget ud over Understøtningerne.

Til Kræfterne $P_1 - P_4$ er der i Fig. 75, Pl. 8, tegnet en Tovpolygon, ved hvis Hjælp man som sædvanligt finder Reaktionen A og B ved at indlægge Slutlinien ab og trække den dermed parallelle Straale i Kraftpolygonen. Momentfladen er det skraverede Areal mellem ab og Tovpolygonen; Momentet i Punktet x vil nemlig sige Momentet af Kræfterne A, P_1, P_2, P_3 , og det er lig det Stykke, der afskæres paa Vertikalen gennem Punktet x af Tovpolygonsiden før A (ab) og efter P_3 , multipliceret med Poldistancen. I Figuren er M_x positiv; det har nemlig aabenbart samme Fortegn, som hvis Bjælken ikke var forlænget ud over A og B ; derimod ere Momenterne ved Enderne negative. Momenterne skifte Fortegn i to Punkter, hvilke svare til Vendepunkter for den elastiske Linie. — Transversalkraften Q_x findes som sædvanligt ved i Kraftpolygonen at trække to Straaler parallelle med de af Snittet x overskaarne Tovpolygonsider.

Bjælkeenderne udenfor A og B forholde sig, hvad Momenter og Transversalkræfter angaar, ganske som om de vare indspændte ved A og B (sammenlign den grafiske Momentbestemmelse i § 25), og paa den Maade behandles de

lettest. Bjælkestykket mellem A og B forholder sig som en simpelt understøttet Bjælke, der ikke er forlænget ud over sine Understøtninger, men til Gengæld i disse Punkter paavirket af to negative Kraftpar af Størrelserne aa' og bb' ; den skraverede Momentflade er nemlig Differensen mellem den »simple« Momentflade med Slutlinien $a'b'$ (Fladen mellem $a'b'$ og Tovpolygonen) og Trapezet $aa'b'b$. Denne Betragtningssmaade gælder almindeligt for Stykket AB , idet man naturligvis altid kan tænke sig Bjælken skaaren over i A og B , naar man til Gengæld tilføjer Indvirkningerne af Bjælkeenderne paa Stykket AB (Momenterne aa' og bb') som ydre Kræfter; Nedbøjninger og Tangentvinkler for Punkter mellem A og B kunne altsaa ogsaa findes herved.

Hvis Bjælken over hele sin Længde er paavirket af en ensformig Belastning p pr. Længdeenhed, faas de i Fig. 76, Pl. 8, viste Transversalkraft- og Momentkurver. Paa Stykket AC ere Momenterne fremstillede ved en Parabel, der har Toppunkt i C'' og afskærer Stykket $\div \frac{1}{2} pl_1^2 = A''a$ paa Vertikalen gennem A (se § 27); ligeledes er $D''b$ en Parabel med Toppunkt i D'' , og $B''b = \div \frac{1}{2} pl_2^2$. For Stykket AB angiver Parablen gennem A'' og B'' og med Ordinaten paa Midten lig $\frac{1}{3} pl^2$ de Momenter, der vilde optræde, hvis Bjælken var skaaren over i A og B , og herfra trækkes Trapezet $A''abB''$, der angiver Momenterne fra de negative Kraftpar $M_a = -\frac{1}{2} pl_1^2$ og $M_b = -\frac{1}{2} pl_2^2$. Transversalkræfterne ere afsatte som Ordinatorer ud fra Axen $A'B'$, positive nedad. For Stykket AC faas den rette Linie $C'A_1$, idet $A'A_1 = \frac{1}{2} pl_1$ (§ 27), for Stykket BD den rette Linie $D'B_1$, idet $B'B_1 = -\frac{1}{2} pl_2$. For Stykket AB fremstilles Q_0 ved den punkterede Linie $A'_2B'_2$, idet $A'A'_2 = -\frac{1}{2} pl$, $B'B'_2 = +\frac{1}{2} pl$. Til Q_0 skal lægges det konstante Stykke $A'_2A_2 = B'_2B_2 = \frac{M_a - M_b}{l}$, og idet M_a og M_b ere negative og M_a numerisk større end M_b , bliver denne Størrelse negativ og skal altsaa afsættes opad fra $A'_2B'_2$. De resulterende Moment- og Transversalkraftkurver ere skraverede.

Af Transversalkraftkurven aflæses direkte Reaktionernes Størrelser:

$$A = A_1A_2, \quad B = B_1B_2.$$

Reaktionen A er nemlig Differensen mellem Transversalkraften umiddelbart til venstre og umiddelbart til højre for

Understøtningspunktet, og da disse have modsat Fortegn, bliver Reaktionen den numeriske Sum af dem.

Opg. 12. Tegn Moment- og Transversalkraftkurverne for en Bjælke som ovenfor, belastet med p pr. Længdeenhed og med Enkeltkræfterne P_1 og P_2 i de frie Ender.

Opg. 13. Bestem Dimensionerne af en lodret Træbjælke med kvadratisk Tværslit, naar den er simpelt understøttet i sit nederste Endepunkt og i et Punkt, der ligger 2^m højere oppe, medens hele Længden er 3^m , og naar den er paavirket til Bøjning af Vandtrykket paa en $0,9^m$ bred lodret Flade af Bjælkens Længde. Vandets Overflade befinder sig ved Bjælkens øverste Endepunkt. Tilladelig Paavirkning = 60 kg./cm.^2 .

Den elastiske Linie kan ligesom tidligere konstrueres som Tovpolygon til Momentfladen som Belastning; kun maa man her erindre, at Momentfladens Areal skal regnes med Fortegn. Efterat den elastiske Tovpolygon er tegnet, indlægges Slutlinien, hvorfra Nedbøjningerne skulle maales (den ubøjede Bjælkeaxe), derved at Nedbøjningerne i A og B ere Nul. Heraf følger, som vi skulle se i næste Paragraf, at Nedbøjningerne kunne beregnes som Momenter i en ved C og D indspændt Bjælke, der er forsynet med Charnierer ved A og B og belastet med Momentfladen (et Charnier er en Forbindelse, der ingen Modstand gør mod en Drejning, medens derimod en Forskydning af de forbundne Dele i Forhold til hinanden er umulig. Der kan derfor kun overføres Transversalkræfter, men intet Moment gennem et Charnier. I Fig. 77, Pl. 8, er den beskrevne Bjælke skematisk fremstillet paa to Maader; øverst er Forbindelsen nærmest tænkt som et Passercharnier, nederst som en simpel Understøtning, der blot ikke er anbragt paa et fast Underlag, men paa den ene af de i Charnieret sammenstødende Bjælkeender. Et Charniers Virkemaade er for Momenternes og Transversalkræfternes Vedkommende ganske den samme som en simpel Understøtning).

Naturligvis kan man ogsaa her opskrive Differentialligningen for den neutrale Linie og finde Nedbøjningerne ved Integration.

§ 31. Statisk ubestemte Bjælker over én Aabning.

1. For en Bjælke, der er indspændt i begge Ender og paavirket af parallelle Kræfter, bestaar hver af Reaktionerne af en Enkeltkraft og et Kraftpar. Der haves saaledes ialt fire ubekendte, medens man kun har to statiske Ligevægtsbetingelser

(12); de to manglende Betingelser faas først ved at tage Hensyn til Formforandringerne. Opgaven kan løses paa flere Maader.

a. *Direkte Benyttelse af den elastiske Linies Differential-ligning* skal kun vises ved et Exempel. *Belastningen antages ensformig fordelt, p pr. Længdeenhed* (Fig. 78, Pl. 8); vi ville foreløbig ikke gøre Brug af Symmetrien. Idet de ubekendte Momenter i Understøtningspunkterne kaldes M_a og M_b , blive de statiske Ligevægtsbetingelser:

$$A + B + pl = 0,$$

$$M_a - M_b - Al - \frac{1}{2} pl^2 = 0.$$

Momentet i Punktet x er:

$$M_x = M_a - Ax - \frac{1}{2} px^2 = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Ved Integration findes:

$$-EI \frac{dy}{dx} = M_a x - \frac{1}{2} Ax^2 - \frac{1}{6} px^3 + C,$$

$$-EI y = \frac{1}{2} M_a x^2 - \frac{1}{6} Ax^3 - \frac{1}{24} px^4 + Cx + C_1.$$

Nu haves til Bestemmelse af de to Konstanter og de fire ubekendte ved Understøtningerne dels de to Ligevægtsbetingelser ovenfor, dels at $x = 0$ skal give $y = 0$ og $\frac{dy}{dx} = 0$, $x = l$ ligeledes. Ved at sætte $x = 0$ findes $C = 0$ og $C_1 = 0$, hvorefter $x = l$ giver:

$$M_a l - \frac{1}{2} Al^2 - \frac{1}{6} pl^3 = 0,$$

$$\frac{1}{2} M_a l^2 - \frac{1}{6} Al^3 - \frac{1}{24} pl^4 = 0.$$

Heraf findes:

$$A = -\frac{1}{2} pl, \quad M_a = -\frac{1}{12} pl^2,$$

og de to Ligevægtsbetingelser ovenfor give da endelig:

$$B = -\frac{1}{2} pl = A, \quad M_b = -\frac{1}{12} pl^2 = M_a.$$

Beregningen kunde have været simplificeret i høj Grad ved at gøre Brug af Symmetrien, hvorved man strax har

$A = B$, $M_a = M_b$. — Nu have Momentet i det vilkaarlige Punkt:

$$M_x = -\frac{1}{12}pl^3 + \frac{1}{2}plx - \frac{1}{2}px^2,$$

og Transversalkraften:

$$Q_x = A + px = -\frac{1}{2}pl + px;$$

de grafiske Fremstillinger skulle vi senere komme ind paa. Nedbøjningerne findes ligefrem ved Indsættelse af den specielle Værdi af x i den neutrale Linies Ligning.

Naar Belastningen bestaar af Enkeltkræfter, bliver Methoden betydelig mere besværlig, idet Momentet bliver udtrykt som en diskontinuert Funktion af x , hvorfor Integrationen maa deles. Man begynder f. Ex. Beregningen nærmest ved A , foretager Integrationen for Stykket hen til den første Enkeltkraft og bestemmer de to indkomne Konstanter ved Hjælp af Understøtningen A . Dernæst tager man det næste Stykke og bestemmer her Integrationskonstanterne ved den Betingelse, at den neutrale Linie for $x = x_1$ (den første Enkeltkrafts Angrebepunkt) skal have samme y og $\frac{dy}{dx}$ til begge Sider. Paa den Maade gaar man efterhaanden videre, indtil man har faaet Integrationskonstanterne bestemt for det sidste Stykke af Bjælken, og saa har man endelig Betingelserne fra Understøtningen B til Bestemmelse af A og M_a .

Opg. 14. Bestem efter denne Methode største Moment og Nedbøjningen i Midten for en i begge Ender indspændt Bjælke, der er paavirket af en Enkeltkraft P i Midten.

b. Man behandler Bjælken, som om den var simpelt understøttet i begge Ender og foruden af den givne lodrette Belastning paavirket af to foreløbig ubekendte Kraftpar, M_a og M_b , ved Understøtningerne. Hvis den lodrette Belastning virkede alene, vilde den frembringe visse Drejninger α'_a og α'_b af Tangenterne i Understøtningspunkterne; ligeledes vilde Kraftparrene alene bevirke Drejningerne α_a og α_b , og da Tangenterne paa Grund af Indspændingerne skulle beholde deres Stilling uforandret, maa man have

$$\alpha_a = -\alpha'_a, \quad \alpha_b = -\alpha'_b,$$

hvorved M_a og M_b kunne bestemmes.

α_a og α_b ere ved Ligning (26), § 29, udtrykte som Funktioner af M_a og M_b . α'_a og α'_b bestemmes ved at betragte den »simple« Momentflade (d. v. s. den, man faar ved at lade den givne lodrette Belastning virke alene paa en simpelt understøttet Bjælke) som Belastning paa Bjælken og bestemme Reaktionen. Man har almindeligt (Fig. 79, Pl. 8), hvis F betegner Arealet af den simple Momentflade, ξ og ξ' dens Tyngdepunkts Afstande fra Understøtningerne:

$$\alpha'_a = \frac{F \cdot \xi'}{EI \cdot l}, \quad \alpha'_b = \frac{F \cdot \xi}{EI \cdot l}.$$

Naar man paa denne Maade har faaet M_a og M_b bestemt, kunne Momenter, Transversalkræfter, Nedbøjninger o. s. v. let beregnes ved Hjælp af § 29; nu har man nemlig en simpelt understøttet Bjælke, der er paavirket dels af en given lodret Belastning, dels af to *bekendte* Kraftpar, M_a og M_b , og man summerer da ligefrem de fra hver af disse to Belastningsarter hidrørende Virkninger. Momenter og Transversalkræfter ere givne ved Formlerne (28) og (29).

Specielt bemærkes, at man faar den grafiske Fremstilling af Momenterne i de forskellige Punkter ved blot (Fig. 79) at afsætte $M_a = Aa$, $M_b = Bb$ og maale fra Slutlinien ab til den simple Momentkurve. Det er klart, at Opgaven i Virkeligheden er løst, saasnart man har faaet denne Slutlinie ab bestemt. Ovenfor have vi vist, hvorledes man direkte kan beregne Ordinaterne Aa og Bb , men en hvilken som helst anden Bestemmelse af ab er naturligvis lige saa god. Ved en Omformning af Ligningerne $\alpha_a = -\alpha'_a$ og $\alpha_b = -\alpha'_b$ kan man ulede en simpel geometrisk Egenskab ved Momentfladen i Fig. 79. α_a er (§ 29) lig Reaktionen A (divideret med EI), naar Bjælken AB belastes med Trapezet $Aabb$. Kaldes dettes Areal F_1 og dets Tyngdepunkts Afstande fra Understøtningerne ξ_1 og ξ'_1 , haves:

$$\alpha_a = \frac{F_1 \cdot \xi'_1}{EI \cdot l}, \quad \alpha_b = \frac{F_1 \cdot \xi_1}{EI \cdot l};$$

af $\alpha_a = -\alpha'_a$ og den analoge følger nu (uden Hensyn til Fortegnet):

$$F \cdot \xi' = F_1 \cdot \xi'_1 \text{ og } F \cdot \xi = F_1 \cdot \xi_1,$$

hvoraf ved Addition, idet $\xi + \xi' = \xi_1 + \xi'_1 = l$:

$$F = F_1, \quad \xi = \xi_1.$$

Slutlinien *ab* skal altsaa indlægges saaledes, at Trapezet *AabB* og den simple Momentflade faa samme Areal, og saaledes at deres Tyngdepunkter ligge i samme lodrette Linie. I specielle Tilfælde, f. Ex. hvor der er Symmetri, kan denne Egenskab ofte anvendes med Fordel; en almindelig geometrisk Konstruktion, der i Virkeligheden løber ud paa det samme, skulle vi se nedenfor.

En anden simpel Konstruktion af Slutlinien *ab* faas paa følgende Maade:

Udtrykkene for α_a og α_b [Ligning (26)] kunne skrives:

$$-\alpha_a = \frac{l}{2EI} \left(-\frac{2}{3} M_a - \frac{1}{3} M_b \right) = \frac{l}{2EI} \cdot r$$

og
$$-\alpha_b = \frac{l}{2EI} \left(-\frac{1}{3} M_a - \frac{2}{3} M_b \right) = \frac{l}{2EI} \cdot r',$$

idet r og r' ere Ordinater til Slutlinien *ab* i de Punkter, der dele Længden *AB* i tre lige store Dele (Fig. 79).

Af Betingelsen $\alpha_a = -\alpha'_a$ og den analoge følger nu:

$$r = \frac{F \cdot \xi'}{\frac{1}{2} l^2}, \quad r' = \frac{F \cdot \xi}{\frac{1}{2} l^2}.$$

Størrelsen r betyder altsaa Højden i det Rektangel med Grundlinie l , der har samme Moment med Hensyn til Understøtningen *B* som den simple Momentflade; Betydningen af r' er analog hermed.

Hvis man kendte eller paa en eller anden simpel Maade kunde bestemme de Punkter, hvor Slutlinien *ab* skærer den simple Momentkurve og Momentet altsaa er Nul, vilde Opgaven være løst derved. Dette er Tilfældet for den i Slutningen af forrige Paragraf omtalte, i Fig. 77 fremstillede Bjælke, hvor der er indskudt to Charnierer, i hvilke Momentet ifølge den givne Definition af et Charnier er Nul. Slutlinien gaar da gennem de Punkter, hvor lodrette Linier gennem Charniererne skære den simple Momentkurve, og den indlægges ganske paa samme Maade som Slutlinien for den elastiske Tovpolygon for en simpelt understøttet Bjælke, der

er forlænget ud over sine Understøtninger (§ 30). Herved er der ikke for den indspændte Bjælke med to Charnierer gjort Brug af nogen Betingelse hentet fra Formforandringerne; denne Bjælke er altsaa statisk bestemt. Den kan naturligvis ogsaa betragtes og behandles som sammensat af tre statisk bestemte Bjælker, nemlig en simpelt understøttet i Midten og en i den ene Ende indspændt ved hver Side.

Naar man har bestemt Momentkurven for den i A og B indspændte Bjælke, kunne Nedbøjningerne naturligvis findes ved at tegne en Tovpolygon til Momentfladen som Belastning. Slutlinien for Tovpolygonen — den ubøjede Bjælkeaxe — kan f. Ex. indlægges derved, at Nedbøjningerne i A og B ere Nul; heraf følger, at man kan *beregne* Nedbøjningerne som Momenter i en *simpelt understøttet* Bjælke AB , belastet med Momentfladen. Naar Slutlinien indlægges som her angivet, skal det passe, at den af sig selv tangerer Tovpolygonen i A og B . Man kunde ogsaa indlægge Slutlinien ved Hjælp af den Betingelse, at Nedbøjningen i A er Nul, og at Tangenten her beholder sin Retning, hvorefter følger, at man ogsaa kan *beregne* Nedbøjningerne som Momenter i en *i B indspændt* Bjælke, belastet med Momentfladen. Ved disse Konstruktioner maa man erindre, at Momenterne skifte Fortegn.

Vi skulle nu se paa et Par Eksempler paa Behandlingen af indspændte Bjælker efter den her fremsatte Methode. *Belastningen bestaar af en Enkeltkraft P i Afstandene a og b fra Understøtningerne ($a + b = l$).* Den simple Momentflade er da (§ 28, 1, Fig. 67) en Trekant med Højde $\frac{Pab}{l}$. Arealet af den simple Momentflade F er lig $\frac{1}{2} Pab$, dens Tyngdepunkts Afstand fra A er $\frac{1}{3}(l + a)$, fra B : $\frac{1}{3}(l + b)$. Ligningerne $\alpha_a = -\alpha'_a$ og den analoge blive (med Bortkastelse af EI i Nævneren):

$$\frac{1}{2} Pab \cdot \frac{l + b}{3l} = -\frac{l}{6} (2M_a + M_b),$$

$$\frac{1}{2} Pab \cdot \frac{l + a}{3l} = -\frac{l}{6} (M_a + 2M_b),$$

hvoraf findes:

$$M_a = -P \cdot \frac{a^2 b}{l^2}, \quad M_b = -P \cdot \frac{ab^2}{l^2}.$$

Nu ere Transversalkræfter og Momenter givne ved (28) og (29); for den simpelt understøttede Bjælke er Transversalkraften til venstre for P lig Reaktionen A , altsaa for dette Stykke af Bjælken:

$$Q_0 = -P \frac{b}{l},$$

og følgelig for den indspændte Bjælke til venstre for P :

$$\begin{aligned} Q_x &= Q_0 + \frac{M_a - M_b}{l} = -\frac{Pb}{l} - \frac{Pa^2b}{l^3} + \frac{Pab^2}{l^3} \\ &= -P \frac{b}{l} \left(1 + \frac{a^2}{l^2} - \frac{ab}{l^2} \right). \end{aligned}$$

Hvis Kraften P specielt virker i Midten ($a = b = \frac{1}{2}l$), faas:

$$M_a = M_b = -\frac{1}{8}Pl;$$

i saa Fald er $M_a - M_b = 0$, saa Transversalkraften bliver den samme som i en simpelt understøttet Bjælke med en Enkeltkraft paa Midten, Reaktionen A og B ligeledes. Den simple Momentflade er en Trekant med Højde $\frac{1}{4}Pl$; i den indspændte Bjælke bliver Momentet i Midtpunktet lig $\frac{1}{4}Pl - \frac{1}{8}Pl = +\frac{1}{8}Pl$, altsaa numerisk lig Indspændingsmomenterne; man har samtidig største Moment i 3 Punkter,

$$M_{\max.} = \pm \frac{1}{8}Pl,$$

Slutlinien halverer den simple Momentflades største Ordinat, hvilket ogsaa umiddelbart følger af, at den simple Momentflades Areal skal være lig Arealet af det Rektangel, hvis Højde er $M_a = M_b$. Momentet er Nul for $x = \frac{1}{4}l$ og $x = \frac{3}{4}l$; her har den neutrale Linie altsaa Vendepunkter.

Nedbøjningerne findes ved at betragte først P alene og dernæst Kraftparrene M_a og M_b alene som Belastning paa den simpelt understøttede Bjælke og addere. Vi ville f. Ex. finde den største Nedbøjning (i Midten). P alene giver (§ 28, 1):

$$y_{\max.} = \frac{Pl^3}{48EI};$$

Nedbøjningen fra Kraftparrene bestemmes som Moment af Rektanglet med Højde M_a , altsaa som Moment af den ensformige Belastning $p = M_a$; dette giver:

$$y_{\max.} = \frac{M_a l^2}{8EI} = -\frac{Pl^3}{64EI},$$

hvorefter man for den indspændte Bjælke finder:

$$y_{\max} = \frac{Pl^3}{EI} \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{64} \right) = \frac{Pl^3}{192EI}.$$

Belastningen er ensformig fordelt, p pr. Længdeenhed. Paa Grund af Symmetrien bliver $M_a = M_b$, Slutlinien ab for Momentkurven altsaa vandret; den kan da bestemmes alene ved den Betingelse, at Arealet af den simple Momentflade skal være lig Arealet af Rektanglet med Højde M_a . Den simple Momentflade er en Parabel, hvis Ordinat paa Midten er $\frac{1}{8}pl^2$, og Parabelsegmentets Areal er $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}pl^2 \cdot l$; man har altsaa:

$$M_a \cdot l = -\frac{1}{12}pl^3, \quad M_a = -\frac{1}{12}pl^2.$$

Reaktioner og Transversalkræfter ere de samme som for en simpelt understøttet Bjælke. Den grafiske Fremstilling af Momenterne ses i Fig. 80, Pl. 8. Nedbøjningen ved Midten findes paa samme Maade som ovenfor; ved Hjælp af det for den simpelt understøttede Bjælke gældende Udtryk (§ 28, 2) faas altsaa:

$$y_{\max.} = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{EI} + \frac{M_a l^2}{8EI} = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{EI} - \frac{1}{96} \frac{pl^4}{EI} = \frac{pl^4}{384EI}.$$

Man vil lægge Mærke til, at Momenterne i en indspændt Bjælke altid ere numerisk mindre end i en simpelt understøttet, saa at Dimensionerne altsaa kunne gøres spinklere for samme Belastning. Det gunstigste Tilfælde faas aabenbart, naar Slutlinien ab for Momentkurven er vandret og halverer Maximumsordinaten i den simple Momentflade; da ville de største Momenter optræde samtidigt i tre Punkter, og tillige blive saa smaa som muligt. Vi saa ovenfor, at dette Tilfælde indtraf, naar Belastningen var en Enkeltkraft i Midten, derimod ikke for en ensformig Belastning.

Hvis man tænker sig en simpelt understøttet Bjælke med ensformig Belastning og lader et Par lige store negative Kraftpar virke paa den i Understøtningspunkterne, idet de begynde med Værdien Nul og voxe jævnt, saa vil der til hver Størrelse af Kraftparrene svare en bestemt Beliggenhed af Slutlinien ab og ligeledes en bestemt Tangentvinkel ved

Understøtningerne. Man kan nu udvide Begrebet Indspænding saaledes, at det ganske vist medfører den Betingelse, at Tangenten skal holde sig i en bestemt Stilling, men ikke nødvendigvis i den vandrette Stilling; man kan altsaa tale om Indspænding under forskellige Vinkler. Naar Indspændingsvinklerne ere givne at skulle være β_a og β_b , har man Betingelsen: $\alpha_a + \alpha'_a = \beta_a$ og den analoge til Bestemmelse af M_a og M_b .

Blandt alle mulige Indspændingsvinkler vil den være den gunstigste, der medfører den mindste Værdi af Maximumsmomentet. Vi ville bestemme *den gunstigste Indspændingsvinkel for en ensformig Belastning*. I dette Tilfælde skal M_a og M_b være lig det halve af Maximumsordinaten til den simple Momentkurve altsaa

$$M_a = M_b = -\frac{1}{16} pl^2.$$

Hertil svarer en Indspændingsvinkel $\beta_a = \alpha_a + \alpha'_a$, hvor (§ 28, 2)

$$\alpha'_a = \frac{pl^3}{24EI}, \quad \alpha_a = \frac{M_a l}{2EI} = -\frac{pl^3}{32EI};$$

altsaa
$$\beta_a = \frac{pl^3}{EI} \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{32} \right) = \frac{pl^3}{96EI}.$$

For at faa en Forestilling om den numeriske Størrelse af β ville vi foretage en Omformning af Udtrykket. Til Bestemmelse af Bjælkens Dimensioner har man [(18 a), § 24]:

$$M_{\max.} = \frac{1}{16} pl^2 = r \cdot W = r \cdot \frac{I}{e},$$

og ved Indførelse heraf findes:

$$\beta_a = \frac{1}{6} \cdot \frac{r \cdot l}{E \cdot e}.$$

Antages Bjælken at være en Jærnbjælke, hvis Tværsnit er symmetrisk om den neutrale Axe, og sættes Bjælkens Højde $2e = \frac{1}{16} l$, hvilket er en af de laveste anvendte Værdier, og endvidere $r = 700 \text{ kg./cm.}^2$, $E = 2000000 \text{ kg./cm.}^2$, findes:

$$\beta_a = \frac{700}{40000} \sim \frac{1}{10}^\circ.$$

Man ser, hvor forsvindende denne Størrelse er, og dog

bevirker en Variation i Indspændingsvinklen fra 0° til $\frac{1}{16}^\circ$ en Variation i Maximumsmomentet fra $\frac{1}{2}pl^2$ til $\frac{1}{8}pl^2$ eller 25% af det til vandret Indspænding svarende. Naturligvis kan man i Praxis sjældent eller aldrig skaffe en Indspænding, der umuliggør en saa ubetydelig Variation i Vinklen, saa man maa være overordentlig varsom med at regne en Bjælke indspændt og af den Grund gøre den svagere.

Opg. 15. Bestem største Moment og Nedbøjningen i Midten for en i begge Ender indspændt Bjælke, der er paavirket af to lige store Kræfter P , virkende lige langt fra Understøtningerne.

c. *Direkte Benyttelse af den elastiske Tovpolygon* *). Hvis man ved Konstruktionen af den elastiske Tovpolygon kun bryder sig om at finde Tangenterne i Understøtningspunkterne, kan man, som vi have set i Slutningen af § 26, foretage Inddelingen af Momentfladen ganske vilkaarligt. Vi ville her, ligesom ovenfor, opfatte den som Differens mellem den simple Momentflade med Areal F og det af M_a og M_b bestemte Trapez, og dette sidste tænke vi os atter delt i to Trekanter med Arealerne: $\frac{1}{2}M_al$ og $\frac{1}{2}M_b l$. Arealerne tænke vi os virkende som Kræfter i de lodrette Linier gennem Tyngdepunkterne; de lodrette gennem Trekanternes Tyngdepunkter dele Bjælkens Længde l i tre lige store Dele; de kaldes »Trediedelsvertikalerne« og ere bekendte forud, skønt M_a og M_b ikke kendes, $AT_1 = T_1T_2 = T_2B$, Fig. 81, Pl. 8. Tyngdepunktet T for den simple Momentflade kan konstrueres og regnes her som bekendt.

Hvis man nu tegner en Tovpolygon (den stærkt optrukne i Fig. 81) med Poldistance $h = EI$ til de tre Kræfter, skal dennes yderste Sider angive Stillingen af Tangenterne til den elastiske Linie i Understøtningspunkterne; disse yderste Sider skulle da her være vandrette og falde i hinandens Forlængelse. Ved Hjælp heraf kan man konstruere Tovpolygonen, skønt M_a og M_b ikke kendes. Man begynder med at afsætte den simple Momentflades Areal $F = CC_1$ paa en lodret Linie i Afstanden h fra Vertikalen gennem T , vælger et vilkaarligt Punkt O i denne som Pol, trækker Straalerne OC og OC_1 og

*) Methoden angivet af Mohr, 1868, senere videre udviklet af Culmann, W. Ritter, Winkler o. a.; se bl. a. Winkler: *Theorie der Brücken*, I. 3te Aufl., Wien, 1886; W. Ritter: *Die elastische Linie* etc. 2te Aufl., Zürich, 1883.

finder det Stykke cc_1 , der afskæres af disse paa Vertikalen gennem T_1 . cc_1 er da lig det Stykke $T_1'T_1''$, som de to midterste Tovpolygonsider afskære paa Vertikalen gennem T_1 ; ligeledes er $dd_1 = T_2'T_2''$. Tovpolygonen kan følgelig konstrueres ved at trække Siderne $A'T_1'$ og $B'T_2'$ og afsætte $T_1'T_1'' = cc_1$ og $T_2'T_2'' = dd_1$, hvorefter de to midterste Sider kunne indlægges. Og naar Tovpolygonen er bekendt, kan Størrelsen af Kræfterne i T_1 og T_2 bestemmes henne i Kraftpolygonen: først findes den rigtige Beliggenhed O_1 af Polen, hvorefter den vandrette Straale O_1D viser, at Kraften i T_1 er DC , i T_2 : C_1D . Linierne OC og OC_1 kaldes *Krydslinierne*.

Da hele Konstruktionen kun udføres for at bestemme Kræfterne i T_1 og T_2 , er Poldistancens Størrelse ligegyldig; ligeledes er naturligvis Maalestokken, hvorefter $F = CC_1$ afsættes, ligegyldig, naar blot C_1D , DC og CC_1 maales paa samme Maalestok. Den simpleste Konstruktion faas, naar man vælger Poldistancen $h = \frac{1}{6}l$ og afsætter $CC_1 = \frac{F}{l}$; i saa Fald bliver:

$$DC = \frac{\frac{1}{2}M_a l}{l} = \frac{1}{2}M_a, \quad C_1D = \frac{1}{2}M_b,$$

og ved at forlænge de midterste Tovpolygonsider til Skæring med Understøtningsvertikalerne i A'' og B'' faas, idet $\triangle T_1'A'A'' \sim \triangle O_1DC$:

$$A'A'' = A'T_1' \cdot \frac{DC}{O_1D} = \frac{1}{2}l \cdot \frac{\frac{1}{2}M_a}{\frac{1}{6}l} = M_a,$$

og paa samme Maade: $B'B'' = M_b$. For saaledes umiddelbart at finde M_a og M_b efter den oprindelige Momentmaalestok (for den simple Momentflade) skal man blot afsætte $CC_1 = \frac{F}{l} =$ Højden i det Rektangel med Grundlinie l , der har samme Areal som den simple Momentflade, efter den oprindelige Momentmaalestok.

Konstruktionen er nu følgende: man tegner Trediedelsvertikalerne samt Vertikalen gennem T , trækker en vandret Linie $A'T_1'T_2B'$, afsætter $CC_1 = \frac{F}{l}$ paa en lodret Linie i Afstanden $\frac{1}{6}l$ fra Vertikalen gennem T , vælger et vilkaarligt Punkt O i sidstnævnte Vertikal og bestemmer de Stykker cc_1 og dd_1 , som

Krydslinierne OC og OC_1 afskære paa Trediedelsvertikalerne: cc_1 og dd_1 afsættes nedad fra Punkterne T_1' og T_2' , hvorefter Linierne $T_1'T_2''$ og $T_2'T_1''$ give Punkterne A'' og B'' , saaledes at $A'A'' = M_a$, $B'B'' = M_b$.

Da baade Kraft- og Tovpolygon lukke sig, ere de tre Kræfter i T , T_1 og T_2 i Ligevægt, hvoraf følger, at det af M_a og M_b bestemte Trapez og den simple Momentflade have samme Areal og have deres Tyngdepunkter liggende i samme lodrette Linie, saaledes som vi ogsaa have set ovenfor. Hele Konstruktionen kan ogsaa udtydes som gaaende ud paa at bestemme en Slutlinie, der opfylder disse to Betingelser.

2. *Bjælken er indspændt i den ene Ende, simpelt understøttet i den anden.* Her er der 3 ubekendte ved Understøtningerne, altsaa kun én mere, end der kan bestemmes ved de statiske Ligevægtsbetingelser. Det kan opfattes som et specielt Tilfælde af den ovenfor behandlede Bjælke, idet $M_b = 0$, og man kan benytte ganske de samme Metoder som ovenfor. Vi skulle vise dette ved et Par Exempler.

a. *Direkte Benyttelse af den elastiske Linies Differentialligning.* Der virker kun en Enkeltkraft P i Midten (Fig. 82, Pl. 8). De statiske Ligevægtsbetingelser ere:

$$A + B + P = 0,$$

$$M_a - Al - \frac{1}{2} Pl = 0.$$

Momentet i Punktet x mellem A og P er:

$$M_x = M_a - Ax = -EI \frac{d^2y}{dx^2};$$

ved Integration findes:

$$-EI \frac{dy}{dx} = M_a \cdot x - \frac{1}{2} Ax^2 + C,$$

$$-EI y = \frac{1}{2} M_a x^2 - \frac{1}{6} Ax^3 + Cx + C_1.$$

Da $x = 0$ skal give $y = 0$ og $\frac{dy}{dx} = 0$, faas $C = C_1 = 0$.

For $x > \frac{1}{2} l$ haves:

$$M_x = M_a - Ax - P(x - \frac{1}{2} l) = -EI \frac{d^2y}{dx^2},$$

hvoraf $-EI \frac{dy}{dx} = M_a x - \frac{1}{2} A x^2 - \frac{1}{2} P x^2 + \frac{1}{2} P l x + C,$

$$-EI y = \frac{1}{2} M_a x^2 - \frac{1}{6} A x^3 - \frac{1}{6} P x^3 + \frac{1}{4} P l x^2 + C x + C_1.$$

Konstanterne bestemmes derved, at $x = \frac{1}{2} l$ skal give samme Værdier af y og $\frac{dy}{dx}$ til begge Sider af P ; derved findes;

$$\frac{1}{2} M_a l - \frac{1}{6} A l^2 = \frac{1}{2} M_a l - \frac{1}{6} A l^2 - \frac{1}{6} P l^2 + \frac{1}{4} P l^2 + C,$$

$$\frac{1}{6} M_a l^2 - \frac{1}{48} A l^3 = \frac{1}{6} M_a l^2 - \frac{1}{48} A l^3 - \frac{1}{48} P l^3 + \frac{1}{16} P l^3 + \frac{1}{2} C l + C_1;$$

$$C = -\frac{1}{6} P l^2, C_1 = +\frac{1}{48} P l^3.$$

Nu skal Ligningen for den neutrale Linie paa Stykket $P-B$ for $x = l$ give $y = 0$, hvorved findes:

$$\frac{1}{2} M_a l^2 - \frac{1}{6} A l^3 - \frac{1}{48} P l^3 = 0,$$

og heraf i Forbindelse med de statiske Ligevægtsbetingelser ovenfor:

$$A = -\frac{11}{16} P, B = -\frac{5}{16} P, M_a = -\frac{3}{16} P l.$$

Momentkurven er vist i Fig. 82; Momentet i Midten er

$$\frac{1}{4} P l - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16} P l = \frac{5}{32} P l;$$

største Moment er

$$M_{\max.} = M_a = -\frac{3}{16} P l.$$

Transversalkraften paa Stykket $A-P$ er lig $-\frac{11}{16} P$, paa Stykket $P-B$ er den $+\frac{5}{16} P$.

Nedbøjningerne findes ligefrem af Ligningerne for den neutrale Linie; i Midten have

$$y = \frac{7}{768} \frac{P l^3}{EI}.$$

Punktet med den største Nedbøjning bestemmes ved at sætte $\frac{dy}{dx} = 0$; for Stykket $A-P$ kan denne Betingelse ikke tilfredsstilles, for Stykket $P-B$ findes Punktets Abscisse:

$$x = l(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}),$$

og Nedbøjningen:

$$y_{\max} = \frac{Pl^3}{48 \cdot \sqrt{5} \cdot EI}.$$

Opg. 16. Bestem største Moment for en lodret Bjælke, der er indspændt i sin nederste Ende, A, og simpelt understøttet i B, naar Belastningen er Vandtryk. Vandets Overflade staar ved A.

b. Bjælken behandles som simpelt understøttet i begge Ender og paavirket foruden af den givne lodrette Belastning af et foreløbig ubekendt Kraftpar M_a ved Understøtningen A ($M_b = 0$). Man har da med de tidligere brugte Betegnelser: $\alpha_a = -\alpha'_a$, hvor

$$\alpha'_a = \frac{F \cdot \xi'}{EI \cdot l}.$$

(F er den simple Momentflades Areal, ξ' dens Tyngdepunkts Afstand fra B). α_a findes ved at sætte $M_b = 0$ i (26), altsaa:

$$\alpha_a = \frac{M_a l}{3EI},$$

hvorefter man til Bestemmelse af M_a har:

$$M_a = -3 \frac{F \cdot \xi'}{l^2}.$$

Belastningen er ensformig fordelt, p pr. Længdeenhed. Den simple Momentkurve er en Parabel med største Ordinat $\frac{1}{3} pl^2$. Man har altsaa:

$$F = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} pl^2 \cdot l = \frac{1}{3} pl^3, \quad \xi' = \frac{1}{2} l,$$

$$M_a = -\frac{1}{3} pl^2.$$

Nu ere Transversalkræfter og Momenter givne ved (28) og (29); den grafiske Fremstilling af disse Størrelser findes i Fig. 83, Pl. 9). Ved (28) findes:

$$Q_x = Q_0 - \frac{1}{3} pl,$$

hvoraf atter følger:

$$A = -\frac{5}{8} pl, \quad B = -\frac{3}{8} pl.$$

Transversalkraften er Nul i Punktet C, der ligger $\frac{1}{3} l$ fra Bjælkens Midte; her findes altsaa et Maximumpunkt for Momentkurven. Momentet i C er:

$$M_c = \frac{1}{128} pl^3 - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{8} pl^3 = \frac{9}{128} pl^3,$$

$$M_{\max.} = M_a = \frac{1}{8} pl^3.$$

Nedbøjningerne findes som Sum af dem, der bevirkes af den ensformige Belastning, naar den virker alene paa den simpelt understøttede Bjælke AB , og af Momentet M_a alene. I Midten findes f. Ex.:

$$y = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{EI} + \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} M_a l \cdot \frac{1}{2} l - \frac{1}{8} M_a l \cdot \frac{1}{8} l \right] = \frac{1}{192} \frac{pl^4}{EI}.$$

Det Punkt, hvor største Nedbøjning optræder, kan bestemmes ved at finde, hvor Transversalkraften i Bjælken AB er Nul, naar den er belastet med Momentfladen.

Opg. 17. Find Momenter, Transversalkræfter o. s. v. i en Bjælke, der er indspændt i den ene Ende, simpelt understøttet i den anden og belastet med en Enkeltkraft P i Afstanden a fra Indspændingen.

Opg. 18. Find Momenter, Transversalkræfter o. s. v. i en Bjælke, der er indspændt i A , simpelt understøttet i B og forlænget ud over B , naar Belastningen er p pr. Længdeenhed.

Opg. 19. Samme Bjælke og samme Belastning som i foregaaende Opgave, blot virker der tillige en Enkeltkraft P i den frie Ende.

Opg. 20. Samme Bjælke som i Opg. 18, naar den er paavirket af en Trekantbelastning med Belastningsordinat Nul i den frie Ende.

c. *Direkte Benyttelse af den elastiske Tovpolygon.* Konstruktionen udføres næsten ganske som for den i begge Ender indspændte Bjælke. Den er vist i Fig. 84, Pl. 9, hvor Betegnelserne ere ganske de samme som i Fig. 81. Her falder blot Kraften i T_2 bort, hvorfor de to Tovpolygonsider, der i Fig. 81 stødte sammen i T_2' , her maa falde i Forlængelsen af hinanden. Naar man da har afsat $\frac{F}{l} = CC_1$ paa en lodret

Linie i Afstanden $\frac{1}{3} l$ fra T (i Figuren er $CC_1 = 2 \frac{F}{l}$ og $h = \frac{1}{3} l$) og ved Hjælp af Linierne OC og OC_1 har bestemt $cc_1 = T_1'T_1''$, trækkes Tovpolygonsiden $B'T_1''$, hvorefter den midterste Side $T_1'A''$ afskærer $A'A'' = M_a$.

§ 32. Kontinuerlige Bjælker. Herved forstaas Bjælker, der hvile paa mere end to Understøtninger og derfor ere statisk

ubestemte. Hvis der findes n simple Understøtninger (vi forudsætte i det følgende alle Understøtningerne af den Art), vil der være $n - 2$ ubekendte Størrelser, der kun kunne bestemmes ved at tage Hensyn til Formforandringerne, altsaa lige saa mange ubekendte som der er Mellemunderstøtninger. Tværsnittet forudsættes her konstant.

Beregningen af en saadan Bjælke kan gennemføres analytisk. Man opskriver Momentet i det vilkaarlige Punkt som Funktion af Belastningen, de ubekendte Reaktioner og Abscissen og finder derved Differentialligningen for den neutrale Linie. Denne kommer til at bestaa af forskellige Kurvestykker i de forskellige Fag, — hvis Belastningen bestaar af Enkeltkræfter, faas jo endogsaa en ny Kurve for hver Enkeltkraft, man passerer —. Integrationskonstanterne kunne bestemmes for hvert Fag for sig, idet man ved, at Nedbøjningerne i de to Understøtningspunkter, der begrænse Faget, ere Nul. Dernæst benytter man sig af, at det er en sammenhængende Bjælke, man har med at gøre, hvorefter følger, at Tangenten i et Mellem-Understøtningspunkt skal være den samme Linie, enten Punktet regnes med til Faget før eller efter, og derved faas endelig et netop tilstrækkeligt Antal Betingelser til Bestemmelse af de ubekendte Reaktioner.

Der er i og for sig ingen Vanskeligheder ved den skitserede Beregning, den er blot overmaade vidtløftig. Man kan dog ogsaa komme lettere til Maalet, og dette naas navnlig ved at indføre ikke selve Reaktionerne som de ubekendte, men *Momenterne over Mellemunderstøtningerne*. For det første er det klart, at der optræder Momenter i disse Punkter; hvis Momenterne her vare Nul, vilde dette være ensbetydende med, at Bjælkestykkerne over de forskellige Aabninger slet ikke indvirkede paa hinanden, man vilde med andre Ord have en Række af hinanden uafhængige enkelte Bjælker. Og dernæst er Opgaven, som man let ser, i Virkeligheden løst, hvis man har faaet disse Momenter bestemt; man kan da tænke sig den kontinuerlige Bjælke skaaren over ved alle Mellemunderstøtningerne mod at tilføje Momenterne her som ydre Kræfter, og man faar saaledes en Række enkelte Bjælker, der ere paavirkede dels af den givne Belastning, dels af bekendte Kraftpar ved Understøtningerne, og saadanne Bjælker ere tidligere behandlede (§ 29).

Vi skulle nu vise, hvorledes man kan bestemme disse Momenter. Der indføres følgende Betegnelser:

$$\begin{array}{cccccccc} \text{Understøtningerne:} & 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 & n & n+1 \\ \text{Momenterne her:} & M_0 & M_1 & M_2 & \dots & M_{n-1} & M_n & M_{n+1} \\ \text{Faglængderne:} & & l_1 & l_2 & \dots & & l_n & l_{n+1}. \end{array}$$

Idet vi betragte Mellemunderstøtningen n , skulle vi her benytte, at Tangentvinklen er den samme til begge Sider (med modsat Fortegn), $\alpha'_n = -\alpha_n$ (Fig. 85, Pl. 9). Den Vinkel α'_n , Tangenten har drejet sig i Faget $(n-1) - n$, er Summen af de Drejninger, der bevirkes af den givne Belastning alene, naar den tænkes virkende paa en simpelt understøttet Bjælke af Længde l_n , og af Kraftparrene M_{n-1} og M_n alene, naar de tænkes virkende paa samme Bjælke. Idet vi (Fig. 85) betegne den simple Momentflades Areal med F , dens Tyngdepunkts Afstande fra Understøtningerne med ξ og ξ' (alle Betegnelser forsynede med Fagets Mærke), er den Vinkel, som den givne Belastning alene drejer Tangenten:

$$\frac{F_n \xi_n}{EI \cdot l_n},$$

og den Drejning, som Kraftparrene alene bevirke [(26), § 29]:

$$\frac{l_n}{6EI} (M_{n-1} + 2M_n).$$

Hele Vinklen α'_n bliver altsaa:

$$\alpha'_n = \frac{F_n \xi_n}{EI \cdot l_n} + \frac{l_n}{6EI} (M_{n-1} + 2M_n).$$

Paa samme Maade findes Vinklen α_n , som Tangenten over Understøtningen n har drejet sig i det $(n+1)^{\text{te}}$ Fag, at være:

$$\alpha_n = \frac{F_{n+1} \cdot \xi'_{n+1}}{EI \cdot l_{n+1}} + \frac{l_{n+1}}{6EI} (2M_n + M_{n+1}).$$

Idet vi nu opskrive Ligningen $\alpha'_n = -\alpha_n$, faa vi en Relation mellem de søgte Momenter og lutter bekendte Størrelser. Vi ville imidlertid strax gøre Relationen noget almindeligere.

Ligningerne $\alpha'_n = -\alpha_n$ og de analoge gælde kun, idet vi forudsætte Bjælken retlinet, hvis alle Understøtningspunkter

ligge i en ret Linie; α'_n og α_n betegne nemlig de Vinkler, som Tangenterne efter Drejningen danne med Forbindelseslinierne mellem Understøtningspunkterne. Naar nu disse Forbindelseslinier ikke falde i hinandens Forlængelse, men danne Vinklerne $\beta_n, \beta_{n+1} \dots$ med den vandrette (Fig. 86, Pl. 9), maa man aabenbart skrive:

$$\alpha_n + \beta_{n+1} - \beta_n = -\alpha'_n,$$

og naar man heri indfører de fundne Udtryk for α_n og α'_n og ordner, faas:

$$\begin{aligned} & -M_{n-1} \cdot l_n - 2M_n(l_n + l_{n+1}) - M_{n+1} \cdot l_{n+1} \\ & = 6F_n \cdot \frac{\xi_n}{l_n} + 6F_{n+1} \cdot \frac{\xi'_{n+1}}{l_{n+1}} + 6EI(\beta_{n+1} - \beta_n). \end{aligned} \quad (30).$$

Dette er *Clapeyrons Formel**) i dens almindeligste Form. Venstre Side indeholder de ubekendte Momenter over tre paa hinanden følgende Understøtninger, paa højre Side findes kun bekendte Størrelser, afhængige af Belastningen og Understøtningernes indbyrdes Højdeforhold. Vinklerne β maa naturligvis regnes med Fortegn; i Udviklingen ovenfor have vi regnet dem positive i den Retning, hvori Viserne paa et Uhr dreje sig. Da det i Ligning (30) kun kommer an paa Differensen mellem Vinklerne β_{n+1} og β_n , kan man ligesaa godt regne dem ud fra en vilkaarlig anden Linie som fra den vandrette, f. Ex. fra Forbindelseslinien mellem den $(n-1)^{te}$ og den $(n+1)^{te}$ Understøtning (Fig. 87, Pl. 9). De ville da altid have modsat Fortegn, saa Parenthesen i sidste Led i (30) bliver en numerisk Sum; hvis n^{te} Understøtning ligger *over* Forbindelseslinien mellem $(n-1)^{te}$ og $(n+1)^{te}$, bliver Leddet da *positivt*, hvis den ligger *under* den, *negativt*. Forøvrigt ere Vinklerne saa smaa, at man nøjagtigt nok kan sætte $\beta = \text{tg. } \beta$ og derved i (30) indføre Understøtningernes Højdeforskel (Fig. 87):

$$\beta_n = \frac{\delta_n}{l_n}, \quad \beta_{n+1} = \frac{\delta_n}{l_{n+1}}.$$

*) Almindeligvis angives den at være opstillet først af *Clapeyron* i 1857, dog kun for ensformig Belastning. Ifølge *Résal: Ponts métalliques*, II., S. 48, Paris 1889, er Formlen dog endnu tidligere udviklet af *Bertot*. Den almindelige Form (30) skyldes *Bresse*.

De to første Led paa højre Side i (30) kunne udvikles videre, naar man kender Belastningen. Er denne f. Ex. ensformig fordelt, p_n i Faget l_n , p_{n+1} i Faget l_{n+1} o. s. v., haves:

$$F_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} p_n l_n^3 \cdot l_n = \frac{1}{12} p_n l_n^3, \quad \xi_n = \frac{1}{2} l_n,$$

hvorved Formlen bliver:

$$\begin{aligned} & -M_{n-1} \cdot l_n - 2M_n (l_n + l_{n+1}) - M_{n+1} \cdot l_{n+1} \\ & = \frac{1}{12} p_n l_n^3 + \frac{1}{12} p_{n+1} l_{n+1}^3 + 6EI (\beta_{n+1} - \beta_n). \end{aligned} \quad (30 a).$$

Bestaar Belastningen af en Enkeltkraft i hvert Fag, P_n i Faget l_n o. s. v., vil den simple Momentflade være en Trekant (Fig. 88, Pl. 9) med Højde $P_n \cdot \frac{a_n b_n}{l_n}$, altsaa

$$F_n = \frac{1}{2} P_n a_n b_n, \quad \xi_n = \frac{1}{2} l_n - \frac{1}{3} (\frac{1}{2} l_n - a_n) = \frac{1}{3} (l_n + a_n),$$

og

$$6F_n \frac{\xi_n}{l_n} = P_n \cdot a_n \cdot b_n \frac{l_n + a_n}{l_n}.$$

Virker der i hvert Fag flere Enkeltkræfter, vil hver af dem levere et Bidrag som ovenstaaende til højre Side i Ligningen; man faar da:

$$\begin{aligned} & -M_{n-1} \cdot l_n - 2M_n (l_n + l_{n+1}) - M_{n+1} \cdot l_{n+1} \\ & = \frac{1}{l_n} \sum P_n a_n b_n (l_n + a_n) + \frac{1}{l_{n+1}} \sum P_{n+1} a_{n+1} b_{n+1} (l_{n+1} + b_{n+1}) \\ & \quad + 6EI (\beta_{n+1} - \beta_n). \end{aligned} \quad (30 b).$$

Ved Hjælp af denne Formel kunne for en vilkaarlig given Belastning alle Momenter over Understøtningerne beregnes. Der kan nemlig efter den opskrives en Ligning for hver Mellemunderstøtning, og idet vi antage Momentet over første og sidste Understøtning lig Nul (simple Understøtninger), haves netop det nødvendige og tilstrækkelige Antal Ligninger. Løsningen af Ligningerne kan være et noget besværligt Arbejde, hvis der er mange Understøtninger; der er angivet forskellige Metoder*) til at lette Beregningen, men da kontinuerlige Bjælker i det hele nu spille en mindre Rolle end tidligere,

*) Se f. Ex. Flamant: *Résistance des matériaux*, Paris, 1886.

skulle vi ikke komme nærmere ind herpaa, især da vi nedenfor skulle vise et Par grafiske Løsninger af Problemet.

Naar Momenterne over Understøtningerne ere beregnede, kan man finde Momenterne i alle andre Punkter, Transversalkræfter, Reaktionen o. s. v. ved § 29. For Faget l_n er saaledes Momentet i et Punkt i Afstandene x og $x' = l_n - x$ fra $(n-1)^{\text{te}}$ og n^{te} Understøtning:

$$M_x = M_0 + M_{n-1} \cdot \frac{x'}{l_n} + M_n \cdot \frac{x}{l_n};$$

ligeledes er Transversalkraften i samme Punkt:

$$Q_x = Q_0 + \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n}.$$

for ensformig Belastning, p_n pr. Længdeenhed, er (§ 28):

$$M_0 = \frac{1}{2} p_n (l_n x - x^2), \quad Q_0 = p_n (x - \frac{1}{2} l_n).$$

For den simpelt understøttede Bjælke l_n , paavirket af den givne Belastning og af Kraftparrene M_{n-1} og M_n , ere Reaktionen A_{n-1} og A_n (§ 29):

$$A_{n-1} = A_{n-1,0} + \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n}, \quad A_n = A_{n,0} + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n},$$

og idet den kontinuerlige Bjælkes Tryk paa den n^{te} Understøtning hidrører fra baade n^{te} og $(n+1)^{\text{te}}$ Fag, findes Reaktionen her ved ligefrem at addere to saadanne Udtryk; for første og sidste Understøtning bruges kun et af Udtrykkene. — Ogsaa Nedbøjningerne kunne findes ved at opløse Bjælken i en Række simpelt understøttede og behandle Belastningens og Kraftparrenes Virkning hver for sig. Man kan naturligvis ogsaa tegne en Tovpolygon til Momentfladen som Belastning — idet man erindrer at tage Hensyn til Momenternes Fortegn — og indlægge Slutlinien derved, at Nedbøjningerne i Understøtningspunkterne ere Nul. Konstruktionen skal da af sig selv levere den samme indbyrdes Højdeforskel mellem Understøtningerne, som man er gaaet ud fra ved Beregningen af Momenterne; hvis man har forudsat disse Punkter liggende i en ret Linie, skal Slutlinien blive én ret Linie.

Exempel 1. Bjælken har tre Understøtninger, A_0 , A_1 og A_2 ,

der foreløbig antages at ligge i en ret Linie. Belastningen er p_1 i første Fag, p_2 i 2^{det}. — Clapeyrons Formel giver:

$$-M_0 l_1 - 2M_1(l_1 + l_2) - M_2 l_2 = \frac{1}{8} p_1 l_1^3 + \frac{1}{8} p_2 l_2^3,$$

og heraf findes, idet $M_0 = M_2 = 0$:

$$M_1 = -\frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)}.$$

Momentet i et Punkt i første Fag i Afstanden x fra A_0 er:

$$M_x = \frac{1}{2} p_1 (l_1 x - x^2) - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)} \cdot \frac{x}{l_1},$$

Transversalkraften i samme Punkt:

$$Q_x = p_1 (x - \frac{1}{2} l_1) + \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2) l_1}.$$

Reaktionen A_0 er lig Transversalkraften i A_0 (for $x = 0$), altsaa:

$$A_0 = -\frac{1}{2} p_1 l_1 + \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2) l_1};$$

Reaktionen A_1 er Summen af det fra 1ste og 2det Fag hidrørende, hvorved man finder:

$$A_1 = -\frac{1}{2} p_1 l_1 - \frac{1}{2} p_2 l_2 - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2) l_1} - \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2) l_2}.$$

Hvis Faglængderne ere lige store, $l_1 = l_2 = l$, findes

$$A_0 = -\frac{1}{8} l(7p_1 - p_2), \quad A_1 = -\frac{5}{8} l(p_1 + p_2).$$

Man ser, at det er muligt, at A_0 bliver positiv, hvis nemlig $p_1 > 7p_2$; Betydningen heraf er, at Bjælken ikke alene intet Tryk giver nedad paa Pillen, men Pillen maa endog holde igen paa Bjælken, hvis den ikke skal lette sig fra; Understøtningen maa være forsynet med en Forankring.

Er endelig ogsaa $p_1 = p_2 = p$, faas: $A_0 = -\frac{3}{8} pl$, $A_1 = -\frac{5}{8} pl$, $M_1 = -\frac{1}{8} pl^2 = M_{\max}$. I dette Tilfælde er der fuldstændig Symmetri om Mellemunderstøtningen; Tangenten til den neutrale Linie i dette Punkt holder sig derfor vandret, og hvert af Fagene forholder sig følgelig som en Bjælke, der

er indspændt i den ene Ende, fri i den anden; Fig. 83, Pl. 9, giver derfor en grafisk Fremstilling af Momenter og Transversalkræfter, der ogsaa passer for det ene Fag her.

Vi ville nu undersøge, hvilken Indflydelse det har, naar Mellemunderstøtningen ligger et Stykke δ over eller under Forbindelseslinien mellem Endeunderstøtningerne; det antages, at $l_1 = l_2 = l$ og $p_1 = p_2 = p$. Idet vi regne Vinklerne β ud fra nævnte Forbindelseslinie, haves numerisk $\beta_1 = \beta_2 = \text{tg. } \beta_1 = \frac{\delta}{l}$, og Clapeyrons Ligning bliver:

$$-4M_1l = \frac{1}{2}pl^3 \pm 12EI \cdot \frac{\delta}{l},$$

hvor øverste Fortegn skal bruges, naar Mellemunderstøtningen ligger over, nederste Fortegn, naar den ligger under Forbindelseslinien mellem de to andre. Heraf faas:

$$M_1 = -\left(\frac{1}{8}pl^2 \pm 3EI \frac{\delta}{l}\right)$$

og ved videre Udregning:

$$A_0 = -\frac{3}{8}pl \pm 3EI \frac{\delta}{l^3}, \quad A_1 = -\frac{5}{4}pl \mp 6EI \frac{\delta}{l^3}.$$

Ved en Sænkning af Mellemunderstøtningen formindskes altsaa Momentet og Reaktionen her. Da M_1 i det her betragtede specielle Tilfælde er Maximumsmomentet, vil det aabenbart være en Fordel at formindske dette Moment og samtidig forøge Momenterne henne i Nærheden af Fagmidterne, hvor de (for Understøtningerne i samme rette Linie) ere betydelig mindre (se Fig. 83). Man kunde bestemme den gunstigste Sænkning af Mellemunderstøtningen — den, for hvilken man faar samme Moment her som henne i Nærheden af Aabningernes Midter — ligesom vi tidligere have bestemt den gunstigste Indspændingsvinkel, men Spørgsmaalet har neppe stor praktisk Betydning, saa det skal kun anføres*), at den gunstigste Sænkning vil være:

* Se Keck: *Vorträge über Elasticitätslehre*, Hannover. 1893. Her findes ogsaa en nærmere Undersøgelse af den gunstigste Sænkning for bevægelig Belastning, naar denne dækker et helt Fag ad Gangen.

$$\delta = 0,013 \frac{pl^4}{EI},$$

og at største Moment i saa Fald bliver:

$$M_{\max} = 0,0784pl^2.$$

Formindskelsen af Momentet andrager altsaa ca. 37 % af Maximumsværdien $\frac{1}{8}pl^2$.

For at faa et nøjagtigere Begreb navnlig om Højdeforskellens Indflydelse ville vi tage et Talexempel. Vi sætte $l = 10^m$, $p = 3600$ kg. pr. m. (omtrent svarende til Totalbelastning for en enkeltsporet Jernbanebro med to Dragere); Bjælken er af Jærn, for hvilket $E = 2000000$ kg./cm². Med de tre Understøtninger i samme Højde findes:

$$M_1 = -45000 \text{ kgm.}, A_0 = A_2 = -13500 \text{ kg.}, A_1 = -45000 \text{ kg.}$$

Idet M_1 er det største forekommende Moment, skal Dragerens Tværsnit (konstant) bestemmes herefter, og med 750 kg./cm.² som tilladelig Fiberpaavirkning bliver det nødvendige Modstandsmoment

$$W = \frac{4500000}{750} = 6000 \text{ cm.}^3.$$

Dragerens Højde antages at skulle være 80 cm.; Inertimomentet skal da være

$$I = 6000 \cdot 40 = 240000 \text{ cm.}^4.$$

Nu antage vi, at Mellemunderstøtningen ligger 5 m. lavere end de to andre Understøtninger; man har da:

$$3EI \frac{\delta}{l^2} = 3 \cdot 2000000 \cdot 240000 \cdot \frac{0,5}{1000^2} = 720000 \text{ kgcm.}$$

$$M_1 = -45000 + 7200 = -37800 \text{ kgm. (16 \% Formindskelse).}$$

A_0 og A_2 forøges med 720 kg., A_1 formindskes med 1440 kg.

Den gunstigste Sænkning vil efter Formlen ovenfor være:

$$\delta = 0,013 \cdot \frac{36 \cdot 1000^4}{2000000 \cdot 240000} = \text{ca. } 1 \text{ cm.},$$

og derved vilde bevirkes en Formindskelse af M_1 med ca. 37 %. Hvis Mellemunderstøtningen hævedes i Stedet for at

sænkes, vilde man faa en *Forøgelse* af M_1 med de samme Beløb, som ovenfor optraadte som Formindskelser.

Det er altsaa temmelig smaa Højdeforskelle, der betinge disse ret betydelige Variationer i Momenterne og dermed i Spændingerne; en lille Fejl ved Opstillingen eller i Dragerens Form eller en ubetydelig Synkning af Pillernes Fundamenter eller lignende er tilstrækkelig til at fremkalde dem. Man maa derfor være varsom ved Dimensionsbestemmelsen af kontinuerlige Bjælker; egentlig burde man altid i Beregningen tage Hensyn til en mulig Højdeforskel af f. Ex. $\pm 5^{\text{mm}}$. Da det er Størrelsen af Vinklerne $\beta = \frac{\delta}{l}$, der er det afgørende, vil man dog se, at jo længere Bjælkerne ere, des mindre farlig bliver en lille tilfældig Fejl ved Understøtningernes Højde. — Den her berørte uheldige Egenskab i Forbindelse med forskellige rent praktiske Hensyn har imidlertid bevirket, at kontinuerlige Bjælker nu sjældnere anvendes som Brodragere.

Exempel 2. Bjælken har 4 Understøtninger, Belastningen er ensformig fordelt, p pr. Længdeenhed, og lige stor i alle Fag; $l_1 = l_2$. Der er altsaa Symmetri om Midten.

Med Understøtningerne i samme Højde blive Clapeyrons Ligninger:

$$-2M_1(l_1 + l_2) - M_2l_2 = \frac{1}{2}p(l_1^3 + l_2^3),$$

$$-M_1l_2 - 2M_2(l_1 + l_2) = \frac{1}{2}p(l_2^3 + l_1^3).$$

Sættes $M_1 = M_2$, blive Ligningerne identiske, og man faar

$$M_1 = M_2 = -\frac{1}{2}p \frac{l_1^3 + l_2^3}{2l_1 + 3l_2}.$$

For et Punkt i første Fag have:

$$M_x = \frac{1}{2}p(l_1x - x^2) - \frac{1}{2}p \frac{l_1^3 + l_2^3}{2l_1 + 3l_2} \cdot \frac{x}{l_1},$$

for et Punkt i Midterfaget (idet $M_1 = M_2$ og $x + x' = l_1$):

$$M_x = \frac{1}{2}p(l_1x - x^2) - \frac{1}{2}p \frac{l_1^3 + l_2^3}{2l_1 + 3l_2}.$$

Reaktionerne blive:

$$A_0 = A_3 = -\frac{1}{2} pl_1 + \frac{1}{4} p \frac{l_1^3 + l_2^3}{(2l_1 + 3l_2) l_1},$$

$$A_1 = A_2 = -\frac{1}{2} pl_1 - \frac{1}{2} pl_2 - \frac{1}{4} p \frac{l_1^3 + l_2^3}{(2l_1 + 3l_2) l_1}.$$

For $l_1 = l_2$ findes:

$$M_1 = M_2 = -\frac{1}{10} pl^2, \quad A_0 = A_3 = -\frac{1}{10} pl,$$

$$A_1 = A_2 = -\frac{11}{10} pl.$$

Exempel 3. Bjælken har 3 Understøtninger ligesom i Ex. 1, men Belastningen er p pr. Længdeenhed i første Fag, Nul i 2det Fag. Af den i Ex. 1 fundne Værdi af M_1 faar man ved at sætte $p_1 = p$, $p_2 = 0$:

$$M_1 = -\frac{pl_1^3}{8(l_1 + l_2)}.$$

Momentet i et Punkt i 2det Fag er:

$$M_x = -\frac{pl_1^3}{8(l_1 + l_2)} \cdot \frac{x'}{l_2};$$

Momentfladen i 2det Fag er en Trekant. Transversalkraften i 2det Fag er konstant, lig Reaktionen A_2 med modsat Fortegn.

Skønt vi ikke her beskæftige os med »bevægelig« Belastning, skal det dog lige bemærkes, at man for kontinuerlige Dragere undertiden nøjes, og navnlig tidligere har gjort det, med at tænke sig den bevægelige Belastning dækkende et helt Fag ad Gangen. Med en hvilende Belastning g pr. Længdeenhed og en bevægelig Belastning p pr. Længdeenhed undersøgte man da Virkningen af følgende Belastninger (for en Drager med 3 Understøtninger):

g i 1ste Fag,		g i 2det Fag,	
$p + g$	—	g	—
g	—	$p + g$	—
$p + g$	—	$p + g$	—

og bestemte Dragerens Dimensioner efter de største Paavirkninger, der bevirkedes af nogen af disse Kombinationer. Metoden er ikke korrekt, men vi skulle ikke komme nærmere ind paa Spørgsmaalet her. — Vil man udføre Momentbe-

stemmelsen ved *Beregning*, faar man de simpleste Formler ved at behandle den hvilende Belastning for sig og den bevægelige for sig og addere; den bevægelige Belastning behandles da bl. a. ved Hjælp af dette Exempel.

*Claxton Fidlers Konstruktion.**) En grafisk Fremstilling af Momenterne i de forskellige Punkter faar man (Fig. 89, Pl. 9) ved at tegne de simple Momentkurver, afsætte

$$M_{n-1} = A_{n-1} a_{n-1}, \quad M_n = A_n a_n \dots$$

og indlægge Slutlinierne $a_{n-1} a_n, a_n a_{n+1} \dots$; Momenterne maales da (ifølge § 29) som Ordinater til de simple Momentkurver fra disse Slutlinier. Hvis man kan faa Slutlinie-Polygonen $a_{n-1} a_n a_{n+1} \dots$ bestemt paa en eller anden Maade, er dermed Problemet løst; ovenfor er dette udført ved at beregne Ordinaterne $A_{n-1} a_{n-1}, A_n a_n \dots$, her skal nu vises en grafisk Konstruktion, hvorved det samme opnaas.

Vi gaa ud fra den samme Betingelse som ovenfor, at nemlig Tangenten til den neutrale Linie over en Mellemunderstøtning skal være den samme til begge Sider. *Idet Understøtningerne foreløbig antages beliggende i en ret Linie*, har man Betingelsen: $\alpha_n = -\alpha'_n$, og naar Værdierne af α_n og α'_n indføres:

$$\frac{F_n \xi_n}{EI \cdot l_n} + \frac{l_n}{6EI} (M_{n-1} + 2M_n) = -\frac{F_{n+1} \cdot \xi'_{n+1}}{EI \cdot l_{n+1}} - \frac{l_{n+1}}{6EI} (2M_n + M_{n+1})$$

Naar man heri indfører:

$$\frac{F_n \cdot \xi_n}{\frac{1}{2} l_n^3} = s, \quad \frac{F_{n+1} \cdot \xi'_{n+1}}{\frac{1}{2} l_{n+1}^3} = s',$$

$$-\frac{1}{3} M_{n-1} - \frac{2}{3} M_n = r, \quad -\frac{2}{3} M_n - \frac{1}{3} M_{n+1} = r',$$

kan Ligningen skrives:

$$l_n (s - r) = -l_{n+1} (s' - r'),$$

og i denne Form kan den direkte benyttes til Konstruktion af Slutlinierne.

Man deler (Fig. 89, Pl. 9) Faglængderne hver i tre lige store Dele og trækker lodrette Linier gennem Delingspunkterne:

*) T. Claxton Fidler: A practical treatise on bridge-construction. sec. ed. London 1893.

de to af disse Vertikaler, der ligge nærmest ved Understøtningen A_n , ere i Figuren betegnede ved T og T' . Hvis Slutlinien $a_{n-1} a_n a_{n+1}$ kendes, ser man, at

$$TR = r, T'R' = r',$$

og naar man afsætter $s = TS$, $s' = T'S'$, siger Ligningen ovenfor, at *Stykkerne SR og $S'R'$ skulle forholde sig omvendt som de tilsvarende Faglængder*. Det negative Fortegn i Ligningen betyder, at hvis Slutlinien passerer ovenover Punktet S , skal den gaa neden under S' . Stykkerne s og s' afhænge alene af Belastningen og Faglængderne, Punkterne S og S' , som Cl. Fidler kalder de *karakteristiske Punkter*, kunne altsaa strax afsættes.

Hvis man nu kender Slutlinien $a_{n-1} a_n$, kan man ved Hjælp af de til den n^{te} Understøtning svarende karakteristiske Punkter S og S' tegne Slutlinien $a_n a_{n+1}$ i det følgende Fag, idet man af det bekendte Stykke SR udleder Længden af Stykket $S'R'$. Hertil kan følgende simple Konstruktion anvendes: man trækker Linien SS' , der skærer Vertikalen i n^{te} Understøtningspunkt i Punktet O_1 ; naar man da afsætter $SO_1 = S'O$, skulle Punkterne R , O og R' ligge i en ret Linie; thi i saa Fald har man:

$$\frac{SR}{S'R'} = \frac{SO}{S'O} = \frac{S'O_1}{SO_1} = \frac{\frac{1}{3} l_{n+1}}{\frac{1}{3} l_n} = \frac{l_{n+1}}{l_n}.$$

Hvis $l_n = l_{n+1}$, falde O og O_1 sammen i Vertikalen gennem Understøtningspunktet.

Til hver Mellemunderstøtning svarer der to karakteristiske Punkter som S og S' , beliggende paa de nærmeste Trediedels-vertikaler, og naar man har afsat alle disse Punkter, er man aabenbart i Stand til efterhaanden at konstruere hele Slutlinie-Polygonen, hvis man blot kender en af dens Sider. Det gør man nu ikke, men idet Momenterne over første og sidste Understøtning i Almindelighed ere Nul, kender man et Punkt i første og sidste Side af Slutlinie-Polygonen og er derved ogsaa i Stand til at tegne den. Der kan meget godt angives en direkte geometrisk Konstruktion (vi skulle se en saadan nedenfor), men man hjælper sig som oftest lige saa let alene ved Forsøg: man tegner Slutlinien i første Fag efter et Skøn og konstruerer derefter alle de følgende; hvis Slutlinien i sidste

Fag da ikke gaar gennem det givne Punkt, maa man rette paa første Side og derefter paa de følgende; ved et Par Forsøg vil man i Almindelighed opnaa tilstrækkelig Nøjagtighed. I Fig. 90, Pl. 9, er en saadan Konstruktion vist for en Bjælke med tre ulige lange Fag og med ensformig Belastning i alle tre Fag. Den rigtige Slutlinie-Polygon er fuldt optrukket. Forsøgs-Polygonerne ere stiplede; Hjælpelinierne gennem O_1 og O_2 for Forsøgspolygonerne ere slettede ud igen. Man finder snart den omtrentlige Beliggenhed af Slutlinien i 1ste Fag, idet en lille Forandring af den har stor Indflydelse henne i sidste Fag, og dernæst begynder man fra den anden Ende.

Ordinaten til det karakteristiske Punkt R er:

$$s = \frac{F_n \cdot \xi_n}{\frac{1}{2} l_n^2};$$

F_n er af Dimensionen kg. cm.^2 , s er altsaa et Moment, der skal afsættes efter samme Maalestok, som er benyttet for den simple Momentflade. s betyder forøvrigt Højden i et Rektangel med Grundlinie l_n , der har samme Moment med Hensyn til den $(n-1)^{\text{te}}$ Understøtning som den simple Momentflade. Man maa lægge Mærke til, at for at finde de to til n^{te} Understøtning svarende karakteristiske Punkter skal man tage Momentet af den simple Momentflade med Hensyn til den $(n-1)^{\text{te}}$ og den $(n+1)^{\text{te}}$ Understøtning.

Hvis Belastningen er ensformig fordelt, finder man det karakteristiske Punkt S_1 (Fig. 90) ved blot at trække Linien $Q1$ fra Parablens Toppunkt Q . Hvis Længden $0-1$ kaldes l_1 og Belastningen pr. Længdeenhed i Faget p , er nemlig:

$$F_n = \frac{1}{12} p l_1^3, \quad \xi_n = \frac{1}{2} l_1, \quad \frac{F_n \cdot \xi_n}{\frac{1}{2} l_n^2} = \frac{1}{12} p l_1^2 = \frac{2}{3} \cdot PQ.$$

Naar Belastningen bestaar af Enkeltkræfter, beregner man lettest Ordinaterne til de karakteristiske Punkter ved at betragte den til hver Kraft svarende Momenttrekant og tage Momentet af dens Areal.

Vi ville nu undersøge, hvilken Indflydelse en forskellig Højde af Understøtningspunkterne har paa Konstruktionen. Man skal da benytte Ligningen $\alpha_n + \beta_{n+1} - \beta_n = -\alpha'_n$ eller:

$$\alpha_n - \beta_n = -(\alpha'_n + \beta_{n+1}).$$

Naar man heri indfører Værdierne af α_n og α'_n og de samme afkortende Betegnelser som tidligere, faar man:

$$l_n \left(s - r - \frac{2EI}{l_n} \beta_n \right) = -l_{n+1} \left(s' - r' + \frac{2EI}{l_{n+1}} \beta_{n+1} \right),$$

eller:

$$l_n \left[\left(s - \frac{2EI}{l_n} \beta_n \right) - r \right] = -l_{n+1} \left[\left(s' + \frac{2EI}{l_{n+1}} \beta_{n+1} \right) - r' \right].$$

Herefter vil en forskellig Højde ikke have anden Indflydelse paa Konstruktionen, end at der skal indføres en Korrektion ved Bestemmelsen af de karakteristiske Punkter; de skulle nu ligge et Stykke højere eller lavere, end hvis Understøtningerne laa i en ret Linie, men deres Anvendelse i Konstruktionen er ganske den samme som før. Naar Vinklerne β_n og β_{n+1} regnes ud fra Forbindelseslinien mellem den $(n-1)^{\text{te}}$ og den $(n+1)^{\text{te}}$ Understøtning, ville de som ovenfor (Fig. 87) bemærket altid have modsat Fortegn; de to karakteristiske Punkter, der høre til samme Understøtning, skulle derfor altid flyttes samme Vej, og idet β_{n+1} er positiv, β_n negativ i Fig. 87, skulle de *begge flyttes opad, hvis n^{te} Understøtning ligger over Forbindelseslinien mellem $(n-1)^{\text{te}}$ og $(n+1)^{\text{te}}$, begge nedad, hvis n^{te} Understøtning ligger under denne Linie.* For Flytningens Størrelse haves Udtrykket

$$\frac{2EI}{l_n} \beta_n = \frac{2EI}{l_n^2} \cdot \delta_n \text{ kg. cm.}$$

og de analoge; Betydningen af δ_n ses i Fig. 87.

Exempel. I Fig. 90, Pl. 9, er $l_1 = 8^{\text{m.}}$, $l_2 = 12^{\text{m.}}$, $l_3 = 6^{\text{m.}}$; $p_1 = 2^{\text{te}}$ pr. m., $p_2 = p_3 = 1,5^{\text{te}}$ pr. m. De simple Momentflader ere Parabler med Toppunktsordinater: $16^{\text{te m.}}$, $27^{\text{te m.}}$, $6,75^{\text{te m.}}$. Momentmaalestokken er: $1^{\text{m. m.}} = 1 \text{ ton. m.}$

Naar alle Understøtninger ligge i samme Højde, finder man et største Moment paa ca. $18^{\text{te m.}}$; med 600 kg./cm.^2 som tilladelig Fiberpaavirkning (Jærn) skal Modstandsmomentet være $W = 3000^{\text{cm.}^3}$, og naar Bjælkens Højde er $0,84^{\text{m.}}$, bliver $I = 126000^{\text{cm.}^4}$. E er $= 2000000 \text{ kg./cm.}^2$. Hvis nu Under-

støtningen 1 ligger 5^{m.m.} under den vandrette Linie gennem 0, 2 og 3, skal S_1 sænkes:

$$\frac{2EI}{l_1^3} \cdot \delta = \frac{2 \cdot 2000000 \cdot 126000 \cdot 0,5}{800^3} = 393700 \text{ kg.cm.} \sim 3,94^{\text{ts.m.}}$$

$$S'_1 \text{ skal sænkes: } 3,94 \cdot \frac{8^3}{12^3} = 1,75^{\text{ts.m.}}$$

Punktet 2 ligger 5 · $\frac{8}{12} = \frac{5}{3}^{\text{m.m.}}$ over Linien 1—3; S_2 skal derfor løftes $\frac{1}{3} \cdot 1,75^{\text{ts.m.}}$ og S'_2 skal løftes $\frac{1}{3} \cdot 1,75 \cdot \frac{12^3}{6^3}^{\text{ts.m.}}$. De nye karakteristiske Punkter ere ikke indtegnede i Fig. 90 for ikke at gøre Konstruktionen utydelig.

Vi skulle nu angive en direkte Konstruktion *) af Slutlinie-Polygonen $a_{n-1}a_na_{n+1} \dots$ (Fig. 91, Pl. 9). Denne Figur er den samme som Fig. 89, idet der blot er udeladt, hvad vi ikke have Brug for her; vi vide altsaa, at Forbindelseslinien RR' gaar gennem et fast Punkt O i Vertikalen O_0O , der er bestemt ved: $O_0T' = A_nT = \frac{1}{3}l_n$ [altsaa $A_nO_0 = \frac{1}{3}(l_{n+1} - l_n)$]. Hvis man nu kender et Punkt I i Slutlinien $a_{n-1}a_n$, kan man deraf udlede et Punkt I' i Slutlinien for det følgende Fag. Om $\triangle Ra_nR'$ ved man nemlig følgende: de tre Vinkelspidser skulle ligge paa de tre lodrette Linier gennem T , T' og A_n , og de to af Siderne skulle gaa gennem faste Punkter (RR' gennem O , Ra_n gennem I); den tredie Side a_nR' maa derfor ogsaa gaa gennem et fast Punkt I' paa Linien IO . Punktet I' kan altsaa konstrueres ved dels at trække Linien IO , dels en vilkaarlig Linie IRa_n samt Linierne ROR' og a_nR' . Det er i Almindelighed bekvemmest at udføre Konstruktionen nede paa Bjælkens Axe, som vist i Fig. 91: I og O projiceres ned i I_0 og O_0 ; en vilkaarlig Linie $I_0R_0a_0$ giver Punktet R_0 , R_0O_0 trækkes og $a_0R'_0$ bestemmer I'_0 . (Rigtigheden heraf indses saaledes: hvis man holder Punkterne R , O og R' fast og lader I og a_n bevæge sig paa lodrette Linier, vil I' ogsaa bevæge sig paa en lodret Linie: thi om Trekanten Ia_nI' ved man da, at de tre Sider gaa gennem faste Punkter, medens de to Vinkel-

* Müller-Breslau: *Die graphische Statik der Baukonstruktionen*, Bd. II., Abth. 2. Leipzig 1896. Cf. Fidler angiver ogsaa en Konstruktion, som i Virkeligheden løber ud paa det samme, men som direkte anvendt ikke er slet saa praktisk.

spidser gennemløbe rette Linier, og saa maa ogsaa den tredie Vinkelspids I' gennemløbe en ret Linie gennem Skæringspunktet for II_0 og $A_n a_n$. Hvis man vil nøjes med at finde et Punkt af Vertikalen gennem I' , kan man altsaa gaa ud fra et vilkaarligt Punkt i Vertikalen gennem I , f. Ex. fra et Punkt i samme Højde som O ; men saa kan man lige saa godt parallelforskyde hele Konstruktionen ned til $I_0 O_0 \dots$).

Ved Hjælp heraf kan Slutlinie-Polygonen let konstrueres. Man kender nemlig et Punkt af Slutlinien i første Fag (Momentet over første Understøtning $M_0 = 0$); deraf udledes et Punkt I af Slutlinien i 2det Fag, deraf I' i 3die Fag o. s. v., indtil man naaar til sidste Fag, hvor man desuden kender et andet Punkt (Momentet over sidste Understøtning $= 0$), saa Slutlinien her kan tegnes. En Kontrol paa Tegningens Nøjagtighed faas ved paa samme Maade at konstruere endnu en Række Punkter K af Slutlinie-Polygonen ved at begynde med sidste Fag. I Fig. 90, Pl. 9, er Konstruktionen udført med Punktet 0 som Udgangspunkt ($M_0 = 0$). Konstruktionen af Punkterne I_0 og I'_0 er vist, derimod ere Linierne oO_1I og IO_2I' slettede ud igen. Punkterne K (svarende til Punkterne I , men konstruerede med 3 som Udgangspunkt) ere ikke fundne for ikke at gøre Figuren utydelig.

Opg. 21. En kontinuerlig Bjælke med n Fag og ensformig Belastning p er forlænget Stykkerne a og b ud over første og sidste Understøtning; konstruer Momenterne.

Direkte Anvendelse af den elastiske Tovpolygon.)* Denne Methode, der kun er en videre Udvikling af, hvad vi tidligere have set for indspændte Bjælker, staar i Simpelhed tilbage for den nys meddelte, men medtages for Fuldstændigheds Skyld. Konstruktionen ses i Fig. 92, Pl. 10. Den elastiske Tovpolygon er den stærkt optrukne Polygon $A_0' \dots A_3'$. De Kræfter, for hvilke den skal tegnes, ere for det midterste Fag: den simple Momentflades Areal F_2 , virkende nedad i Tyngdepunktet T_2 , og Arealerne $\frac{1}{2} M_1 l_1$ og $\frac{1}{2} M_2 l_2$ af de to Trekanten, der tilsammen danne det af M_1 og M_2 bestemte Trapez, virkende i Trediedelsvertikalerne V_2 og U_2 ; for Endefagene falde Kræfterne i V_1 og U_3 bort, da $M_0 = 0$, $M_3 = 0$. — For den indspændte Bjælke begyndte vi med at tegne Krydslinierne (Kraftpolygonen), idet

*) Se Noten til § 31, 1 c.

vi afsatte $CC_1 = \frac{F}{l}$ (Fig. 81) i Afstanden $\frac{1}{6}l$ fra Vertikalen gennem T ; da vi her have forskellige Faglængder, ville vi hellere indføre en for alle Fag fælles Længde λ og altsaa afsætte $C_1C_1' = \frac{F_1}{\lambda}$, $C_2C_2' = \frac{F_2}{\lambda} \dots$ i Afstanden $\frac{1}{6}\lambda$ fra Vertikalerne gennem T_1 og $T_2 \dots$ (nederst i Fig.). Naar den elastiske Tovpolygon er tegnet, kan man saa bestemme Størrelsen af de i Trediedelsvertikalerne virkende Kræfter og dermed Understøtningsmomenterne. Da vi have divideret med λ , skal Kraften i V_2 være: $\frac{1}{2} \frac{M_1 l_2}{\lambda}$; efterat den rigtige Beliggenhed O'_2 af Polen er bestemt (den behøver i Virkeligheden ikke at bestemmes), finder man af $\triangle V_2'A_1'A_1'' \sim \triangle O_2'DC_2$:

$$A_1'A_1'' = \frac{1}{3}l_2 \cdot \frac{C_2D}{\frac{1}{6}\lambda} = 2 \frac{l_2}{\lambda} \cdot \frac{1}{2} \frac{M_1 l_2}{\lambda} = M_1 \cdot \left(\frac{l_2}{\lambda}\right)^2,$$

og paa samme Maade

$$A_2'A_2'' = M_2 \cdot \left(\frac{l_2}{\lambda}\right)^2, \quad A_1'A_1''' = M_1 \cdot \left(\frac{l_1}{\lambda}\right)^2 \text{ o. s. v.}$$

Hvis man har faaet Tovpolygonen tegnet, kender man altsaa Understøtningsmomenterne. Størrelsen λ vælges lig en af Faglængderne; hvis der kun er tre Fag som i Fig. 92, vælges naturligvis $\lambda = l_2$, da man saa direkte har: $M_1 = A_1'A_1''$, $M_2 = A_2'A_2''$.

Vi skulle nu se at finde bestemmende Størrelser nok for Tovpolygonen. For det første skal den gaa gennem Understøtningspunkterne A_0' , A_1' , $A_2' \dots$, og dernæst skal $U_1'A_1'V_2'$, $U_2'A_2'V_3' \dots$ være rette Linier uden Knæk, idet de nemlig angive Stillingen af Tangenterne i Understøtningspunkterne. Endvidere skulle de to midterste Tovpolygonsider i hvert Fag paa en hvilken som helst lodret Linie afskære lige saa store Stykker, som Krydslinierne i Faget afskære paa samme lodrette Linie; de »midterste« Sider vil her sige Siderne før og efter Kræfterne F (virkende i T_1 , $T_2 \dots$), hvilket man maa lægge Mærke til for Endefagenes Skyld. Man har altsaa f. Ex. $A_0'B_0 = a$, $I_1I_1' = b$ o. s. v. Endelig skære Siderne $T_1'U_1'$ og $V_2'T_2'$ hinanden i et Punkt P_1 ; dette maa ligge i Retningslinien for Resultanten af Kræfterne i U_1 og V_2 , og da disse Kræfter ere $\frac{1}{2}M_1l_1$ og $\frac{1}{2}M_1l_2$, og idet $U_1V_2 = \frac{1}{3}(l_1 + l_2)$,

maa P_1 ligge i Afstanden $\frac{1}{3} l_2$ fra Vertikalen gennem U_1 . P_1 's Beliggenhed er uafhængig af Belastningen, saa Vertikalen gennem P_1 kan strax tegnes; ligeledes ved man, at Siderne $T_2'U_2'$ og $V_3'T_3'$ skulle skære hinanden i en lodret Linie, der har Afstanden $\frac{1}{3} l_2$ fra V_3 . (Disse Vertikaler ere de samme som OO_0 i Fig. 91, Pl. 9).

Nu ved man følgende om Trekant $U_1'P_1V_2'$: Vinkelspidserne skulle ligge paa tre givne Vertikaler og Siden $U_1'P_1$ skal gaa gennem det faste Punkt B_0 , Siden $U_1'V_2'$ gennem A_1' ; Siden P_1V_2' maa da gaa gennem et fast Punkt I_1 i Linien B_0A_1' . Punktet I_1 kan findes ved ganske den samme Konstruktion, som i Fig. 91 tjente til at udlede Punktet I' af I ; man ser, at Vertikalen gennem I_1 her er den samme som $I'I_0'$ i Fig. 91. Paa samme Maade udledes Punktet I_2 i Siden $V_3'T_3'$ af Punktet I_1' i Siden $T_2'U_2'$, efterat man først har fundet I_1' ved at afsætte $I_1I_1' = b$, o. s. fr. Nu kender man to Punkter, B_1 og I_2 i Siden $V_3'T_3'$ og kan da tegne den og dermed hele Tovpolygonen; men forøvrigt kan man finde nogle Punkter K , der fuldstændig svare til Punkterne I , ved at gaa ud fra B_3 (af B_3 udledes K_2 i Siden $T_2'U_2'$, af K_2' udledes K_1 o. s. v.), og i saa Fald kender man to Punkter i hver af de midterste Sider i et Fag. — Konstruktionen af Punkterne I og K udføres bedst ved som i Fig. 92 i en særlig Tegning nedenunder Tovpolygonen at konstruere Vertikalerne gennem Punkterne I og K . Saalænge man har med den samme Bjælke at gøre, forandres disse Vertikaler ikke (lige saa lidt som Vertikalerne gennem $P_1, P_2 \dots$ og Trediedelsvertikalerne), selv om Belastningen varierer; kun Krydslinierne blive ikke de samme. Hvis der ingen Belastning findes i et Fag, danne Krydslinierne i Faget Vinklen Nul med hinanden.

Hvis Understøtningpunkterne ikke ligge i en ret Linie, kan Konstruktionen lige fuldt anvendes; kun maa man saa afsætte Punkterne $A_0', A_1', A_2' \dots$ i den rigtige indbyrdes Beliggenhed (Højde). For at kunne gøre det maa man erindre, at den elastiske Tovpolygons Ordinater ere forstørrede i Forholdet n (skulle maales paa Længdemaalestokken og multipliceres med n , hvor n ifølge Formel (23), S. 91, findes af:

$$n = \frac{EI}{h \cdot a \cdot h_1}.$$

h er Poldistancen for de simple Momentkurver, h_1 Poldistancen for den elastiske Tovpolygon, a Grundlinien i det Rektangel, hvis Højde er brugt som Kraftstørrelse ved Tegning af den elastiske Tovpolygon. Her have vi brugt Poldistancen $h_1 = \frac{1}{8} \lambda$, og idet vi som Kraftstørrelse have afsat $\frac{F}{\lambda}$, maa $a = \lambda$, altsaa $ah_1 = \frac{1}{8} \lambda^2$. h skal maales paa Kraftmaalestokken.

Indflydelsen af en forskellig Højde af Understøtningerne kan undersøges for sig og bagefter adderes til Belastningens Virkning; den elastiske Tovpolygon, man faar, naar der slet ingen Belastning virker, bliver meget simpel at konstruere, idet alle Kræfterne F forsvinde og Krydsliniernes Vinkel bliver Nul.

§ 33. Tværsnitsformer. Vi have tidligere [§ 24, Formel (18) og (18 a)] set, at en Bjælkes Bæreevne afhænger af Tværsnittets Modstandsmoment. Om en Tværsnitsform er økonomisk eller ikke, afhænger derfor af Modstandsmomentets Størrelse (W) i Forhold til Tværsnitsarealet. Vi ville undersøge nogle af de hyppigst forekommende Tværnit i saa Henseende; foreløbig antages det, at den tilladelige Fiberpaavirkning er den samme for Træk og Tryk, saa at Bæreevnen bestemmes ved (18 a): $M = r \cdot W$.

Et Rektangel med Siderne b og h (b parallel med den neutrale Axe) har $I = \frac{1}{12} bh^3$, altsaa

$$W = \frac{1}{8} bh^2.$$

Da W afhænger af h i 2den Potens, men af b i 1ste Potens, er det fordelagtigst at anvende et saadant Tværnit paa Højkant.

For et Kvadrat er I lige stort om alle Axer gennem Tyngdepunktet; naar Siden h er parallel med den neutrale Axe, bliver

$$W = \frac{1}{8} h^3 = 0,167h^3;$$

naar en Diagonal er parallel med den neutrale Axe, bliver

$$W = \frac{h^3}{6\sqrt{2}} = 0,118 h^3;$$

len sidste Stilling er altsaa ikke saa fordelagtig. For øvrigt har man i et Kvadrat i denne Stilling et Exempel paa, at *Bæreevnen ikke altid formindskes ved at borttage Materiale*. Hvis man skærer øverste og nederste Hjørne bort (Fig. 93, Pl. 9) ved Planer parallelle med den neutrale Flade, faas med Figurens Betegnelser ved Deling i et Kvadrat med Siden $(1 - \alpha)h$ og to Parallelogrammer:

$$I = \frac{1}{12} (1 - \alpha)^3 h^4 + \frac{1}{12} \cdot \alpha h \sqrt{2} \cdot [(1 - \alpha)h \sqrt{2}]^3,$$

$$e = (1 - \alpha) h \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$W = \frac{\sqrt{2}}{12} (1 - \alpha)^3 (1 + 3\alpha) h^3.$$

W bliver Maximum for $\alpha = \frac{1}{9}$, og

$$W_{\max} = \frac{256}{243} \cdot \frac{h^3}{6\sqrt{2}} = 1,0535 \cdot \frac{h^3}{6\sqrt{2}}.$$

Hvis man kalder Modstandsmomentet for det fulde Kvadrat W_1 , har man altsaa:

$$W_{\max.} = 1,0535 \cdot W_1.$$

Dette Forhold medfører f. Ex., at vankantede Træbjælker under visse Forhold (som Aase) kunne være fordelagtigere at anvende end fuldkantede, forudsat at Materialkvaliteten i Forhold til Prisen er den samme.

Dette Exempel er forøvrigt aldeles ikke noget enestaaende. Culmann*) har nærmere undersøgt Betingelsen for, at en Forøgelse af Tværsnitsarealet ogsaa skal bevirke en Forøgelse af Modstandsmomentet, og han angiver følgende Tilnærmelsesregel: idet Afstanden ud til de yderste Fibre kaldes e , dens Tilvæxt Δe , hele Tværsnitsarealet F og dets Tilvæxt ΔF , faar man, naar

$$\frac{\Delta e}{\Delta F} = \frac{e}{F}$$

ingen Tilvæxt i Modstandsmoment; hvis e voxer stærkere end

*) Die graphische Statik, 2te Aufl., I. Bd., S. 486, Zürich 1875.

efter dette Forhold, faas en Aftagen, og kun naar e voxer langsommere, en Tiltagen af Modstandsmomentet.

Cirkel, Cirkelring. For en fuld Cirkel er $I = \frac{1}{4} \pi r^4 = \frac{1}{64} \pi d^4$, altsaa:

$$W = \frac{1}{32} \pi d^3 = 0,0982 d^3 \sim \frac{1}{10} d^3.$$

For en Cirkelring med udvendig Diameter d_1 , indvendig d_2 , er:

$$W_1 = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{d_1^4 - d_2^4}{d_1}.$$

Sætter man for at sammenligne en hul og en massiv Cylinder $d_1^4 - d_2^4 = d^4$, $d_1 = n \cdot d$, faas:

$$\frac{W_1}{W} = \frac{2n^3 - 1}{n} > 1.$$

Det vil ogsaa for et cirkulært Tværsnit vise sig, at Modstandsmomentet voxer, naar man bortskærer de øverste og nederste Fibre ved Planer parallelle med den neutrale Flade. Maximum naas *), naar de afskaarne Segmenters Højde er 0,022 af Radius, og ved denne Bortskæring forøges Modstandsmomentet med ca. 0,7 %. At der saaledes i alt Fald ikke indtræder en Svækkelse ved denne Bortskæring, kan have Betydning ved Interimskonstruktioner af Rundtømmer.

Ingen af de omtalte Tværsnitsformer er videre økonomisk. Normalspændingerne i et Tværsnit ere jo proportionale med Afstanden fra den neutrale Axe, og heraf følger, at Elementerne i denne Axes Nærhed ikke gøre synderlig Nytte; den tilladelige Paavirkning naas kun for de yderste Fibre. Hvis den tilladelige Fiberpaavirkning er den samme for Træk og Tryk, maa Tværsnittet være symmetrisk om den neutrale Axe for at være økonomisk; kun da kunne de yderste Fibre til begge Sider samtidig blive fuldt udnyttede. Idet dernæst Elementernes Afstande fra den neutrale Axe kaldes y , er det almindelige Udtryk for W :

$$W = \frac{1}{e} \int y^2 dF,$$

*) *Flamant: Résistance des matériaux. Paris 1886, S. 314.*

og hvis man nu skal forme et Tværnsnit saaledes, at det med et givet Areal er saa økonomisk som muligt, gælder det derfor om at fjerne Arealelementerne saa meget som muligt fra den neutrale Axe. Den praktiske Udførelse sætter dog temmelig snævre Grænser for, hvad der kan opnaas i saa Henseende; selv om man anbringer største Delen af Tværsnitsarealet langt fra den neutrale Axe (i to Partier, et paa hver Side af Axen), maa der anvendes noget Materiale til at danne Forbindelsen, saaledes at det virkelig bliver ét sammenhængende Tværnsnit. Paa denne Maade kommer man til det »dobbelt- $\overline{\text{T}}$ -formede« eller »I-formede« Tværnsnit (Fig. 94, Pl. 9). For et saadant har man, naar det betragtes som Differens mellem to Rektangler med Siderne b, h og b_0, h_0 , at Inertimomentet om den i Figuren punkterede Tyngdepunktsaxe bliver:

$$I = \frac{1}{12} (bh^3 - b_0h_0^3),$$

og heraf findes $W = \frac{2I}{h}$. Den lodrette Midtribbe kaldes *Kroppen*, de to vandrette Rektangler *Hoved* (foroven) og *Fod* (forneden) eller under ét *Flangerne*. Bestemmelsen af de enkelte Dimensioner, saaledes at Tværsnittet faar det ønskede Modstandsmoment, maa udføres paa den Maade, at man vælger dem alle paa en nær og saa beregner denne, eller saaledes at man vælger visse Forhold mellem de enkelte Dimensioner. I Almindelighed slipper man dog overmaade let fra denne Dimensionsbestemmelse; Profilet anvendes kun for Jærn som Materiale, og nu til Dags saa godt som udelukkende for smedeligt Jærn og fremstilles da ved Valsning. Der fabrikeres kun bestemte Profiler, og for disse finder man alle ønskelige Oplysninger, i Almindelighed ogsaa Størrelsen af Modstandsmomentet, i Valseværkernes Profilbøger (for tyske Værker i *Normalprofilbuch für Walzeisen*, hvoraf Uddrag i »Des Ingenieurs Taschenbuch« (Hütte)]; det drejer sig da kun om at bestemme, hvilket *Profilnummer* man skal bruge. De valsede I-Jærn ere forøvrigt ikke sammensatte af Rektangler, som vist i Fig. 94; deres virkelige Form, med Heldning af Flangernes Inderflader og Afrundinger ved de fleste Hjørner, ses i Fig. 95, Pl. 10. Hvis man i enkelte Tilfælde bliver nødt til selv at beregne Profilets Modstandsmoment, kan man imidlertid saa godt som altid med tilstrækkelig Nøjagtighed regne med Formen i Fig. 94.

Man gør undertiden Brug af nogle Tilnærmelsesformler for Inerti- og Modstandsmoment af I-formede Tværsnit. Man kan skrive et symmetrisk I-Profiles Inertimoment som:

$$I = 2 \cdot I_b + 2F \cdot \left(\frac{1}{2} h_t\right)^2 + \frac{1}{12} \delta h_0^3,$$

idet I_b betyder Inertimomentet af Hovedet om Axen BB (Fig. 96, Pl. 10), F Arealet af Hovedet eller Foden (den ene Flange), δ Kroptykkelsen. Her vil første Led ofte være forsvindende i Sammenligning med de andre; bortkastes det, og sættes $\delta \cdot h_0 = K =$ Kroppens Areal, samt indføres i sidste Led h_t^3 i Stedet for h_0^3 , faar man:

$$I = \frac{1}{2} h_t^3 (F + \frac{1}{6} K) \quad (31).$$

og
$$W = h_t (F + \frac{1}{6} K), \quad (31a).$$

idet $\frac{\frac{1}{2} h_t^3}{\frac{1}{2} h}$ tilnærmelsesvis er sat lig h_t . Formel (31) faas, naar man tænker sig Arealet $F + \frac{1}{6} K$ samlet i Hovedets Tyngdepunkt og et lige saa stort Areal i Fodens Tyngdepunkt. Undertiden simplificerer man endnu mere, idet man bortkaster $\frac{1}{6} K$ i Sammenligning med F ; man faar da:

$$I = \frac{1}{2} h_t^3 F, \quad W = h_t \cdot F. \quad (32).$$

Naar man benytter den sidste Formel for Modstandsmomentet, har man til Bestemmelse af Dimensionerne:

$$M = r \cdot W = r \cdot h_t \cdot F.$$

Idet man tænker sig Tværsnittet bestaaende af to Arealer F , samlede hver i sit Tyngdepunkt, ville alle Arealelementer faa samme Spænding r , og $r \cdot F$ vil betyde Resultanten af alle Trækspændinger eller alle Trykspændinger; disse to lige store og modsat rettede Kræfter $r \cdot F$ danne tilsammen et Kraftpar med Arm h_t , altsaa med Moment $r \cdot F \cdot h_t$, og dette Moment skal jo være lig de ydre Kræfters Moment M . Ved denne Betragtningssmaade kommer Kroppen slet ikke til at spille nogen Rolle; man kan derfor som tilnærmelsesvis rigtigt udtale, at *at i et I-formet Tværsnit optages Normalspændingerne af Hoved og Fod alene*; som vi senere skulle se, maa Kroppen til Gengæld næsten alene optage Forskydningsspændingerne.

Ved Hjælp af Formel (31a) kan man bestemme den mest økonomiske Form af et I-Profil, *) naar man forudsætter, at Kroptykkelsen δ er proportional med Højden h_0 , $\delta = n \cdot h_0$. Erstattes i (31a) h_t med h_0 og K med $\delta h_0 = nh_0^2$, og sættes hele Arealet lig f , altsaa: $f = 2F + K$, faas:

$$W = \frac{1}{2} f h_0 - \frac{1}{3} n h_0^3,$$

hvoraf:

$$\frac{dW}{dh_0} = \frac{1}{2} f - n h_0^2 = \frac{1}{2} f - \delta h_0.$$

$W_{\max}$. faas altsaa for:

$$\delta h_0 = K = \frac{1}{2} f,$$

og bliver:

$$W_{\max} = \frac{1}{8} f h_0.$$

Halvdelen af hele Tværsnitsarealet skal altsaa anbringes i Kroppen, Halvdelen i de to Flanger tilsammen, en Regel, der ogsaa kan anvendes for nittede Pladejærnsdragere.

Formlerne (31) og (32) anvendes dog sjældent for simple valsede Bjælker, da man som ovenfor nævnt har de eksisterende Profilnumres Modstandsmomenter samlede i Tabeller. Derimod anvendes de ofte for *nittede Pladejærnsdragere*, hvis Tværnit, som det ses i Fig. 97, Pl. 10, er sammensat af Plader og Vinkeljærn, og som man med en vis Tilnærmelse kan betragte som I-formede. Vi skulle dog ikke her indlade os nærmere paa disse Drageres Beregning.

Foruden de nævnte Tværsnitsformer anvender man i specielle Tilfælde mange andre, navnlig valsede Profiler, angaaende hvis Form, gangbare Dimensioner o. s. v. vi indskrænke os til at henvise til Profilbøgerne.

For Materialer, for hvilke den tilladelige Paavirkning til Træk og Tryk ikke er den samme, skal Tværsnitsformen for at blive økonomisk være saaledes afpasset, at den tilladelige Paavirkning naas samtidigt i de yderste Fibre til begge Sider. Herved kan den gunstigste Beliggenhed af Tyngdepunktet bestemmes. For Støbejærn f. Ex., hvor den tilladelige Trykpaavirkning kan regnes til $r_1 = c. 700 \text{ kg./cm.}^2$, den tilladelige

*) Zimmermann, *Centralblatt der Bauverwaltung*, 1887, S. 103.

Trækpaavirkning (ved Bøjning) til $r_2 = c. 250 \text{ kg./cm.}^2$, faar man:

$$M = r_1 \frac{I}{e_1} = r_2 \cdot \frac{I}{e_2},$$

altsaa
$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{70}{25} = 2,80.$$

Man kommer paa den Maade til saadanne Tværnsnit, som vist i Fig. 98, Pl. 10. Støbejernsbjælker anvendes dog meget sjældent nu til Dags, saa Forholdet har ikke stor Betydning: forøvrigt følger Støbejern ikke Hooke's Lov.

Til Slut ville vi blot endnu anstille en Sammenligning mellem de forskellige Tværsnitsformer med Hensyn til deres Brugbarhed til Bjælker. Et absolut Maal herfor kan faas ved Koefficienten $W:F^{\frac{3}{2}}$, hvor F betyder hele Tværsnitsarealet. Værdien af denne Koefficient for forskellige Tværnsnit er følgende:

Kvadrat, den neutrale Axe parallel med Kanterne	0,167
Kvadrat, den neutrale Axe i Diagonalen	0,118
Rektangel, $h = \frac{1}{2} b$	0,118
— $h = \frac{3}{2} b$	0,204
— $h = 2b$	0,236
— $h = 3b$	0,289
Cirkel	0,141
I-Jærn, tysk Normal Profil Nr. 10	0,984
— — — » 20	1,104
— — — » 30	1,140
— — — » 40	1,144
— — — » 50	1,145
[-Jærn, tysk Normal Profil Nr. 10	0,835
— — — » 20	1,051
— — — » 30	1,193
Zores-Jærn, — — — » 9	0,605
— — — » 11	0,640

De nordamerikanske Profiljærn *) ere gennemgaaende noget mere økonomiske, navnlig de spinkleste af hvert Profilnummer (samme Nummer leveres i forskellige Tykkelser, forskellig Vægt pr. Fod); eksempelvis anføres (engelsk Maal):

*) »American standards«, se »The Carnegie Steel Co's pocket companion« 1896.

24"	I,	100	lbs. pr. Fod		1,244
"	"	80	—		1,545
20"	"	75	—		1,253
"	"	65	—		1,404
12"	"	35	—		1,151
"	"	31,5	—		1,277
4"	"	10,5	—		0,663
"	"	7,5	—		0,913
15"	□,	55	—		0,882
"	"	33	—		1,339
12"	"	40	—		0,813
"	"	20,5	—		1,445
4"	"	7,25	—		0,740
"	"	5,25	—		0,985

For Pladejærnsdragere, saaledes som de sædvanlig konstrueres, kan Koefficienten ved stor Højde af Drageren naa op til 2,0, men er hyppigst betydelig lavere.

Opg. 22. En i begge Ender simpelt understøttet Bjælke af valset I-Jærn (tysk Normal-Profil, se »Hütte«) har Længden 7,0^m (mellem Understøtningerne) og skal bære 2100 kg. pr. m. foruden sin egen Vægt. Tilladelig Paavirkning regnes til 800 kg./cm². Bestem Profilnummer og største Nedbøjning ($E = 2000000$ kg./cm.²).

§ 34. Dimensionsbestemmelse ved Hjælp af Nedbøjningerne. Som nævnt allerede i § 24 ved Omtale af Dimensionsbestemmelsen er det ikke altid tilstrækkeligt at sørge for, at Spændingen ikke overskrider det tilladelige; man maa undertiden ogsaa *sikre sig, at Nedbøjningen ikke bliver for stor*. Efterat vi nu i det foregaaende have fundet Nedbøjningen udtrykt som Funktion af Belastningen, er det let at se, hvorledes de fundne Formler kunne benyttes til Dimensionsbestemmelse.

Exempel 1. En i begge Ender simpelt understøttet Bjælke af valset I-Jærn (tysk Normal-Profil) har Længden 8^m. og skal bære 900 kg. pr. m. Bestem Profilnummeret, naar Nedbøjningen ikke maa overskride $\frac{1}{800}$ af Længden. I § 28, 2, er fundet en saadan Bjælkes største Nedbøjning:

$$y_{\max.} = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{EI}.$$

Heraf faar man med $E = 2000000 \text{ kg./cm.}^2$:

$$I = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{E} \cdot \frac{600}{l} = \frac{5}{384} \cdot \frac{9 \cdot 800^3 \cdot 600}{2000000} = 18000 \text{ cm.}^4.$$

Der skal da anvendes (se »Hütte«) Pr. Nr. 36, som har $I = 19766 \text{ cm.}^4$, medens Nr. 34 kun har $I = 15827 \text{ cm.}^4$. Hvis man her vilde bestemme Dimensionen saaledes, at Fiberpaa-
virkningen ikke overskred 800 kg./cm.^2 , vilde man faa:

$$W = \frac{\frac{1}{8} pl^2}{800} = \frac{9 \cdot 800^2}{8 \cdot 800} = 900 \text{ cm.}^3,$$

og kunde da bruge Pr. Nr. 34, for hvilket $W = 931 \text{ cm.}^3$.

Opgaven stilles naturligvis altid saaledes, at man skal sørge for, at *hverken* Spændingen *eller* Nedbøjningen overskrider det tilladelige, og det skulde herefter synes nødvendigt altid at foretage Dimensionsbestemmelsen paa begge Maader. Dette kan dog i Almindelighed undgaas. Man bestemmer først Dimensionerne ved Ligningen $M = r \cdot W$ og undersøger dernæst ved en én Gang for alle — for en bestemt Belastningsmaade — udledet Betingelse, om Nedbøjningen bliver for stor.

Naar man f. Ex. har med ensformig Belastning at gøre og — for en i begge Ender simpelt understøttet Bjælke — har bestemt Profilet ved Ligningen:

$$M_{\max.} = \frac{1}{8} pl^2 = r \cdot W = r \cdot \frac{I}{e},$$

saa bliver Nedbøjningen med dette Profil:

$$y_{\max.} = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{EI} = \frac{5}{48} \cdot \frac{l^2}{EI} \cdot \frac{rl}{e} = \frac{5}{48} \frac{l^2 r}{Ee}.$$

Hvis Nedbøjningen nu ikke maa overskride $\frac{1}{n} l$, faar man med $r = 800 \text{ kg. cm.}^2$, $E = 2000000 \text{ kg. cm.}^2$ (Jærnbjælker):

$$\frac{1}{n} l > \frac{5}{48} \cdot \frac{l^2}{2500 \cdot e}.$$

og naar for et symmetrisk Profil $e = \frac{1}{2} h$:

$$\frac{1}{n} > \frac{5}{24 \cdot 2500} \cdot \frac{l}{h} = \frac{1}{12000} \frac{l}{h}.$$

Hvis n sættes lig 600—800, bliver altsaa Betingelsen for, at et ved Ligningen $M = r \cdot W$ bestemt Profil af en Jærnbjælke ikke giver for stor Nedbøjning:

$$\frac{h}{l} > \frac{1}{20} - \frac{1}{15}. \quad (33).$$

Paa lignende Maade gaar man frem ved andre Belastnings- eller Understøtningsmaader.

Opg. 23. Find Betingelsen for, at Nedbøjningen ikke overskrider $\frac{1}{600} - \frac{1}{800}$ af Bjælkens Længde, 1) naar denne er simpelt understøttet i begge Ender og paavirket af en Enkeltkraft paa Midten; 2) naar Bjælken er indspændt i den ene Ende, fri i den anden, og belastet enten ensformigt over hele Længden eller med en Enkeltkraft i den frie Ende. Bjælkens Materiale er Jærn, $r:E$ regnes til $\frac{1}{8000}$.

Der kan ogsaa under andre Former frembyde sig Opgaver, hvor man maa benytte Udtrykkene for Nedbøjningerne til Dimensionsbestemmelse, saaledes naar to Bjælker af forskelligt Materiale eller blot med forskelligt Tværnsnit eller Længde skulle virke i Fællesskab. Naar f. Ex. to ikke ganske ens Bjælker ligge saaledes ved Siden af hinanden eller over hinanden, at de maa hjælpes ad med at bære Belastningen, saa ved man ikke paa Forhaand, hvor stor en Del af denne der bæres af hver Bjælke; derimod ved man ofte, at Bjælkerne ere tvungne til at følges ad, saa Nedbøjningerne i visse Punkter blive de samme, og ved Hjælp heraf kan man i mange Tilfælde faa de manglende Betingelser til Spørgsmaalets Besvarelse.

Exempel 2. En valset Jærnbjælke, tysk Normal-Profil I Nr. 30, og to Træbjælker af samme Højde og med samme Længde 4^m. mellem Understøtningerne skulle i Fællesskab bære en Belastning af 6^u paa Midten; der spørges om Bredden af Træbjælkerne, idet den tilladelige Fiberpaavirkning for Jærn regnes til 800 kg./cm.², for Træ til 60 kg./cm.².

Bjælkernes Tværnsnit ses i Fig. 99, Pl. 10; Belastningen overføres ved et Tværstykke, saaledes at Nedbøjningen paa Midten bliver den samme. Af hele Belastningen P ($= 6^u$) antages P_1 at falde paa Jærnbjælken, P_2 paa de to Træbjælker, og idet Udtrykket for Nedbøjningen ifølge § 28, 1, er:

$$y_{\max.} = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EI},$$

maa man have:

$$\frac{P_1}{E I_1} = \frac{P_2}{E_2 I_2},$$

hvor Mærket 1 gælder Jærnbjælken, Mærket 2 Træbjælkerne.

Endvidere ere de største Momenter i de to Bjælker: $\frac{1}{4} P_1 l$ og $\frac{1}{4} P_2 l$, og ved at kombinere Ligningen $M = \sigma \cdot \frac{I}{e}$ med den ovenfor faas, idet e er den samme for begge Bjælker:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{M_1}{M_2} = \frac{\sigma_1 I_1}{\sigma_2 I_2} = \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2}, \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_1}{E_2}.$$

Naar nu $E_1 = 2000000 \text{ kg./cm.}^2$, $E_2 = 110000 \text{ kg./cm.}^2$, ser man, at σ_1 og σ_2 aldrig samtidig kunne naa de givne tilladelige Fiberpaavirkninger; hvis σ_1 ikke maa overskride 800 kg./cm.^2 , kan σ_2 kun naa op til 44 kg./cm.^2 , eller med andre Ord: naar Bjælkerne skulle bøje sig lige meget ned, og naar σ_1 skal være lig 800 kg./cm.^2 , bliver σ_2 lig 44 kg./cm.^2 .

Hele det bøjende Moment er:

$$M_1 + M_2 = \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot 4 = 6^{\text{tm.}}.$$

Heraf optager Jærnbjælken, idet $W_1 = 659^{\text{cm.}^3}$,

$$M_1 = \sigma_1 \cdot W_1 = 800 \cdot 659 = 527200 \text{ kg. cm.} = 5,272^{\text{tm.}}.$$

Altsaa er $M_2 = 0,728^{\text{tm.}}$, og idet Modstandsmomentet for de to Træbjælker tilsammen er $\frac{1}{8} \cdot 2b \cdot 30^2 = 300b^{\text{cm.}^3}$, findes b af:

$$72800 = 44 \cdot 300 \cdot b, \quad b = 5,5^{\text{cm.}}$$

Opg. 24. Skinnerne paa en Jærnbanebro hvile paa Langsveller af Hel-tømmer, og disse understøttes direkte af Tværbjælkerne, hvis Afstand er $1,6^{\text{m.}}$; mellem Skinne og Langsvelle er der lige over Tværbjælkerne og midt mellem disse indskudt Underlagsplader. For Skinneprofilet er $I = 1036^{\text{cm.}^4}$, $W = 154^{\text{cm.}^3}$ i ubrugt Tilstand, men $I = 800^{\text{cm.}^4}$ og $W = 120^{\text{cm.}^3}$, naar Skinnen er slidt saa meget som tilladeligt. Største Hjultryk er $6,5^{\text{tm.}}$. Hvilken Dimension skal Langsvellen have, naar Fiberpaavirkningen for den slide Skinne ikke maa overskride 900 kg./cm.^2 , for Træet 60 kg./cm.^2 ? Hvor store ere Spændingerne, medens Skinnerne ere nye? Skinner og Sveller regnes som simpelt understøttede Bjælker fra Tværbjælke til Tværbjælke. Elastitetskoefficienterne ere de samme som i Exemplet ovenfor. [Først udledes

Formlen: $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_1 e_1}{E_2 e_2}$, hvori det ubekendte $h = 2e_1 =$ Langsvellens

Højde og det bekendte $e_2 = \frac{I_2}{W_2}$ (for Skinnen) indføres. Herved findes, at

Langsvellens Fiberpaavirkning først naar den tilladelige Grænse, σ_2 sættes derfor Hg 60 kg./cm.², og σ_1 udtrykkes ved h . Dernæst anvendes Ligningerne: $M_1 = \sigma_1 W_1$ og den analoge samt Ligningen $P_1 + P_2 = 6500$ kg. Man finder $h = 27^{\text{cm.}}$]

§ 35. Forudsætningerne for den udviklede Bøjningstheori. Vore Betragtninger over Bøjning hidtil hvile paa forskellige Forudsætninger, som vi ville undersøge lidt nærmere. De ere af højst forskellig Art; nogle ere rent vilkaarlige og ere kun gjorte for paa dette Standpunkt at simplificere Behandlingen, andre ere nødvendige, for at man overhovedet skal kunne føre Beregningerne igennem, og forøvrigt repræsenteres alle Stadier mellem disse to Yderpunkter.

At vi have antaget *alle de ydre Kræfter virkende i samme Plan og vinkelret paa Bjælkens Længderetning, og at Kraftplanen er en Symmetriplan* for Bjælken, er naturligvis ganske vilkaarligt, og vi skulle ogsaa senere gennemføre Behandlingen uden disse Indskrænkninger; det er imidlertid det i Praxis hyppigst forekommende Tilfælde.

Dernæst have vi antaget *Bjælkens Tværnsnit konstant*, hvilket langtfra saa hyppigt er Tilfældet i Virkeligheden. Vi skulle i næste § undersøge Indflydelsen af Tværsnittets Variation og angive de herved bevirkede Modifikationer i Beregningerne.

Endvidere have vi forudsat *Formforandringerne saa smaa, at de ere forsvindende i Sammenligning med Bjælkens Længde*. Vi have gjort Brug heraf ved Opskrivningen af alle Ligevægtsbetingelserne mellem ydre og indre Kræfter og endelig

ved at sætte $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$, hvorved Bestemmelsen af Nedbøjning-

erne simplificeres overordentlig. Betragtningen af den elastiske Linie som Tovpolygon og alle de heraf udledede Konstruktioner, specielt hele den givne Behandling af statisk ubestemte Bjælker, beror herpaa. Denne Forudsætning opstiller man imidlertid ikke blot her; den anvendes meget hyppigt i den tekniske Mekanik; man maa saa blot erindre, at de fundne Formlers Gyldighed er bunden hertil. Enkelte Steder i det følgende — ved Beregning af Søjler o. l. — skulle vi gennemføre Undersøgelsen uden denne Indskrænkning.

Dernæst have vi forudsat, at *de fra Forskydningen hidrørende Nedbøjninger ere forsvindende i Sammenligning med de*

fra Momenterne hidrørende. Til denne Forudsætning er den ovenfor meddelte Bestemmelse af Nedbøjningerne og den hele Behandling af de statisk ubestemte Bjælker bunden. Man gør næsten altid denne Forudsætning i Praxis; vi skulle i § 39 undersøge med hvor stor Berettigelse.

Endvidere gælder hele den foregaaende Udvikling kun *under Forudsætning af Hookes Lov*, og efter hvad der tidligere er meddelt herom, vil dette i Virkeligheden sige, at den strengt taget kun gælder for *smedeligt Jærn* (Svejsjærn og Staal) og det endda kun *indenfor Proportionalitetsgrænsen*. Man anvender ikke desto mindre sædvanligvis de fundne Formler ogsaa for andre Materialer og korrigerer dem i fornødent Fald ved Tilføjelse af Erfaringskoefficienter. I Løbet af de sidste Par Aar er der imidlertid udført nøjagtige Elasticitetsmaalinger for en Del af de hyppigst anvendte Materialer, saa man begynder at faa det nødvendige Erfaringsgrundlag for Opstillingen af nøjagtigere Relationer mellem Spændinger og Formforandringer og herved ogsaa for Opstillingen af en nøjagtigere Bøjningstheori for de Materialer, for hvilke Hooke's Lov ikke gælder. Det nærmere herom skal meddeles i Afsnittet om Materialernes elastiske Egenskaber (specielt § 52).

Endelig have vi forudsat, at *et plant Normalsnit i Bjælken holder sig plant under Bøjningen*. Ved Behandlingen af Vridning saa vi, at den tilsvarende Forudsætning dér kun var opfyldt i et ganske specielt Tilfælde, og Grunden hertil var, at der optraadte Forskydningsspændinger i Længdesnit i Legemet. Det samme er næsten altid Tilfældet her (§ 38), og Virkningen deraf maa ogsaa her være, at Tværnittene krumme sig noget.

Man kan imidlertid paa forskellige Maader vise, at Forudsætningen om, at Tværnittene holde sig plane, er nøjagtig nok, i alt Fald for Bjælker af smedeligt Jærn. Man kan saaledes anvende de ovenfor fundne Formler for Nedbøjningerne til en experimentel Bestemmelse af Elasticitetskoefficienten: for en i begge Ender simpelt understøttet Bjælke, der er belastet med en Enkeltkraft i Midten, haves (§ 28, 1):

$$y_{\max} = \frac{Pl^3}{48EI}, \text{ altsaa } E = \frac{Pl^3}{48I \cdot y_{\max}}.$$

For det her nævnte Formaa's Skyld er denne Formel dog ikke nøjagtig nok: der maa ogsaa tages Hensyn til den af

Forskydningen bevirkede Nedbøjning. Naar vi (i § 39) have andet et Udtryk herfor, skulle vi komme tilbage til Spørgsmaalet; her skal blot nævnes, at man for det nævnte Materiale virkelig finder en tilstrækkelig Overensstemmelse mellem den ved denne Vej bestemte Elasticitetskoefficient og den ved Træksforsøg fundne Værdi.

Dernæst kan man direkte undersøge Forudsættningens Gyldighed. *Bauschinger* og *Bach* have ved Forsøg med Stænger af smedeligt Jærn ikke kunnet paavise nogen Krumning af Tværnittene*), *Considère***) heller ikke. Her skal nærmere omtales nogle nyere Undersøgelser af *Föppl****)) med Bjælker af Granit og Sandsten (for hvilke Materialer Hooke's Lov ikke gælder). Bjælkerne vare simpelt understøttede i to Punkter med 1,5^m. Afstand, Tværnittet rektangulært med $b = 20^{\text{cm}}$, $h = 30^{\text{cm}}$; de belastedes med en Enkeltkraft i Midten. Undersøgelsen af Tværnittets Form efter Bøjningen udførtes paa to forskellige Maader. Først anbragtes i et Normalsnit i Bjælken i den med Kraftretningen parallelle Sideflade en Række Stifter, hvorpaa der kunde befæstes Spejle, hvis Drejning kunde aflæses meget nøjagtigt. Hvis Normalsnittet holdt sig plant under Bøjningen, skulde man finde lige store Drejninger af alle Spejlene. Resultatet af disse Forsøg, der gentoges for forskellige Normalsnit og baade med Granit- og Sandstens-Bjælker, var, at der i alt Fald ikke fandtes nogen væsentlig Afvigelse fra Planen; dog viste i Almindelighed det yderste Spejl paa Træksiden en noget større Drejning end de andre.

Dernæst anbragtes to Rækker Stifter i to Normalsnit, hvis indbyrdes Afstand var ca. 150^{m.m.}. Naar Bjælken bøjedes, bleve naturligvis Fibrene paa den ene Side af den neutrale Axe forlængede, paa den anden Side forkortede, og disse Variationer i Længde kunde direkte maales mellem Stifterne. Resultaterne af saadanne Maalinger (Middeltal af Maalinger paa begge Sider af Bjælkerne) ses i Fig. 100, Pl. 11, for en Granitbjælke, i Fig. 101, Pl. 11, for en Sandstensbjælke. For den første var Belastningen i Midten 8^u, Midtpunktet mellem de to Normalsnit laa 60,25^{cm} fra den ene Understøtning; for

*) C. Bach: *Elasticität und Festigkeit*, 2. Aufl. Berlin, 1894, S. 96.

**) *Annales des ponts et chaussées*, 1885, I., S. 614.

***)) *Mittheilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der k. technischen Hochschule in München*. 24. Heft. 1896.

Sandstensbjælken var Belastningen $1,2^{11}$ og Midtpunktet mellem Normalsnittene fjernet $60,0^{cm}$ fra Understøtningen. I begge Figurer ere Længdeforandringerne pr. Længdeenhed (ϵ) afsatte som Ordinater ud fra Axen AB , Forlængelser nedad, Forkortelser opad, og Endepunkterne ere forbundne. Den herved fremkomne brækkede Linie ab skulde da vise sig at være en ret Linie, hvis Tværsnittet holdt sig plant; man ser, at Afbigelsene ere størst paa Træksiden. Ordinaternes relative Størrelser ere angivne paa Figurerne; de absolute Størrelser faas deraf ved Multiplikation med 10^{-5} .

Resultatet af disse Forsøg er altsaa, som man kunde vente, at Forudsætningen faktisk ikke er ganske korrekt, men at Afbigelsene dog ikke for Bjælker af Granit og Sandsten ere større, end at man fremdeles kan bruge Forudsætningen, selv om man paa den Maade kun faar en Tilnærmelse. Om Tilnærmelsen er nøjagtig nok for andre Materialer end de her nævnte, maa strengt taget først konstateres ved lignende Experimenter; for Støbejern f. Ex. mener *Tetmayer**), at Tværnittene ikke holde sig plane. Foreløbig maa man imidlertid slaa sig til Ro med Forudsætningen om de plane Tværnit og, om fornødent, korrigere Resultaterne ved en Erfaringskoefficient.

Endnu have vi gjort en i alt Fald stiltiende Forudsætning, nemlig at *de enkelte Fibre i Bjælken ikke indvirke paa hinanden* under Bøjningen. Dette er naturligvis ikke korrekt. De Fibre, der blive strakte, ville samtidig trække sig noget sammen paa tværs (§ 14), de trykkede Fibre ville udvide sig paatværs. Selve denne Omstændighed, der direkte fører til, at Arealet af den trykkede Del af Tværsnittet bliver noget større end indført i Beregningen, Arealet af den strakte Del noget mindre, spiller ingen væsentlig Rolle, saalænge Paavirkningen holder sig indenfor Proportionalitetsgrænsen; at se bort herfra betyder i Virkeligheden det samme som at betragte Formforandringerne som forsvindende Størrelser. Det, som det her kommer an paa, er, at denne Udvidelse eller Sammentrækning paatværs ikke kan foregaa uhindret, fordi den ikke har samme Størrelse for alle Fibre, og denne Omstændighed bevirker, som vi have set i § 17, en Forøgelse af Bæreevnen. For at faa en klar Forestilling om, hvad der foregaar, ville vi tænke os Bjælkens

*) *L. Tetmayer: Die Baumechanik, Zürich, 1889, Side 256.*

Tværsnit rektangulært og før Bøjningen inddelt i lige store Kvadrater (Fig. 102 a, Pl. 10). Naar vi tænke os Normalpændingen i Tværnittet konstant indenfor hvert af Kvadraterne, vil hvert af disse Elementer udvide sig eller trække sig sammen lige meget i begge Retninger, nemlig $\frac{1}{m} \cdot \epsilon$, naar ϵ beegner Formforandringen pr. Længdeenhed paa langs, og Elementernes Form efter Bøjningen bliver altsaa kvadratisk. Idet ϵ er proportional med Afstanden fra den neutrale Axe, bliver Formforandringen i Tværretningen ogsaa proportional med denne Afstand; en Række Kvadrater i samme Afstand fra den neutrale Axe forandres lige meget i Størrelse, og Længden af Kvadratsiderne i de forskellige Rækker varierer med Afstanden fra Axen. Da nu Tværnittet skal blive ved at være sammenhængende, maa dets Form efter Bøjningen blive som vist i Fig. 102 b; den neutrale Axe krummer sig efter en Cirkelbue, og de dermed parallelle Kvadratsider komme til at ligge paa koncentriske Cirkler. Man udleder let, at naar Krumningsradius for den neutrale Linie i det betragtede Punkt af Bjælken kaldes ρ , bliver Krumningsradius for den neutrale Axe lig $m \cdot \rho$.

Størrelsen af denne Indvirkning af de enkelte Fibre paa hinanden afhænger i høj Grad af Tværsnitsformen*). Tænker man f. Ex. paa et I-formet Profil (som i Fig. 96, Pl. 10), ville Flangerne kunne forandre Form i Tværretningen temmelig uhindret. Man maa altid i Virkeligheden have en noget større Bæreevne end den, som følger af Formlerne ovenfor, men Overskridelsen ud over det beregnede maa være betydelig større for et massivt Tværsnit, som Rektangel, Cirkel e. l., end for et I-Profil. I en Vignoleskinne maa Overskridelsen være større i Hovedet end i Foden, saa den neutrale Axe ligger her sandsynligvis lidt over Tyngdepunktet.

Omendskønt det egentlig ikke hører herhen, da det forudsætter Paavirkninger langt ud over Proportionalitetsgrænsen, skal dog nævnes et Par Forsøg af *Considère***), der tydelig vise den her omtalte Virkning. En Stang (Staal) med kvadratisk Tværsnit og 39^{m.m.} Sidelinie paavirkedes til Bøjning nær op mod Brudgrænsen. Tværnittet antog da nøjagtigt den i Fig. 102 b viste Form med skarpe Kanter; Højden var

*) C. Bach: *Elasticität und Festigkeit*, 2. Aufl. Berlin 1894, S. 94 o. f.

**) *Annales des ponts et chaussées*, 1885, I., S. 611—18.

uforandret $39^{m.m.}$, men Bredden var $43^{m.m.}$ paa Tryksiden, $34,5^{m.m.}$ paa Træksiden. En anden Stang af blødt Staal med (oprindelig) kvadratisk Tværsnit ($16,5^{m.m.}$ Sidelinie) paaavirkedes til Bøjning indtil Brud, hvorved Tværnittet antog den i Fig. 103, Pl. 10, viste Form. Krumningradius for den neutrale Linie var ca. $86^{m.m.}$, for den neutrale Axe ca. $174^{m.m.}$, hvilket vilde give $m = 2,03$. Naturligvis kan dog et Brudforsøg ikke bruges til Bestemmelse af m .

§ 36. Variabelt Tværsnit. I de valgte Exempler paa Anvendelsen af Bøjningstheorien har der stadig været forudsat konstant Tværsnit. De udviklede almindelige Formler kunne imidlertid bruges uafhængigt af denne Forudsætning, naar blot Tværnittet ikke varierer altfor hurtigt: hvis dette er Tilfældet, kunne nemlig Spændingerne i de Elementer, der ligge tæt ude ved Overfladen, ikke virke vinkelret paa Tværnittet, som forudsat ved Opstillingen af Ligevægtsbetingelserne. I Praxis udføres Tværsnitsvariationen enten kontinuerligt eller i pludselige Spring; i sidste Tilfælde kan Anvendelsen af Bøjningstheorien naturligvis ikke give rigtige Resultater i den umiddelbare Nærhed af de Punkter, hvor Variationen sker, men i det hele og store faar man dog en meget god Tilnærmelse. Hvis Variationen foregaar kontinuerligt og som sædvanligt i Praxis nogenlunde langsomt, faas en upaaklagelig Tilnærmelse.

At Tværnittet ikke er konstant, kommer først til at spille en Rolle, naar der spørges om Formforandringerne. Ligningerne (12) i § 24 — Ligevægtsbetingelserne mellem de ydre Kræfter — berøres naturligvis aldeles ikke. Ligningerne (13) — Ligevægtsbetingelserne mellem de ydre Kræfter paa den ene Side af et vilkaarligt Snit og de indre Kræfter i dette Snit — ere ligeledes rigtige, selv om Tværnittet varierer, naar man blot indfører det betragtede Snits Inertimoment. Den neutrale Axe gaar altsaa ogsaa her gennem Tværnittets Tyngdepunkt, og Forskydnings- og Normalspændinger bestemmes som tidligere, specielt er Spændingen σ givet ved

$$\sigma = \frac{M}{I} \cdot y.$$

og heraf følger, at Dimensionsbestemmelsen udføres ved (18)

ler (18 a): $M = r \cdot W$, naar man blot kender Momentet. Man maa man her muligvis udføre Dimensionsbestemmelsen paa flere forskellige Punkter af Bjælken. Saa længe Tværsnittet er konstant, var det farligste Punkt det, hvor det største Moment optraadte; nu afhænger det af Loven, hvorefter Tværsnittet skal variere, og af Momentets Variation, hvor det farligste Snit findes. Grunden til, at man lader Tværsnittet variere, vil i Almindelighed være Ønsket om at spare Materiale, og den mest økonomiske Variation faar man, naar Modstandsmomentet varierer saaledes, at Fiberpaavirkningen $\sigma = \frac{M}{W}$ er konstant og lig den tilladelige Paavirkning r . Naar man kender Momentkurven, kan dette opnaas ved at beregne W for hvert Punkt efter ovennævnte Ligning. Vi skulle nedenfor undersøge, hvilke Former af Bjælken man kommer til paa den Maade; foreløbig ville vi ikke indskrænke os til denne bestemte Lov for Variationen.

For *statisk bestemte Bjælker* er der altsaa intet nyt at føje til angaaende Beregningen af Spændingerne eller Dimensionerne; det nye viser sig først, naar der spørges om Formforandringerne. Hvis man vil *beregne* disse, har man hertil Differentialligningen for den elastiske Linie:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{M}{EI},$$

hvor nu blot I ikke er konstant og altsaa ikke kan flyttes udenfor Integrationstegnet. Inertimomentet kan enten være givet som en kontinuerlig Funktion af x , eller derved, at $I = I_1 = \text{konst.}$ paa Strækningen fra $x = 0$ til $x = x_1$, $I = I_2 = \text{konst.}$ fra $x = x_1$ til $x = x_2$ o. s. v.; i sidste Tilfælde maa man dele Integrationen, men forøvrigt bære sig ad som sædvanligt. I et Punkt, hvor Tværsnittet pludselig varierer, har I og altsaa ogsaa $\frac{d^2y}{dx^2}$ to forskellige Værdier; $\frac{dy}{dx}$, der findes ved Integration af Udtrykket ovenfor (en Arealbestemmelse), har derimod kun én Værdi i Punktet, y naturligvis ligeledes. Integrationskonstanterne bestemmes altsaa efterhaanden derved, at y og $\frac{dy}{dx}$ skulle være de samme i Overgangspunkterne, ganske som om der her virkede Enkelt-

kræfter; Diskontinuiteten i den neutrale Linie ses dog være af en, noget anden Art her end i en Enkeltkrafts Angrebspunkt (smkgn. § 26, Slutn.).

Hvis man vil konstruere den elastiske Linie som Tovpolygon, skal man jo benytte Belastningen $p = M$, Poldistancen El . I Stedet for, naar l nu varierer, at benytte en variabel Poldistance — hvilket man for Resten meget godt kan — er det i Almindelighed bekvemmere at multiplicere baade Belastning og Poldistance med samme Tal, $I_0 : l$, altsaa at tegne Tovpolygonen med Poldistancen El_0 til Belastning

kurven $p = M \cdot \frac{I_0}{l}$. I_0 betegner et konstant Inertimoment og vælges bekvæmest som et af de virkelig forekommende Inertimomenter. Herefter er der egentlig intet nyt at føje til ved virkelige Konstruktioner, hvor Momentfladen er bestemt som en Tovpolygon (med Poldistance h), benytter man ligesom i § 26, Slutningen, en Poldistance h_1 for den elastiske Tovpolygon:

$$h_1 = \frac{El_0}{n \cdot a \cdot h},$$

og faar derved Nedbøjningerne forstørrede n Gange i Forhold til Tegningens Længdemaalestok.

Exempel 1. Tegn Nedbøjningslinien for den samme Bjælke som i Exemplet i § 26, Slutningen, Fig. 60, Pl. 7, naar Tværnittet varierer saaledes, at der paa det midterste Stykke EF af Bjælken bruges det i Figuren viste Tværnit (en Pladejærnsdrager med to Plader i Hoved og Fod), paa Stykkerne CE og FD samme Tværnit, men kun med én Plade i Hoved og Fod, og paa Stykkerne AC og DB endelig samme Tværnit uden Plader.

Inertimomenterne paa de tre Strækninger ere (uden Fradrag af Nittehullerne):

$$\begin{array}{ll} \text{paa Stykket } EF & \dots \dots \dots I = 910750 \text{ cm.}^4 \\ \text{— Stykkerne } CE \text{ og } FD & \dots \dots \dots I = 699920 \text{ —} \\ \text{— } AC \text{ — } DB & \dots \dots \dots I = 497200 \text{ —.} \end{array}$$

Naar nu Inertimomentet for EF vælges som I_0 , haves

$$\text{for Stykkerne } CE \text{ og } FD: \quad \frac{I_0}{I} = 1,30,$$

$$\text{— } AC \text{ og } DB; \quad \frac{I_0}{I} = 1,83.$$

Man multiplicerer da Ordinaterne i Momentfladen paa **Stykkerne** CE og FD med 1,3, paa **Stykkerne** AC og DB med 1,83, og til den saaledes transformerede Momentflade $C_1C'E_1E'FF_1D'D_1B'$ i Fig. 60) tegnes en Tovpolygon med **højden** $h_1 = 30,36^m$ (se Exemplet i § 26). I Fig. 60 er **Stykkerne** dog ikke tegnet for ikke at gøre Figuren utydelig.

Ganske paa samme Maade danner man først — ved **Multiplikation** med $I_0:I$ — den **transformerede Momentflade**, hvis **højden** vil **beregne** Nedbøjningerne som Momenter.

Exempel 2. Find Tangentvinkel α_b og Nedbøjning y_b i den frie Ende B af en ved A indspændt Bjælke, der i B er lastet med Kraften P , naar Inertimomentet paa den yderste halvdel af Længden kun er halvt saa stort som paa Stykket nærmest A (Fig. 104, Pl. 10).

Momentfladen er en Trekant med Højden $P \cdot l$ ved A ; den transformerede Momentflade er vist skraveret i Figuren, idet Inertimomentet ved A er valgt som I_0 . Naar man lader dette skraverede Areal virke som Belastning paa en ved B indspændt, ved A fri Bjælke, findes Transversalkraften ved B lig:

$$\frac{1}{2} \cdot l \cdot Pl + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} l \cdot \frac{1}{2} Pl = \frac{5}{8} Pl^2,$$

og Momentet ved B :

$$\frac{1}{2} Pl^2 \cdot \frac{2}{3} l + \frac{1}{8} Pl^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} l = \frac{3}{8} Pl^3;$$

altsaa er

$$\alpha_b = \frac{5}{8} \frac{Pl^2}{EI_0}, \quad y_b = \frac{3}{8} \frac{Pl^3}{EI_0}.$$

Opg. 25. Find Tangentvinklen ved Understøtningerne og Nedbøjningen i Midten for en i begge Ender simpelt understøttet Bjælke med ensformig fordelt Belastning, naar Inertimomentet paa den midterste Halvdel af Bjælkens Længde er $\frac{4}{3}$ Gange saa stort som ved Enderne af Bjælken.

For **statisk ubestemte Bjælker** maa man allerede tage Hensyn til Tværnittets Variation ved Bestemmelsen af Dimensionerne (Momenterne, Transversalkræfterne, Spændingerne), idet man jo hertil benytter Betingelser fra Formforandringerne. Man kan anvende alle de tidligere (f. Ex. i § 31) udviklede Metoder; vi skulle vise dette ved et Par Exempler.

Exempel 3. En ved begge Ender indspændt Bjælke er belastet med p pr. Længdeenhed. Inertimomentet er $\frac{1}{2} I_0$ paa

den midterste Halvdel af Længden, I_0 paa de to Stykker af Længde $\frac{1}{2}l$ ved Enderne.

Paa Grund af Symmetrien ere Reaktionen:

$$A = B = -\frac{1}{2}pl,$$

og de ubekendte Momenter ved A og B ere lige store, $M_a = M_b$. For et Punkt i Afstanden x fra A er:

$$M_x = M_a + \frac{1}{2}plx - \frac{1}{2}px^2 = -EI \frac{d^2y}{dx^2}.$$

For Strækningen nærmest ved A er $I = I_0$ altsaa

$$-EI_0 \frac{dy}{dx} = M_ax + \frac{1}{4}plx^2 - \frac{1}{6}px^3,$$

$$-EI_0y = \frac{1}{2}M_ax^2 + \frac{1}{12}plx^3 - \frac{1}{24}px^4,$$

idet Integrationskonstanterne forsvinde, da $x = 0$ skal give $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$.

For det midterste Stykke af Bjælken, hvor $I = \frac{1}{2}I_0$, haves:

$$-\frac{1}{2}EI_0 \frac{dy}{dx} = M_a \cdot x + \frac{1}{4}plx^2 - \frac{1}{6}px^3 + C,$$

$$-\frac{1}{2}EI_0y = \frac{1}{2}M_ax^2 + \frac{1}{12}plx^3 - \frac{1}{24}px^4 + Cx + C_1.$$

C og C_1 skulle bestemmes saaledes, at $x = \frac{1}{2}l$ giver samme Værdier af y og $\frac{dy}{dx}$ til begge Sider; derved findes:

$$C = -\frac{1}{8}M_al - \frac{5}{768}pl^3, \quad C_1 = \frac{3}{64}M_al^2 + \frac{11}{64^2}pl^4.$$

Idet paa Grund af Symmetrien $x = \frac{1}{2}l$ skal give $\frac{dy}{dx} = 0$, faas til Bestemmelse af M_a :

$$0 = \frac{1}{2}M_al + \frac{1}{16}pl^3 - \frac{1}{4}pl^3 - \frac{1}{8}M_al - \frac{5}{768}pl^3,$$

$$M_a = -\frac{3}{32}pl^2.$$

Nu kunne Momenter og Transversalkræfter i de forskellige Punkter af Bjælken findes ligesom i § 31. Momentet i Midten M_c bliver $(\frac{1}{2} - \frac{3}{32})pl^2 = \frac{1}{32}pl^2$. Med konstant Tværsnit af

jælken fandt vi (§ 31): $M_a = -\frac{1}{12} pl^2$, Momentet i Midten $= \frac{1}{24} pl^2$, altsaa $M_a : M_m = 2 : 1$; naar vi nu her have ladet nærtimomenterne i disse Punkter forholde sig som 2 : 1, findes $I_a : M_m = 3 : 1$.

Nedbøjningerne for Bjælken med variabelt Tværsnit findes ved i den neutrale Linies Ligning ovenfor at indsætte de specielle Værdier af x .

Exempel 4. En i begge Ender indspændt Bjælke, hvis Tværsnit varierer ligesom i Exempel 3, er belastet med en Enkeltkraft i Midten.

Paa Grund af Symmetrien er $A = B = -\frac{1}{2} P$, $M_a = M_b$. Man bestemmer først Tangentvinklen α'_a i Understøtningspunktet, naar P virker paa en simpelt understøttet Bjælke med samme Variation af Tværsnittet som den givne Bjælke, dernæst Tangentvinklen α_a sammesteds, hidrørende fra Kraftparrene M_a og M_b som eneste Belastning paa den simpelt understøttede Bjælke. I Fig. 105, Pl. 11, ere de transformerede Momentflader tegnede, øverst for Kraften P , nederst for Kraftparrene. α'_a og α_a ere lig Reaktionen A for de skraverede Flader som Belastning, dividerede med El_0 . Man finder:

$$\alpha'_a = \frac{7}{64} \frac{Pl^2}{El_0}, \quad \alpha_a = \frac{3}{4} \frac{M_a l}{El_0},$$

og da man skal have $\alpha_a = -\alpha'_a$, faas:

$$M_a = -\frac{7}{48} Pl.$$

Nedbøjningerne findes ved Addition af dem, som Kraften P og Kraftparrene M_a frembringe, naar de virke hver for sig paa den simpelt understøttede Bjælke med den givne Variation af Tværsnittet. — Hvis der ikke var Symmetri, maatte man for at kunne danne den til Kraftparrene M_a og M_b svarende transformerede Momentflade dele Momenttrapezet i to Trekkanter og multiplicere hver af dem med $I_0 : I$; Vinklen α_a vilde da faas som Summen af de Drejninger, der bevirkes af M_a alene og M_b alene.

Den grafiske Konstruktion, ved hvilken den elastiske Tovpolygon direkte benyttes (§ 31, c.), kan ligeledes let anvendes med variabelt Tværsnit. De tre Kræfter, til hvilke Tovpolygonen skal konstrueres, blive da: den transformerede simple Momentflade og de transformerede Momenttrekanter

svarende til M_a og M_b , og Kræfternes Retningslinier gaa gennem Tyngdepunkterne for disse transformerede Flader; de to yderste Kræfter virke altsaa ikke mere i Trediedelsvertikalerne, men deres Retningslinier ses let at være uafhængige af Størrelsen af M_a og M_b , saa de kunne bestemmes ved at »transformere« et Par Trekanten med vilkaarlige Højder.

Paa samme Maade kan den tilsvarende Konstruktion for kontinuerlige Bjælker og ligeledes *Cl. Fidlers* Konstruktion anvendes med variabelt Tværnsnit; principielt er der ingen synderlig Vanskelighed forbunden dermed, men den virkelige Udførelse af Konstruktionen besværliggøres ved alle de Transformationer af Momentfladerne, som blive nødvendige. Vi skulle ikke komme nærmere ind herpaa, da det hele ikke spiller nogen synderlig Rolle i Praxis. Indspændte Bjælker forekomme yderst sjældent; kontinuerlige Bjælker forekomme nok, *men det viser sig her, at man ikke begaar nogen videre stor Fejl ved at regne med konstant Tværnsnit*, og det gør man da saa godt som altid, naar man overhovedet kan nøjes med den i § 32 meddelte Beregning. For Brodragere, hvor en Del af Belastningen er bevægelig, maa man først finde den farligste Stilling af Belastningen, og ved de nærmere Under søgelser af kontinuerlige Bjælker, som i den Anledning blive nødvendige, kan man temmelig let tage Hensyn til den mulige Variation af Tværnsnittet.

Opg. 26. En ved A indspændt, ved B simpelt understøttet Bjælke er belastet med en Enkeltkraft i Midten eller ensformigt med p pr. Længdeenhed. Find Indspændingsmomentet, naar Inertimomentet paa den ved A nærmeste Halvdel af Længden er dobbelt saa stort som paa den anden Halvdel.

Opg. 27. En ved begge Ender indspændt Bjælke er paavirket af en Enkeltkraft P i Afstanden a fra den ene Ende. Find Indspændingsmomenterne, naar Inertimomentet paa den midterste Trediedel af Længden er $\frac{2}{3}I_0$, paa de to yderste Trediedele I_0 .

§ 37. Bjælker med konstant største Fiberspænding. Idet vi her kun tænke paa Bjælker, hvis Tværnsnit er symmetrisk om den neutrale Axe, skal Modstandsmomentet i hvert Punkt bestemmes saaledes, at

$$W = \frac{M}{r},$$

hvor r er konstant; W maa variere med M . Ifølge Ligning 16), § 24, er

$$M = \frac{EI}{\varrho},$$

og idet $e_1 = e_2 = \frac{1}{2}h$, altsaa $W = \frac{2I}{h}$, faas:

$$\varrho = \frac{Eh}{2r}. \quad (34).$$

For en Bjælke, hvis Tværsnit varierer saaledes, at største Spænding er konstant, er Krumningsradius proportional med Højden; naar h er konstant, krummer Bjælken sig efter en Cirkelbue.

Nedbøjningerne beregnes ved Ligningen:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{M}{EI} = -\frac{2r}{Eh},$$

hvor r og E ere konstante, medens h maa udtrykkes som Funktion af x .

Exempel 1. Bjælken er indspændt i den ene Ende, fri i den anden, og i den frie Ende paavirket af en Kraft P .

Med Begyndelsespunktet i P 's Angrebspunkt har man

$$M_x = P \cdot x = r \cdot W.$$

For rektangulært Tværsnit med konstant Bredde b , variabel Højde y , bliver y bestemt ved:

$$P \cdot x = \frac{r}{6}by^3;$$

naar Højden y afsættes halvt opad, halvt nedad, faar et lodret Længdesnit i Bjælken den i Fig. 106, Pl. 11, viste Form (Parabel).

Hvis Bredden z varierer, medens Højden h holdes konstant, bliver det vandrette Snits Kontur bestemt ved:

$$P \cdot x = \frac{r}{6}zh^3;$$

afsættes z halvt til hver Side, faas to rette Linier som Begrænsning.

For en Bjælke med konstant Tværsnit er $P \cdot l = \frac{r}{6} b h^3$.

Vi ville sammenligne de tre her nævnte Bjælker lidt nærmere, idet vi gaa ud fra, at de alle have samme b og h ved Indspændingstværsnittet. Af Ligning (34) ses, at de i saa Fald ogsaa have samme Krumningsradius i dette Punkt; for Bjælken med konstant Højde er ρ den samme i alle Punkter, for Bjælken med konstant Bredde aftager h , og derfor ogsaa ρ , ud mod den frie Ende, for Bjælken med konstant Tværsnit aftager r og voxer ρ ud mod den frie Ende. De to Bjælker med variabelt Tværsnit bøje sig altsaa begge mere ned end Bjælken med konstant Tværsnit; Bæreevnen er den samme for dem alle tre, men *Besparselsen i Materiale medfører en Aftagen af Stivheden*. At denne Sætning dog ikke gælder ubetinget, ses af, at Voluminet er mindst for Bjælken med konstant Højde, men Nedbøjningen størst for Bjælken med konstant Bredde.

Er Tværsnittet cirkulært med Diameter y , havest:

$$P \cdot x = \frac{r}{32} \pi y^3;$$

Bjælken er et Omdrejningslegeme med en kubisk Parabel som Meridiankurve.

■
Opg. 28. For en i den ene Ende indspændt, i den anden Ende fri Bjælke, ensformig belastet med p pr. Længdeenhed, løses de samme Opgaver som i Ex. 1.

Opg. 29. For en i begge Ender simpelt understøttet Bjælke, belastet med P i Midten eller med p pr. Længdeenhed, løses de samme Opgaver som i Ex. 1

Exempel 2. En i begge Ender simpelt understøttet Bjælke er paavirket som i Fig. 67, Pl. 7, af en Kraft P i Afstandene a og b fra Understøtningerne; Tværsnittet er cirkulært.

For et Punkt i Afstanden x fra A , mellem A og P , er Momentet lig $A \cdot x$, altsaa lige saa stort som hvis Bjælken var indspændt ved P og paavirket af Kraften A i den frie Ende. Mellem A og P maa Bjælken da være formet som en Omdrejningsflade med en kubisk Parabel som Meridiankurve: Parablens Toppunkt ligger ved A . Paa samme Maade faas Stykket mellem P og B formet efter en kubisk Parabel med

Toppunkt i B ; de to Omdrejningslegemer støde sammen ved P langs en Cirkel med Diameter:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi \cdot r} \cdot \frac{Pab}{l}}.$$

Denne Bjælkeform finder Anvendelse ved Bæreaksler.

Exempel 3. En i begge Ender simpelt understøttet Bjælke med konstant Fiberpaavirkning er ensformig belastet med p pr. Længdeenhed.

Vi ville blot finde Nedbøjningen i Midten, naar Tværnittets Højde er konstant; Tværnittets Form kan saa forøvrigt være hvilken som helst. Af Ligning (34) med $\frac{d^3y}{dx^3}$ for $\frac{1}{\rho}$ findes:

$$y_{\max.} = \frac{2r}{Eh} \int_0^{\frac{1}{2}l} \int_0^x dx^2 = \frac{rl^2}{4Eh}.$$

Tværsnittet paa Midten skal bestemmes af:

$$M_{\max.} = \frac{1}{8}pl^2 = r \cdot W = r \cdot \frac{2I_{\max.}}{h};$$

indføres r herfra i Udtrykket ovenfor, faar man:

$$y_{\max.} = \frac{pl^4}{64EI} = \frac{6}{384} \frac{pl^4}{EI_{\max.}},$$

medens man for konstant Tværnit har (§ 28):

$$y_{\max.} = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{EI}.$$

For en nittet Pladejærnsdrager lader man Tværsnittet variere ved at variere Antallet af vandrette Plader i Hoved og Fod; man opnaar dog ikke derved, at Fiberpaavirkningen bliver ganske konstant, saa Nedbøjningen maa antage en Værdi, der ligger mellem de to ovenfor nævnte (Dragerens Højde kan meget godt regnes tilnærmelsesvis konstant). Formlerne ovenfor kunne forøvrigt skrives:

$$\text{for konstant Tværnit: } y_{\max.} = \frac{5}{48} \frac{M_{\max.}l^2}{EI},$$

for konstant Fiberpaavirkning: $y_{\max.} = \frac{6}{48} \frac{M_{\max.} l^3}{EI_{\max.}}$.

For en Pladejærnsdrager med variabelt Tværsnit af Hoved og Fod kan man da sætte:

$$y_{\max.} = \frac{M_{\max.} l^3}{9EI_{\max.}}, \quad (35).$$

og denne Formel*) kan ogsaa meget godt anvendes, selv om Belastningen ikke just er ensformig fordelt, men bestaar af en Række Enkeltkræfter; Momentpolygonen vil nemlig, naar Enkeltkræfternes Antal er stort, aldrig afvige særlig meget fra en Parabel, og Formlen giver jo selv for ensformig Belastning kun en Tilnærmelse. (For den i § 36 og § 26, Fig. 60, Pl. 7, behandlede Drager findes efter (35), idet $M_{\max.} = 87,5^{tm}$, $l = 16^m$, $I_{\max.} = 910750^{cm^4}$:

$$y_{\max.} = \frac{8750000 \cdot 1600^3}{9 \cdot 2000000 \cdot 910750} = 1,34^{cm},$$

medens Konstruktionen i Fig. 60 for konstant Tværsnit gav $y_{\max.} = 1,25^{cm}$).

De i denne § fundne Former af Bjælker med konstant Fiberpaavirkning ere kun rigtige under Forudsætning af, at Forskydningsspændingerne ingen Indflydelse have paa Dimensionsbestemmelsen. I de Punkter, hvor Bjælkens Tværsnit ifølge det ovenfor angivne skal svinde ind til Nul (i den frie Ende af en indspændt Bjælke, Ex. 1, i Understøtningspunkterne for Bjælken i Ex. 2), kan man dog selvfølgelig ikke undlade at tage Hensyn til Forskydningen, saa de fundne Resultater kunne kun anvendes i Praxis med visse Modifikationer.

§ 38. Forskydningsspændingerne i et bøjet Legeme. Vi have i § 24 set, at de indre Kræfter i et Normal-snit i et til Bøjning paavirket Legeme ere dels Normalspændinger, dels Forskydninger. De sidste have en Resultant, der gaar gennem Tværsnittets Tyngdepunkt og i Størrelse er lig Transversalkraften Q . Vi skulle nu finde Forskydningsspæn-

*) Angives af Müller-Breslau: *Die graphische Statik der Baukonstruktionen*, Bd. II, Abth. 2. 1896. S. 20.

dingernes Størrelse i de enkelte Tværsnitspunkter, og hertil skulle vi navnlig betjene os af den i § 19 viste Sætning om Ligestorheden af Forskydningsspændingerne i to paa hinanden vinkelrette Snit.

Vi lægge to konsekutive Normalsnit AC og BD i det bøjede Legeme (Fig. 107, Pl. 11), som vi her ligesom tidligere forudsætte symmetrisk om Kraftplanen, samt Snittet ABA_1 i Afstanden y fra den neutrale Flade og parallelt med denne. Paa det udskaarne Stykke $ABCD$ af Bjælken virker der følgende Kræfter parallelt med den neutrale Flade: Normalkræfterne paa Snittene AC og BD med Resultanterne N_x og N_{x+dx} og en forskydende Kraft i Fladen AB ; Summen af disse tre Kræfter skal være Nul. Antages Forskydningsspændingen τ_y i AB at være ensformig fordelt over Arealet $z \cdot dx$ af Snittet ABA_1 , har man altsaa:

$$\tau_y \cdot z dx = N_x - N_{x+dx} = N_x - \left(N_x + \frac{\delta N_x}{\delta x} dx \right) = - \frac{\delta N_x}{\delta x} dx,$$

$$\text{eller:} \quad \tau_y \cdot z = - \frac{\delta N_x}{\delta x}.$$

Normalspændingen i Afstanden η fra den neutrale Axe er $\frac{M\eta}{I}$, følgelig faas:

$$N_x = \int_y^{e_1} \frac{M}{I} \eta dF = \frac{M}{I} \int_y^{e_1} \eta dF = \frac{M}{I} S_y,$$

idet M og I ere konstante, saalænge man holder sig til det samme Tværnit, og idet S_y betegner det statiske Moment af den Del af Tværnittet, der ligger udenfor Snittet AB , med Hensyn til den neutrale Axe.

Idet man nu skal differentiere N_x med Hensyn til x , bemærkes det, at I og S_y ere konstante (Tværnittet forudsættes konstant). Man faar da under Benyttelse af Ligning (21), § 26:

$$\frac{\delta N_x}{\delta x} = \frac{S_y}{I} \cdot \frac{\delta M}{\delta x} = - \frac{S_y}{I} \cdot Q,$$

$$\text{altsaa:} \quad \tau_y \cdot z = \frac{S_y}{I} \cdot Q. \quad (36).$$

$\tau_y \cdot z \cdot 1$ betyder den forskydende Kraft pr. Længdeenhed af Snittet AA_1B . Idet y varierer, holde Q og I sig konstante, medens S_y er Nul for $y = e_1$ eller $y = e_2$ og voxer ind mod den neutrale Flade. Forskydningen i den neutrale Flade er

altsaa større end i noget andet dermed parallelt Snit, og Forskydningen i de yderste Fibre er Nul. Af Ligning (36) kan Forskydningsspændingen pr. Arealenhed, τ_y , findes ved Division med z ; τ_y angiver imidlertid ifølge § 19 ogsaa Størrelsen af den lodrette Komposant (Komposanten i y -Retningen) af Forskydnings-spændingen i Tværsnittets Plan, saa denne er nu ligeledes bekendt. Dens Variation med y afhænger af Tværsnittets Bredde z ; vi skulle nedenfor undersøge dette Forhold for de almindeligst brugte Tværsnitsformer; i Almindelighed vil τ_y ligesom $\tau_y \cdot z$ være størst i den neutrale Axe, og τ_y er altid Nul i de yderste Fibre.

Hermed ere imidlertid Forskydningsspændingerne i Tværsnittets Plan endnu ikke fuldstændig givne. τ_y angiver kun den lodrette Komposant, men det er bekendt, at ude ved Omkredsen maa Forskydningsspændingen være rettet efter Tangenten. Man kender ikke den nøjagtige Fordeling, men man antager i Almindelighed, at Forskydningsspændingerne i alle Punkter af en Linie EE_1 (Fig. 107) parallel med den neutrale Axe ere rettede mod Skæringspunktet P for Tangenterne i E og E_1 , hvilket fører til følgende Udtryk for den absolute Størrelse τ af Spændingen i et vilkaarligt Punkt:

$$\tau = \tau_y \sec \vartheta; \quad (37)$$

den ved ϑ betegnede Vinkel er angivet i Fig. 107.

Denne Fordeling tilfredsstiller ganske vist den Betingelse, at Spændingen skal være tangentiell til Overfladen, og ligeledes den Betingelse, at Summen af de forskydende Kræfters Komposanter efter en Linie parallel med den neutrale Axe skal være Nul (Summen af Komposanterne efter OP skal være lig Q); men den er dog neppe ganske rigtig, i alt Fald ikke i Punkter, hvor Tværsnittets Bredde z pludselig ændrer sig. For et I-Profil f. Ex. vilde man, hvis Flangernes indvendige Begrænsningsflade er vinkelret paa Kroppen, paa den Maade faa uendelig stor Forskydningsspænding ved Overgangen fra Krop til Flange; men det er ogsaa ganske naturligt, at den til Grund for Ligning (37) liggende Forudsætning, at Forskydningsspændingen fordeler sig ensformigt over den vandrette Linie EE_1 (Fig. 107), ikke kan være rigtig i saadanne Punkter.

Det bedste Billede af Forskydningsspændingens Variation faar man ved at tegne en Kurve, hvis Ordinater angive Spæn-

dingens Størrelse i hvert Punkt af f. Ex. Tværnittets Midtlinie. Den almindelige Methode til Konstruktion af denne Kurve er vist i Fig. 108, Pl. 11, for et Jærnbaneskinne-Profil, det samme, for hvilket der er konstrueret Inertimomenter o. l. i Fig. 26, Pl. 4. I Fig. 108 er Profilet inddelt i Strimler parallelle med den neutrale Axe, og til Strimlernes Arealer er der konstrueret en Tovpolygon; Inddelingen af Profilet, Pol-distancen o. s. v. er overført direkte fra Fig. 26. Man konstruerer nu først en Kurve med Ordinater $\tau_y \cdot z$. Ifølge Ligning (36) varierer $\tau_y \cdot z$ kun med S_y , idet I og Q ere konstante. I Fig. 108 er der paa en lodret Axe til højre i Figuren afsat Punkterne 0, 1 . . . 14 lige ud for Skillelinierne mellem de Strimler, hvori Profilet er delt, og i hvert Punkt er oprejst en Ordinat, hvis Længde er proportional med det tilsvarende S_y ; den herved bestemte Kurve er i Figuren betegnet: $\tau_y \cdot z$ -Kurve. S_y findes ved Hjælp af Tovpolygonen; for Punktet 3 er saaledes $S_y = a \cdot h_1 \cdot 0-3$, idet $0-3$ betegner det Stykke, der afskæres paa den neutrale Axe mellem den yderste Tovpolygonside og Siden mellem 3 og 4; a og h_1 have de samme Værdier som i Fig. 26, $a = 3^{\text{cm}}$, $h_1 = 5^{\text{cm}}$. Ordinaten til $\tau_y \cdot z$ -Kurven i Punktet 3 er afsat lig Stykket $0-3$, idet man har ladet Konstanterne a og h_1 ligesom I og Q indgaa i Maalestoksforholdet, og paa samme Maade ere alle de andre Ordinater fundne. — Dernæst er τ_y -Kurven konstrueret. For at finde den skal man dividere med Profilets Bredde z i hvert Punkt; idet z paa Stykket 6—10 er konstant $= z_0 =$ Bredden i den neutrale Axe, har man imidlertid foretrukket at multiplicere $\tau_y \cdot z$ -Kurvens Ordinater med $\frac{z_0}{z}$, idet man saa lader Konstanten z_0 indgaa i Maalestoksforholdet; derved falde $\tau_y \cdot z$ - og τ_y -Kurverne sammen paa Stykket 6—10. For de andre Punkter er Multiplikationen med $\frac{z_0}{z}$ udført grafisk, ved Lige-dannethed; Konstruktionen ses i Figuren for Punkt 3.

Nu mangler man blot at bestemme Maalestoksforholdet, og dette gøres simplest ved at beregne τ_0 , Forskydningsspændingen i den neutrale Axe. Transversalkraften for det undersøgte Tværnit er givet, $Q = 7^{\text{u}}$; paa Tegningens Længde-maalestok maales Stykket $0-7$, der er proportionalt med S_0 ($= S_y$ for den neutrale Axe), til $6,3^{\text{cm}}$, altsaa er $S_0 = 3 \cdot 5 \cdot 6,3^{\text{cm}}$;

endvidere er Kroptykkelsen $z_0 = 1,1^{\text{cm}}$, og i Fig. 26 er fundet $I = 990^{\text{cm}^4}$. Nu hæves:

$$\tau_0 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 6,3 \cdot 7000}{990 \cdot 1,1} = 607 \text{ kg./cm.}^2.$$

τ_0 er paa Tegningen fremstillet ved $2,6^{\text{cm}}$, altsaa er Maalestoksforholdet for Spændingerne: $1^{\text{cm}} \sim 233 \text{ kg./cm.}^2$; Maalestokken for Spændingerne er tegnet i Figuren. Hvis man ikke har fundet I i Forvejen, har man naturligvis i Fig. 108 alt fornødent; Mohrs Methode giver $I = 2ah_1 \cdot F$, hvor F er det af Tovpolygonen og dens yderste Sider indesluttede Areal. Konstanterne a og h_1 kunne da bortdivideres af Udtrykket for τ_0 .

I mange Tilfælde har man kun Brug for at kende den største Forskydningsspænding; denne optræder i Almindelighed i den neutrale Axe, navnlig altid naar Tværsnittets Bredde her er mindre end i de andre Punkter, og dette er som oftest Tilfældet i Praxis. I den neutrale Axe er

$$\tau_0 = \frac{S_0}{I} \cdot \frac{Q}{z_0} = \frac{Q}{\eta_0 \cdot z_0}, \quad (38).$$

idet man har sat $\frac{I}{S_0} = \eta_0$. Hvis man sammensætter Trækspændingerne i Tværsnittet til en enkelt Resultant S_1 og ligeledes Trykspændingerne til en Resultant S_2 , har man $S_1 = S_2$ og Afstanden mellem deres Angrebepunkter er netop η_0 . Idet Normalspændingen er $\sigma = C \cdot y$, har man nemlig:

$$S_1 = \int_0^{e_1} Cy dF = S_2 = \int_{e_2}^0 Cy dF.$$

S_1 virker i Afstanden η_0' fra den neutrale Axe, bestemt ved:

$$S_1 \cdot \eta_0' = \int_0^{e_1} Cy^2 dF,$$

og paa samme Maade findes Afstanden η_0'' ud til S_2 's Angrebepunkt:

$$S_2 \cdot \eta_0'' = \int_{e_2}^0 Cy^2 dF;$$

ved at addere og benytte Udtrykkene for S_1 og S_2 faar man:

$$\eta_0' + \eta_0'' = \frac{C \int_{e_1}^{e_2} y^2 dF}{C \int_0^{e_1} y dF} = \frac{I}{S_0} = \eta_0.$$

Udtrykket (38) for Forskydningsspændingen i den neutrale Axe er nu overmaade simpelt: τ_0 findes ved at tænke sig Kraften Q ensformig fordelt over et Rektangel med Bredde z_0 og Højde η_0 . η_0 kan forøvrigt maales direkte, naar man har konstrueret den »2den Tovpolygon« til Tværnittets Areal som Belastning — den, der benyttes ved Culmanns Methode til Bestemmelse af Inertimomenter, se Fig. 26, Pl. 4 —. η_0 er den lodrette Afstand mellem de Punkter, i hvilke de yderste Tovpolygonsider skæres af Siden udfor den neutrale Axe (angivet i Fig. 26); disse Skæringspunkter ere nemlig Punkter af Resultanterne S_1 og S_2 , da de Kræfter, for hvilke den »2den Tovpolygon« er tegnet, ere $Cy dF$. — I Fig. 26 maales $\eta_0 = 10,55 \text{ cm}$, hvorefter $\tau_0 = \frac{7000}{10,55 \cdot 1,1} = 606 \text{ kg./cm.}^2$.

Vi skulle nu undersøge nogle af de hyppigst forekommende Tværsnitsformer med Hensyn til Forskydningsspændingens Fordeling.

1. *Rektangel.* (Fig. 109, Pl. 11). Man har her $z = b$, $I = \frac{1}{12} b h^3$ og

$$S_y = b \left(\frac{1}{2} h - y \right) \left[y + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} h - y \right) \right] = b \left(\frac{1}{8} h^2 - \frac{1}{2} y^2 \right),$$

hvorved:

$$\tau_y = \frac{\frac{1}{8} h^2 - \frac{1}{2} y^2}{\frac{1}{12} b h^3} \cdot Q = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} - \frac{6y^2}{bh^3} Q.$$

τ_y er fremstillet som Ordinat til en Parabel (Fig. 109); Toppunktsordinaten er:

$$\tau_0 = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh},$$

hvilket ogsaa let findes mere direkte, idet $\eta_0 = \frac{2}{3} h$. Forskydningsspændingen i den neutrale Axe er $1\frac{1}{2}$ Gange saa stor, som hvis Q fordelte sig ensformigt over hele Tværnittet.

2. *Cirkel.* Her er $z = 2 \cdot \sqrt{r^2 - y^2}$, $I = \frac{1}{4} \pi r^4$,

$$S_y = 2 \int_y^r y \cdot \sqrt{r^2 - y^2} dy$$

$$= - \int_y^r \sqrt{r^2 - y^2} d(r^2 - y^2) = \frac{2}{3} (r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}.$$

$$\tau_y = \frac{4}{3} \frac{r^2 - y^2}{r^4} \cdot \frac{Q}{\pi r^2}, \quad \tau_0 = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi r^2}.$$

Forskydningsspændingen i den neutrale Axe er $\frac{4}{3}$ Gange saa stor, som hvis Q fordelt sig ensformigt over hele Tværsnittet.

3. *I-Tværsnit.* For et af Rektangler sammensat Tværsnit som i Fig. 110, Pl. 11, er $I = \frac{1}{12} (bh^3 - b_0 h_0^3)$, og

$$\text{for } y > \frac{1}{2} h_0: z = b, \quad S_y = (\frac{1}{8} h^2 - \frac{1}{2} y^2) b.$$

$$\text{for } y = \frac{1}{2} h_0: z = b \text{ eller } z = \delta, \quad S_y = \frac{1}{8} (h^2 - h_0^2) b.$$

$$\text{for } y < \frac{1}{2} h_0: z = \delta, \quad S_y = \frac{1}{8} (h^2 - h_0^2) b + (\frac{1}{8} h_0^2 - \frac{1}{2} y^2) \delta.$$

τ_y -Kurven er sammensat af Parabelstykker (Fig. 110); ved Overgangen fra Krop til Flange er der et Spring, idet z her pludselig gaar over fra Værdien δ (i Kroppen) til Værdien b (i Flangen), medens de andre Størrelser i Formlen for τ_y kun have én Værdi i Overgangspunktet. Forskydningsspændingen i det yderste Punkt af Kroppen er $\frac{b}{\delta}$ Gange saa stor som i det umiddelbart ved Siden af liggende Punkt i Flangen. Ved de virkelig anvendte I-Tværsnit findes der altid Afrundinger af de skarpe Knæk ved Overgangen fra Krop til Flange, saa Diskontinuiteten træder ikke slet saa skarpt frem, men selv for Skinneprofilet i Fig. 108, Pl. 11, har τ_y -Kurven i det væsentlige samme Karakter. Man ser, at Hoved og Fod kun optage temmelig smaa Forskydningsspændinger, og man vil forstaa Berettigelsen af den i Praxis almindelig anvendte Regel, at *Kroppen alene optager Forskydningsspændingerne*, medens, som vi tidligere have set, *Flangerne* (tilnærmelsesvis) *alene optage Normalspændingerne*.

Hvis man anvender den i § 33 udviklede Tilnærmelsesformel for Inertimomentet af et I-Tværsnit, $I = \frac{1}{2} h_i^2 \cdot F$ [Ligning (32)], hvor F betegner Arealet af den ene Flange, og hvis

man finder S_y paa lignende Maade, — man tænker sig hele Flangens Areal samlet i dens Tyngdepunkt, i Afstanden $\frac{1}{2} h_t$ fra den neutrale Axe, — faar man for Overgangen fra Krop til Flange: $S_y = \frac{1}{2} h_t \cdot F$, hvorved τ_y i dette Punkt bliver:

$$\tau_{\frac{1}{2} h_0} = \frac{Q}{b \cdot h_t} \text{ eller } \tau_{\frac{1}{2} h_0} = \frac{Q}{\delta \cdot h_t},$$

eftersom man tænker sig Punktet hørende med til Flangen eller til Kroppen. I den neutrale Axe er

$$S_y = S_0 = \frac{1}{2} h_t \cdot F + \frac{1}{8} h_0 \cdot K,$$

idet K betegner Kroppens Areal ($\delta \cdot h_0$), og naar man regner $h_t = h_0$, faas:

$$\tau_0 = \frac{Q}{\delta \cdot h_t} + \frac{\frac{1}{8} h_0 K}{\frac{1}{2} h_t^2 F} \cdot \frac{Q}{\delta} = \frac{Q}{K} + \frac{Q}{4F}.$$

Største Forskydning i Kroppen er τ_0 , mindste Forskydning er $\tau_{\frac{1}{2} h_0} = \frac{Q}{K}$; hvis F er nogenlunde stor i Sammenligning med K , er Forskellen ikke betydelig, og man begaar derfor ikke nogen stor Fejl ved at regne *Forskydningsspændingen ensformig fordelt over Kroppen alene*, hvilket man meget ofte gør. Man ser ogsaa, at for et I-formet Tværnsnit, hvor Flangerne jo optage Størstedelen af Normalspændingerne, kan Afstanden η_0 mellem Resultanterne af Træk- og Trykspændingerne i Tværnittet ikke være meget forskellig fra Afstanden mellem Flangernes Tyngdepunkter, og regnes $\eta_0 = h_t$, har man ifølge (38):

$$\tau_0 = \frac{Q}{\delta \cdot h_t} \sim \frac{Q}{K}.$$

Som allerede i § 24 nævnt maa man undertiden tage Hensyn til Forskydningsspændingerne ved Dimensionsbestemmelsen; dette indtræder navnlig ved Træ, for hvilket Materiale den tilladelige Forskydningspaavirkning parallelt med Fibrene er temmelig lille. I næste Afsnit (§ 57) skulle vi komme nærmere ind paa saadanne specielle Forhold; men vi ville dog allerede her vise et Exempel derpaa.

Exempel. En 2^m. lang Træbjælke (kvadratisk Tværnsnit) er simpelt understøttet i begge Ender og paavirket af to lige

store Kræfter paa 4^{te} i to Punkter, der ligge 0,5^m. fra Understøtningerne; bestem Dimensionerne, naar den tilladelige Paa-virkning til Bøjning er 60 kg./cm.², til Forskydning parallel med Fibrene 6 kg./cm.².

Største Moment er = 4000 . 50 kg. cm., største Transversalkraft = 4000 kg. Tværnittets Sidelinie h bestemmes af:

$$4000 \cdot 50 = \frac{60}{8} h^3, \text{ hvoraf } h = 27,2 \text{ cm.};$$

eller af:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{4000}{h^2} = 6, \text{ hvoraf } h = 31,7 \text{ cm.}$$

Hensynet til Forskydningen er altsaa her det bestemmende. I enkelte andre Tilfælde kan en Kombination af Forskydning og Normalspænding blive farligst, hvorom i § 68.

§ 39. Forskydningens Indflydelse paa Nedbøjningerne. Naar man betragter et Normalsnit i en Bjælke, vil Snittets Normal i et eller andet Punkt som Følge af Forskydningsspændingen τ i Punktet drejes en Vinkel φ , bestemt ved (§ 18):

$$\tau = G \operatorname{tg} \varphi.$$

I Fig. 111, Pl. 11, er der lagt to konsekutive Normalsnit i Bjælken. Hvis vi antage Forskydningsspændingen ensformig fordelt over Snittet, ville alle dettes Normaler drejes den samme Vinkel φ , og det ene Snit vil derfor i Forhold til det andet forskydes et Stykke dy i sin egen Plan, bestemt ved:

$$dy = dx \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{\tau}{G} \cdot dx;$$

hvis $x = 0$ giver $y = 0$, har man derfor:

$$y = \frac{1}{G} \int_0^x \tau dx. \quad (39)$$

Dette Udtryk gælder kun under Forudsætning af ensformig Fordeling af Forskydningsspændingen over Tværnittet, altsaa naar $\tau = \frac{Q}{F}$, hvilken Forudsætning, som vi lige have

set, aldrig er opfyldt; det giver altsaa kun en Tilnærmelse. For et I-formet Tværsnit, som absolut har størst praktisk Interesse, have vi dog set, at man med tilstrækkelig Nøjagtighed kan regne Forskydningsspændingen ensformig fordelt over Kroppen alene, og en nærmere Undersøgelse *) giver ogsaa det Resultat, at Ligning (39) for dette Tværsnit leverer særdeles paalidelige Resultater, naar man indfører $\tau = \frac{Q}{K}$, idet Kroppens Areal kaldes K (for et valset I-Profil regnes bedst: $K =$ Kroptykkelsen $\times$ hele Dragerhøjden, for en nittet Pladejærnsdrager $K =$ Kroppladens Tværsnitsareal).

I det følgende ville vi kun tænke paa I-formet Tværsnit og altsaa sætte:

$$y = \frac{1}{GK} \int_0^x Q dx.$$

*) Naar Forskydningsspændingen varierer fra Punkt til Punkt i Tværsnittet, bliver Vinklen φ heller ikke den samme overalt; den bliver Nul for de yderste Fibre og størst i den neutrale Axe, og Følgen heraf er, at Tværsnittet maa krumme sig (sammenlign f. Ex. *Bach: Elasticität und Festigkeit*, 2te Aufl. S. 298). Man kan da udlede Forskydningen dy af et Tværsnit i Forhold til det konsekutive ved Hjælp af den Betingelse, at den ydre Kraft Q skal udføre det samme Arbejde som de indre Kræfter $\tau dF = \tau dy dz$, og man finder derved (se næste §):

$$dy = x \cdot \frac{Q}{GF} dx,$$

hvor x er en Konstant, der kun er afhængig af Tværsnittets Form og Dimensioner,

$$x = \frac{F}{Q^2} \int \tau^2 dy dz;$$

indføres heri Værdien af τ fra (36) og (37), forsvinder Q af Udtrykket, kun Tværsnitsdimensionerne blive tilbage. For en prismatisk Bjælke er x altsaa den samme for alle Tværsnit, og man kan følgelig bruge Formlen (39), naar man blot multiplicerer Resultatet med x . For et Rektangel er $x = \frac{6}{5}$, for en Cirkel $\frac{32}{27}$; for et vilkaarligt Tværsnit har W. Ritter (*Anwendungen der graphischen Statik*, I, § 32, Zürich, 1888) angivet en grafisk Methode til Bestemmelse af x . For I-formet Tværsnit kan man nøjagtigt nok sætte

$$x = \frac{F}{K} = \frac{\text{Hele Tværsnitsarealet}}{\text{Kroppens Areal}},$$

naar K regnes lig $\delta \cdot h$ ($h =$ hele Højden). Saaledes har man (if. *Land: Einfluss der Schubkräfte etc.*, Berlin, 1895):

Idet, som bekendt, $Qdx = dM$, faas:

$$y = \frac{1}{GK} \int_0^x dM = \frac{1}{GK} (M_x - M_0),$$

eller hvis $x = 0$ giver $M = 0$ ($M_0 = 0$) og $y = 0$:

$$y = \frac{M_x}{G \cdot K}. \quad (40)$$

Nedbøjningslinien for Forskydningerne alene er altsaa ligedannet med Momentpolygonen; Nedbøjningerne faas ved at dividere Momentpolygonens Ordinater med $G \cdot K$. Hvis Belastningen bestaar af Enkeltkræfter, har Momentpolygonen og herefter altsaa ogsaa Nedbøjningslinien for Forskydningerne skarpe Knæk; dette lidet sandsynlige Resultat forklares let derved, at i Virkeligheden angribe Enkeltkræfterne ikke i ét Punkt, men fordelte over en Strækning af ikke helt forsvindende Længde, og hvis man tog Hensyn dertil i Beregningen, vilde Transversalkraften ikke variere ganske pludseligt, og Momentkurvens skarpe Knæk vilde blive afrundede.

Man kan nu danne sig et Begreb om, hvor stor en Fejl man begaar ved at se bort fra Forskydningsspændingerne ved Beregning af Nedbøjningerne. Største Nedbøjning y_m uden Hensyn til Forskydningen kan udtrykkes ved

$$y_m = C \cdot \frac{M_{\max} \cdot l^3}{EI},$$

hvor C er en af Belastningen og Understøtningernes Beskaffen-

for tysk Normal Profil Nr.	10	30	50
$\alpha = (\text{nøjagtigt})$	2,34	2,14	2,03
$F:K =$	2,37	2,14	2,00.

For nittede Pladejærnsdragere bruges samme Værdi af α ($\alpha = F:K$); for et bestemt Exempel finder Müller-Breslau (*Die graphische Statik der Baukonstruktionen*, Bd. II, Abth. 2, S. 11), naar der anvendes 3 Plader i

Hoved og Fod, $\alpha = 0,96 \frac{F}{K}$, naar alle 3 Plader borttages, $\alpha = 1,07 \frac{F}{K}$.

Nærmere Oplysninger om Forskydningsspændingernes Indflydelse paa Nedbøjningerne og paa Beregningen af statisk ubestemte Bjælker findes i de citerede Værker af Land og Müller-Breslau.

hed afhængig Konstant*). Største Nedbøjning fra Forskydningen alene er ifølge (40):

$$y_f = \frac{M_{\max.}}{G \cdot K} = \frac{5M_{\max.}}{2EK},$$

idet man (§ 20) har sat $G = 0,4E$. Heraf faas:

$$\frac{y_f}{y_m} = \frac{5}{2C} \cdot \frac{I}{Kl^2},$$

og for et givet Profil af Bjælken:

$$\frac{y_f}{y_m} = \frac{C_1}{l^2},$$

hvoraf følger, at Fejlen, man begaar ved at bortkaste y_f , er mindst, naar Bjælkens Længde er stor.

For at faa et bestemt Begreb om Fejlens Størrelse ville vi tage et Exempel. For tysk Normal Profil, I Nr. 30, benyttet som Bjælke med to simple Understøtninger og ensformig Belastning, er $C = \frac{5}{48}$, $I = 9888 \text{ cm}^4$, $K = 32,4 \text{ cm}^2$, altsaa $C_1 =$

7324 cm^2 . Man finder da:

for	$\frac{l}{h} = 20$:	$\frac{y_f}{y_m} = 0,020 = 2,0 \%$
-	15:	0,036 = 3,6 -
-	10:	0,081 = 8,1 -
-	8:	0,127 = 12,7 -
-	6:	0,226 = 22,6 -
-	4:	0,508 = 50,8 -

I Praxis vil man kun rent undtagelsesvis anvende et Forhold $l:h < 8$; Fejlen naar i saa Fald højst ca. 12 % af den fra Momenterne alene hidrørende Nedbøjning og er i Almindelighed langt mindre. For den i § 36 og § 26, Fig. 60, Pl. 7; behandlede Pladejærnsdrager (for hvilken $h:l = 1:13,3$) have

*) For en Bjælke med to simple Understøtninger og ensformig Belastning er $C = \frac{5}{48}$, for samme Bjælke med en Enkeltkraft i Midten er C

$= \frac{1}{12} = \frac{4}{48}$ o. s. v.; sammenlign § 28.

$M_{\max.} = 87,5^{ts.m.}$, $K = 132^{cm.}$, altsaa største Nedbøjning fra Forskydningen:

$$y_f = \frac{5 \cdot 8750000}{2 \cdot 2000000 \cdot 132} = 0,08^{cm.},$$

hvilket svarer til ca. 6 % af den fra Momenterne hidrørende Nedbøjning.

Til almindelig praktisk Brug kan man derfor meget godt se bort fra Forskydningens Indflydelse, især da adskillige andre af Beregningens Forudsætninger dog ikke ere exacte: saaledes kender man, for kun at fremdrage et Par enkelte Omstændigheder, ikke altid Elasticitetskoefficientens nøjagtige Værdi for det specielle Materiale, man i Øjeblikket anvender, og Bjælkens virkelige Tværsnit kan afvige ikke ubetydeligt fra de Maal, man regner med.

Derimod stiller Sagen sig anderledes, naar det f. Ex. drejer sig om at undersøge Overensstemmelsen mellem en Theori og Resultaterne af Experimenter, der ere anstillede for at prøve Theorien, eller om af visse Experimenter at uddrage en eller anden almindelig Egenskab for vedkommende Materiale. Vi skulle i denne Sammenhæng nævne nogle samtidige Bøjnings- og Trækforsøg, som *Tetmajer* *) har anstillet med valsede I-Bjælker (tyske Normalprofiler). Trækprøverne toges baade fra Kroppen og Flangerne; ved Bøjningsforsøgene vare Bjælkerne simpelt understøttede i to Punkter med $1,5^m$. Afstand og belastede med en Enkeltkraft i Midten. Af begge Slags Forsøg beregnedes Elasticitetskoefficienten, af Bøjningsforsøgene uden Hensyn til Forskydningsspændingerne, altsaa af Formlen

$$y_m = \frac{Pl^3}{48EI} = \frac{M_{\max.} \cdot l^2}{12EI},$$

idet y_m og det tilsvarende P maalttes. Det viste sig da, at den ved Bøjningsforsøgene fundne Værdi af E altid var betydelig mindre end den ved Trækforsøgene fundne, og til samme Resultat vare flere andre Experimentatorer komme tidligere. Denne Uoverensstemmelse kan imidlertid, som *Bach* **) har

*) *Mittheilungen der Anstalt zur Prüfung von Baumaterialien am eidg Polytechnicum in Zürich.* 3. Heft, Tab. 1, 2 og 8. Zürich 1886.

**) *Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure*, 1888, S. 222.

paavist, forklares, naar man ogsaa tager Hensyn til Forskydningsspændingerne.

Naar den totale (maalte) Nedbøjning kaldes y , haves:

$$y = y_m + y_f = \frac{M_{\max.} \cdot l^3}{12EI} + \frac{5M_{\max.}}{2EK} = \frac{M_{\max.} \cdot l^3}{12EI} \left(1 + \frac{30I}{K \cdot l^2}\right),$$

og af denne Ligning burde E have været beregnet. I Stedet for benyttedes Ligningen:

$$y = \frac{M_{\max.} l^3}{12EI},$$

og for at finde den rigtige Værdi af E maa man følgelig multiplicere *Tetmajers* Tal med en Konstant

$$C = \left(1 + \frac{30I}{Kl^2}\right).$$

Vi skulle anføre et Par vilkaarlig valgte af Forsøgene og Resultaterne af denne Korrektion. I Tabellen nedenfor betegner E_t Elasticitetskoefficienten for Træk, bestemt som Middeltal af de fundne Værdier for Krop og Flange; E_{bT} betegner den af Bøjningsforsøgene af *Tetmajer* beregnede Elasticitetskoefficient, E_b den virkelige af Bøjningsforsøgene under Hensyn til Forskydningen følgende Elasticitetskoefficient; E er angivet i kg./cm.².

I-Profil Nr.	24	20	15	10
E_t	= 2122000	2118000	2125000	2118000
E_{bT}	= 1673000	1752000	1908000	2111000
C	= 1,274	1,192	1,110	1,051
E_b	= 2131400	2088400	2117900	2218600.

Som man ser, er Overensstemmelsen tilfredsstillende; selv for Profil Nr. 10, hvor der endnu er en Differens mellem E_b og E_t af 100000 kg. cm.², kan intet indvendes, idet de ved Trækforsøg bestemte Værdier af E for de forskellige Profiler, hvis Materiale dog skulde være det samme, afvige endog indtil det dobbelte fra hinanden (for Prøvestykker tagne fra Kroppen fandtes for Profil Nr. 17: $E = 1979000$, for Nr. 12: $E = 2191000$).

I saadanne Forsøg har man ogsaa et Bevis for Anvendeligheden af den sædvanlige Bøjningstheori, saa at f. Ex. ogsaa

Hypothesen om, at plane Tværsnit holde sig plane, maa stemme tilstrækkelig nøjagtigt med Virkeligheden for smedeligt Jærn (se § 35).

§ 40. Deformationsarbejdet ved Bøjning. Vi ville først bestemme den Arbejdsmængde, der er nødvendig for at frembringe en vis Bøjning, uden at tage Hensyn til Forskydningsspændingerne. I Fig. 112, Pl. 11, er fremstillet et mellem to konsekutive Snit liggende Stykke af Bjælken. Fiberelementet i Afstanden y fra den neutrale Linie har, naar Bøjningen er tilendebragt, antaget Forlængelsen $\lambda = \varepsilon \cdot dx$, og den tilsvarende Spænding er $\sigma = \frac{M}{I} \cdot y$, Kraften paa Arealelementet dF altsaa $S = \sigma \cdot dF$.

Ifølge § 15 konsumerer en Stang, der paavirkes af et fra Nul jævnt voxende Træk eller Tryk, et Arbejde, der er lig $\frac{1}{2} P_1 \cdot \lambda_1$, hvor P_1 og λ_1 betegne Kraftens og Formforandringens Slutningsværdier. Deformationsarbejdet for det her betragtede Fiberelement i det bøjede Legeme er altsaa:

$$dK = \frac{1}{2} S \cdot \lambda = \frac{1}{2} \sigma dF \cdot \varepsilon dx,$$

eller idet $\sigma = E \cdot \varepsilon$:

$$dK = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} dF \cdot dx.$$

Indføres heri $\sigma = \frac{M}{I} \cdot y$, og integreres dels over hele Tværnittet, dels over hele Bjælkens Længde, faar man hele Bjælkens Deformationsarbejde:

$$K = \frac{1}{2E} \iint \frac{M^2}{I^2} \cdot y^2 dF \cdot dx = \frac{1}{2E} \int \frac{M^2}{I^2} dx \int y^2 dF,$$

$$K = \frac{1}{2E} \int \frac{M^2}{I} dx. \quad (41).$$

Dette Udtryk gælder ganske almindeligt, uafhængigt af Belastningens og Understøtningernes Beskaffenhed og ogsaa for et varierende I .

Exempel 1. En i to Punkter simpelt understøttet Bjælke

med konstant Tværsnit og ensformig belastet med p pr. Længdeenhed.

Man har:

$$M = \frac{1}{2} p (lx - x^2),$$

altsaa:

$$K = \frac{p^2}{8EI} \int_0^l (lx - x^2)^2 dx = \frac{p^2 l^5}{240EI}.$$

Indføres heri:

$$M_{\max.} = \frac{1}{8} pl^2 = r \cdot \frac{l}{e},$$

faas:

$$K = \frac{l}{240EI} \cdot \frac{64r^2 l^3}{e^2} = \frac{4lr^2 \cdot Fi^3}{15Ee^2} = \frac{4i^2}{15Ee^2} \cdot r^2 \cdot V,$$

hvor $V = F \cdot l$ betegner Legemets Volumen, i Inertiradius. Ligesom ved Træk, Tryk og Vridning er altsaa den konsumerede Arbejdsmængde her proportional med Spændingens Kvadrat og med Legemets Volumen. Det samme Resultat vil man finde for alle specielle Belastnings- og Understøtningsmaader.

Exempel 2. En i den ene Ende indspændt Bjælke med konstant Tværsnit og belastet med en Enkeltkraft i den frie Ende.

Man har med Begyndelsespunktet i den frie Ende:

$$M = P \cdot x,$$

$$K = \frac{P^2}{2EI} \int_0^l x^2 dx = \frac{P^2 l^3}{6EI}.$$

Med $Pl = r \cdot \frac{l}{e}$ finder man samme Resultat som ovenfor.

Ved Hjælp af Udtrykket for K kan man let finde Nedbøjningen y i den frie Ende. Idet Kraften tænkes at voxe jævnt fra Nul til Slutningsværdien P , udretter den et Arbejde lig $\frac{1}{2} Py$, og dette maa være lig K , altsaa:

$$\frac{1}{2} Py = \frac{P^2 l^3}{6EI}, \quad y = \frac{Pl^3}{3EI},$$

stemmende med det tidligere fundne Udtryk. Denne Beregning af Nedbøjningen er her kun fremført som en enkeltstaaende Anvendelse af et almindeligt Princip, hvorefter der gøres en meget

udstrakt Brug ved Løsningen af mere komplicerede Opgaver angaaende Bestemmelse af Formforandringer og Beregning af statisk ubestemte Systemer.

Vi have i det foregaaende set, at Nedbøjningen kan findes som Momentfladens Moment. Et Moment er af Dimensionen $P \cdot l$ (Kraft $\times$ Længde), Momentfladens Areal altsaa af Dimensionen $P \cdot l^2$, og denne Flades Moment endelig af Dimensionen $P \cdot l^3$. Nedbøjningen kan altsaa almindeligt skrives som:

$$y = C \frac{Pl^3}{EI},$$

hvoraf man ser, at y er en lineær Funktion af Belastningen. Afsættes P som Ordinat, y som Abscisse, bliver Relationen mellem dem grafisk fremstillet ved en ret Linie gennem Begyndelsespunktet, ganske ligesom ved Træk, Tryk og Vridning. Heraf følger, at de Sætninger angaaende Kræfters dynamiske Virkninger, som vi i § 15 og § 22 have fundet for Træk, Tryk og Vridning, ogsaa gælde for Bøjning. *En Kraft, der strax begynder at virke til Bøjning med sin fulde Værdi, vil altsaa frembringe en dynamisk Spænding, der er dobbelt saa stor som den statiske, og Bjælken vil udføre Svingninger om den statiske Ligevægtsstilling.*

Vi ville dernæst bestemme den Arbejdsmængde, der konsumeres af Forskydningsspændingerne. I et vilkaarligt Punkt af et Tværsnit i Bjælken virker der ifølge (36) og (37), § 38, en Forskydningsspænding:

$$\tau = \frac{S_y \cdot Q}{I \cdot z \cdot \cos \vartheta}.$$

Et Fiberelement af Længde dx og Tværsnit dF (se Fig. 112) paavirkes af en forskydende Kraft $\tau \cdot dF$; den heraf følgende Formforandring bestaar i, at Kanten dx i det elementære Prisme kommer til at danne en Vinkel φ med sin oprindelige Stilling, bestemt ved:

$$\tau = G \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Kraften $\tau \cdot dF$ gennemløber altsaa en Vej $dx \cdot \operatorname{tg} \varphi$, og det elementære Arbejde bliver:

$$dK = \frac{1}{2} \tau dF \cdot dx \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} dF \cdot dx,$$

idet Spændingen antages at voxe jævnt fra Nul til Slutningsværdien τ . Hele Arbejdet bliver nu *):

$$K = \frac{1}{2G} \iint \tau^2 dF dx, \quad (42).$$

hvor for τ indføres Værdien ovenfor.

Exempel. Tværsnittet er et Rektangel med Siderne b og h . Her er Vinklen $\vartheta = 0$, og ifølge § 38 have:

$$\tau = \tau_y = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} - \frac{6y^2}{bh^3} Q = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2}\right);$$

med $dF = b \cdot dy$ faas:

$$K = \frac{1}{2G} \int \frac{9}{4} \frac{Q^2}{b^3 h^3} dx \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} b \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2}\right)^2 dy = \frac{3}{5G} \int \frac{Q^2}{bh} dx.$$

*) Indfører man τ 's Værdi i (42), faas (I konstant):

$$K = \frac{1}{2G} \int Q^2 dx \int \frac{S_y^2 \cdot dF}{I^2 \cdot z^2 \cos^2 \vartheta},$$

hvor det sidste Integral, der skal udstrækkes over hele Tværsnittet, er uafhængigt af x . Sædvanligvis indfører man her den kortere Betegnelse (sammenlign Noten i § 39):

$$\kappa = \frac{F}{Q^2} \int \tau^2 dF = F \int \frac{S_y^2 \cdot dF}{I^2 \cdot z^2 \cos^2 \vartheta},$$

hvor κ er en Konstant, naar Tværsnitsformen er given, og kan da skrive:

$$K = \frac{\kappa}{2FG} \int Q^2 dx.$$

Ved Hjælp af Udtrykket for K kan man finde Forskydningen dy af hele Tværsnittet i Forhold til det konsekutive Tværsnit, idet den ydre Krafts Arbejde $\frac{1}{2} Q dy = dK$ (Q forudsættes at voxe jævnt fra Nul); man finder:

$$\frac{1}{2} Q dy = \frac{\kappa}{2FG} \cdot Q^2 dx,$$

altsaa:

$$dy = \kappa \cdot \frac{Q}{F \cdot G} dx,$$

som i Noten til § 39 angivet.

TREDIE AFSNIT.

Materialernes elastiske Egenskaber, Materialkonstanter og andre Forsøgsresultater.

I. Smedeligt Jærn.

§ 41. Materialprøver. Vi skulle ikke komme ind paa en Beskrivelse af de forskellige Prøvemaskiner eller af Maaden, hvorpaa de anvendes; det er her navnlig Resultaterne, der interessere os. Prøverne ere af højst forskellig Art; Paavirkningen kan være Træk, Tryk, Forskydning, Vridning, Bøjning, og den kan virke roligt eller med Stød. Desuden anvender man Prøver for Bøjelighed og forskellige Smedeprøver, Lokkeprøver o. s. v., men med dem skulle vi ikke beskæftige os her. Vi ville begynde med at vise, hvorledes Resultaterne af de forskellige Prøver fremstilles, og hvilke Oplysninger man kan uddrage af dem.

Ved en fuldstændig *Trækprøve* maaler man sammenhørende Værdier af Kraft og Forlængelse, idet Kraften voxer jævnt fra Nul, indtil Bruddet indtræder, og finder herved tilstrækkeligt Materiale til at optegne den allerede i § 14 omtalte *Arbejdslinie*. For smedeligt Jærn (Svejsjærn eller Staal) vil denne paa det første Stykke være en ret Linie gennem Begyndelsespunktet, men derefter bøjer den af fra den rette Linie, idet Forlængelsen voxer i stærkere Forhold end Kraften, og antager et Udseende som vist i Fig. 113, Pl. 12. Kraften — eller Kraften pr. Arealenhed — er afsat som Ordinat, Forlængelsen λ eller Forlængelsen pr. Længdeenhed ϵ er afsat som Abscisse. Fig. 113 er for Tydeligheds Skyld tegnet mindre korrekt; Linien *OP*

burde efter det Maalestoksforhold, der ellers er brugt for Forlængelserne, omtrent være falden sammen med Ordinataxen.

I Fig. 117, Pl. 12, ses en Del virkelig maalte Arbejdslinier.

Kurven i Fig. 113 indeholder flere mærkelige Punkter. I *P* ophører Proportionaliteten mellem Kraft og Forlængelse, *P*

Kraft. tons	For- længelse $\frac{1}{1000}$ cm.	Differens
0	0	
1	1,43	143
2	2,89	146
3	4,32	143
4	5,75	143
0		
4	5,73	143
5	7,16	145
6	8,61	145
7	10,06	142
8	11,48	69
8,5	12,17	73
9	12,90	77
9,5	13,67	92
10	14,59	
0		
10	14,72	25
10,1	14,97	20
10,2	15,17	19
10,3	15,36	24
10,4	15,60	20
10,5	15,80	33
10,6	16,15	95
10,7	17,10	9789
10,8	114,99	
0	97,30	

kaldes *Proportionalitetsgrænsen* (Gyldighedsgrænsen for Hooke's Lov). Udenfor dette Punkt voxe Forlængelserne stærkere i Forhold til Kraften, men i Punktet *F* begynder Prøvestykket pludselig at »strække« sig meget stærkt uden nogen Tilvæxt i Kraften eller dog for en meget ubetydelig Tilvæxt; Punktet *F* kaldes *Flydegrænsen*. Med den i Fig. 113 viste Form af Arbejdslinien er Punktet *F*'s Beliggenhed temmelig skarpt markeret; dette vil ogsaa i Almindelighed være Tilfældet for Svejsjærn og blødt Staal, for de haardere Staalsorter faar man derimod en mere kontinuerlig krummet Overgang, saa Flydegrænsen bliver temmelig ubestemt; for de haardeste Staalsorter findes der ingen Flydegrænse.

Proportionalitetsgrænsens Beliggenhed kan i Almindelighed ikke angives med tilstræk-

kelig Nøjagtighed, hvis man kun faar den tegnede Arbejdslinie forelagt; den maa bestemmes ved Betragtning af de i Tal givne Aflæsninger af Kraft og Forlængelse. For at give et klart Begreb herom anføres eksempelvis hosstaaende Observationsrække*),

*) Taget fra Bauschingers: *Mittheilungen aus dem mech.-techn. Laboratorium der k. techn. Hochschule in München*, Heft 13, S. 21; citeres i det følgende som: *Bauschingers Mittheilungen*.

som ogsaa giver Oplysninger om Forholdene mellem Proportionalitets- og Flydegrænsen. Prøvestykket er af Svejsjærn. Tværsnittet cirkulært med 2,50^{cm} Diameter, Tværsnitsarealet altsaa 4,91^{cm}², Maalelængden 15^{cm}. Man ser, at Differenserne mellem Forlængelserne for samme Tilvæxt til Kraften ere meget nær konstante op til en Belastning af 9^u; Proportionalitetsgrænsen ligger mellem 9,0^u og 9,5^u, mellem 9,5^u og 10^u er Differensen allerede betydelig større end før 9^u. Endvidere ser man meget tydeligt, at Flydegrænsen ligger mellem 10,7^u og 10,8^u. Idet Værdien af Proportionalitets- og Flydegrænsen altid angives som Kraft pr. Arealenhed, har man her Proportionalitetsgrænsen ved

$$\frac{9000}{4,91} = 1830 \text{ kg./cm.}^2,$$

Flydegrænsen ved 2180 kg./cm.².

Elasticitetskoefficienten er som bekendt lig Kraften pr. Arealenhed divideret med Forlængelsen pr. Længeenhed. Af ovenstaaende Observationsrække findes Forlængelsen pr. Længdeenhed ved Proportionalitetsgrænsen lig

$$\frac{0,0129}{15} = 0,00086,$$

altsaa

$$E = \frac{1830}{0,00086} = 2128000 \text{ kg./cm.}^2$$

Lader man Kraften høre op at virke, vil Forlængelsen formindskes, men ikke altid helt forsvinde. En Formforandring, der forsvinder helt samtidig med Kraften, kaldes *elastisk*; naar dette ikke er Tilfældet, taler man om *blivende* eller *permanente* Formforandringer. Af Observationsrækken ovenfor ses, at naar Kraften gaar tilbage fra 10,8^u til Nul, bliver der en Forlængelse paa 0,0973^{cm} tilbage; den elastiske Forlængelse for 10,8^u er kun 0,01769^{cm}. For mindre Værdier af Kraften vil det imidlertid kun være en mindre Del af hele Forlængelsen, der er *blivende*; muligvis vil endogsaa hele Forlængelsen være *elastisk*. I Fig. 114, Pl. 12, der fremstiller det første Stykke af Arbejdslinien med Forlængelserne i forstørret Maalestok, angive Abscisserne til den fuldt optrukne Kurve de totale Forlængelser, til den punkterede Kurve de

blivende. Det Punkt E, indenfor hvilket der ikke findes blivende Forlængelser, kaldes Elasticitetsgrænsen. *)

De givne Definitioner af Elasticitetsgrænsen og Proportionalitetsgrænsen lide af den Mangel, at disse Grænsepunkters Beliggenhed kommer til at afhænge af Maalingens Nøjagtighed. *Bauschinger*, der ved sit Spejlapparat kunde aflæse $10 \frac{1}{666} \text{ mm.}$ Forlængelse, fandt (*Mittheilungen*, Hest 13, S. 14), at for alle Materialer undtagen just Værktøjsstaal optraadte der blivende Forlængelser selv for den mindste Spænding, og heraf er Følgen, at man ved tilstrækkelig fin Maaling slet ingen Elasticitetsgrænse finder; det er derfor højst sandsynligt, at der i Virkeligheden ikke eksisterer nogen Elasticitetsgrænse, **) naar

*) De her givne Definitioner af Proportionalitetsgrænse og Elasticitetsgrænse maa nu betragtes som de almindeligst antagne, i alt Fald principielt. Tidligere brugte man kun Betegnelsen Elasticitetsgrænse, idet man antog, at den fuldkomne Elasticitet og Proportionaliteten mellem Kraft og Formforandring ophørte i samme Punkt. I daglig Tale sammenblandes de to Punkter derimod ofte, og ogsaa Flydegrænsen gaar tildt under Betegnelsen Elasticitetsgrænse (den ved almindelige Modtagelsesprover bestemte »Elasticitetsgrænse« er i Virkeligheden oftest Flydegrænsen). Det er *Bauschinger*, der først har hævdet den principielle Forskel mellem Proportionalitetsgrænse og Elasticitetsgrænse, men han fastholdt den sidste Betegnelse for det Punkt, der her er defineret som Proportionalitetsgrænse (*Mittheilungen*, Hest 13). *Bach* (*Elasticität u. Festigkeit*) har indført de ovenfor givne Betegnelser for de to Punkter, og det maa som sagt nu betragtes som det almindelige at skelne mellem dem, ogsaa ved at bruge forskellige Betegnelser. Den franske Stats-Kommission angaaende Materialprover (*Commission des méthodes d'essai des matériaux de construction*, T. III, 1895) foreslaar saaledes Betegnelserne: »limite d'élasticité proportionnelle« og »l. d'é. réelle«. *J. B. Johnson* (*Materials of construction*, New-York, 1897) skelner dog endnu ikke mellem de to Punkter (betegner dem begge ved »true elastic limit«. *Tetmaier* bruger ligeledes samme Betegnelse for de to Punkter. — I Sammenhæng hermed skal, da Sprogbrugen paa dette Gebet endnu ikke er fast, anføres de almindelige fremmede Betegnelser for Flydegrænsen: »Streck-, Quetsch-, Bieggrenze« efter Paavirkningens Art, eller almindeligt »Fließgrenze«, »limite d'élasticité apparente« (foreslaas af den franske Kommission), »apparent elastic limit« (Johnson), paa engelsk ogsaa »yield point« o. fl.

**) Ifølge *Alex. Rejtdö*: *Die innere Reibung der festen Körper*, Leipzig, 1897, er Elasticitetsgrænsen lig den Kraft pr. Arealenhed, der netop kan holde Ligevægt mod den »indre Gnidning«. Hvis *Bauschingers* Paastand er rigtig, saa der ikke eksisterer nogen Elasticitetsgrænse for de virkelige

Materialet er i sin oprindelige Tilstand. Paa den anden Side vanskeliggøres Spørgsmaalet ved Umuligheden af at fremstille et absolut retlinet Prøvestykke, og en oprindelig Ikke-Retlinethed kan gøre navnlig de fineste Maalinger mindre paalidelige. — Den franske Kommission angaaende Materialprøver (se Noten) indtager det mere praktiske Standpunkt at gaa ud fra en Nøjagtighed i Aflæsningen af Forlængelserne paa 1000^{mm} og opstiller da følgende Definition af Elasticitetsgrænsen: *indenfor den skal Prøvestykket, naar Kraften ophører at virke, i Løbet af højst 15 Min. gaa tilbage til sin oprindelige Længde paa 1000^{mm} nær (oprindelig Længde 200^{mm}).* Efter denne Definition erklæres det, at der findes en Elasticitetsgrænse for alle Metaller; endvidere hævdes det, at Elasticitets- og Proportionalitetsgrænsen herefter ville falde sammen for alle bløde Metaller, hvorimod Elasticitetsgrænsen for de haarde eller hærdede Metaller vil ligge højere end Proportionalitetsgrænsen. — For Proportionalitetsgrænsens Vedkommende er Forholdet for saa vidt simplere, som den (for smedeligt Jærn) i alt Fald eksisterer: men dens nøjagtige Beliggenhed er naturligvis ligeledes afhængig af Maalingens Nøjagtighed. Den franske Kommission foreslaar ogsaa her en bestemt Definition i saa Henseende: *naar Kraften voxer med 1 kg. pr. m. m.² ad Gangen, skulle Forlængelsernes Differenser indenfor Proportionalitetsgrænsen være konstante paa 1000^{mm} nær, for en oprindelig Længde af 200^{mm} .*

Den til en vis Værdi af Kraften svarende Formforandring indstiller sig i Almindelighed ikke i samme Øjeblik, som Kraften antager sin nye Størrelse; baade ved voxende og aftagende Kraft hengaar der nogen Tid, inden Prøvestykket kommer i Ro. Man kalder dette Forhold *elastisk Eftervirkning*; vi skulle nedenfor komme nærmere ind paa *Tidens Indflydelse* ved Materialprøver.

Vi gaa nu videre i Undersøgelsen af Kurven i Fig. 113. Efterat Flydegrænsen er passeret, voxer Forlængelsen meget

forekommende Materialer, maa heraf følge, at den indre Gnidningskoefficient er Nul i Materialets oprindelige Tilstand. Den første af de Hovedgrupper, hvori *Rejtø* inddeler Materialerne, og for hvilken Kendemærket er en konstant indre Gnidningskoefficient, kan derfor neppe indbefatte noget virkeligt forekommende Materiale i dets oprindelige Tilstand, med mindre *Rejtø's* Betragtninger i det hele kun skulle anvendes udenfor Flydegrænsen. Ved gentagne Paavirkninger kunne Forholdene forandres, hvorom senere.

ærkt i Forhold til Kraften; Arbejdsliniens Forløb mellem F og B er i Almindelighed kun svagt krummet, undertiden næsten tlinet. I B naar Kraften sin største Værdi, B kaldes *Brudgrænsen*. Samtidig med Prøvestykkets Forlængelse er der hele tiden foregaaet en Formindskelse af Tværsnitsdimensionerne. Op til Punktet B har denne Formindskelse været omtrent ensformig fordelt over hele Længden, men i B begynder Prøvestykket pludselig at indsnøres paa en kort Strækning, saaledes som vist i Fig. 115, Pl. 12, og Følgen heraf er, at det for Fremtiden nærmest kun er denne Strækning, der forøges. Ved denne stærke Formindskelse af Tværsnittet forlares det, at Prøvestykkets Forlængelse bliver ved at vokse ind over Punktet B , selv om Kraften holder sig konstant eller endog aftager, som vist i Fig. 113. Ved B' sker Bruddet endelig. Ved *Brudgrænsen* forstaas imidlertid, som ovenfor nævnt, altid den største Ordinat til Arbejdslinien, B_0B ; *Brudgrænsen* angives som en Kraft pr. Arealenhed, og altid i Forhold til det oprindelige Tværnit, ikke til det indsnørede.

Ved Foretagelsen af Trækprøver maaler man altid *Brudforlængelsen*, hvorved forstaas Abscissen OB_0 (Fig. 113) til det Punkt, hvor Bruddet virkelig indtræder. Brudforlængelsen angives i Procent af den oprindelige Længde; hvis denne er l , Forlængelsen λ , haves Brudforlængelsen:

$$\varepsilon \% = 100 \cdot \frac{\lambda}{l}. \quad (1).$$

Foruden Størrelsen af ε maa altid den oprindelige Længde l angives, da Værdien af ε , som vi senere skulle se, varierer hermed. ε antages almindeligt at være et Maal for Materialets Sejghed.

Endvidere maaler man ofte *Kontraktionen* af Brudtværnittet; herved forstaas *Tværsnitsformindskelsen udtrykt i Procent af det oprindelige Tværnit*. Naar Arealet af det oprindelige Tværnit er F , af det indsnørede Tværnit F_b , haves Kontraktionen:

$$\varphi \% = 100 \cdot \frac{F - F_b}{F}. \quad (2).$$

Kontraktionen anses dog almindelig for mindre vel egnet til at lægges til Grund for Bedømmelsen af Materialets God-

hed end Forlængelsen, fordi den er af ganske lokal Natur og derfor kun giver Oplysninger om Materialet lige ved selve Brudstedet.

Undertiden angiver man endnu en Størrelse, der kan tjene til at karakterisere Materialet nemlig Arealet *mellem Arbejds- linien og Abscisseaxen, Arbejdskapaciteten*. Arealet $OPFBB'B_0$ i Fig. 113, repræsenterer, som man let ser, det Arbejde, der er nødvendigt for at frembringe Brud (sammenlign § 15). Da det dog er temmelig besværligt at udmaale dette Areal, *A*, har *Tetmajer**) foreslaaet at sætte:

$$A = \eta \cdot \frac{B}{F} \frac{\lambda}{l} = \eta \cdot \beta \cdot \varepsilon,$$

idet $\beta = B:F$ er Brudgrænsen, ε Brudforlængelsen, η en Talkoefficient. *Tetmajer* har vist, at η tilnærmelsesvis er konstant for samme Klasse af Materiale, saaledes at man kan benytte Produktet $\beta \cdot \varepsilon$ til Bedømmelse af Materialets Godhed. Den Bestræbelse, der ligger til Grund herfor, nemlig at ville udtrykke et Materiales Egenskaber ved ét Tal, et »Kvalitetstal« **), er dog hidtil ikke lykkedes og har neppe Udsigt til at lykkes.

Til at løse Opgaver angaaende Stød, analoge med de i § 15 behandlede, kan Arealet *A* ikke uden videre bruges; herom nærmere i § 44.

Naar man ved *Trykprøver* ligesom ovenfor maaler sammenhørende Værdier af Kraft og Forkortelse, faar man et Diagram, ganske analogt med Træk-Arbejdslinien i Fig. 113; man kan blot tænke sig Forkortelserne afsatte som Abscisser i Stedet for Forlængelserne. For smedeligt Jærn har denne Tryk-Arbejdslinie ganske de samme Egenskaber som ovenfor. Den er retlinet op til et vist Punkt, Proportionalitetsgrænsen, bøjer dernæst af fra den rette Linie, først svagt, kort efter — ved Flydegrænsen — stærkere. Ved yderligere Voxen af Kraften

*) *Mittheilungen der Anstalt zur Prüfung von Baumaterialien am eidgen. Polytechnikum in Zürich*, Heft 3.

**) *Wöhler* har foreslaaet Kvalitetstallet (med Betegnelserne ovenfor) $\beta + \varphi$ til Bedømmelse af Materialets Godhed. *Tetmajers* Forslag er sikkert at foretrække. Forskellige andre Kvalitetstal omtales af *Weyrauch* (*Die Festigkeitseigenschaften etc. von Eisen- und Stahlkonstruktionen* Leipzig, 1889, S. 52 o. f.) og i den af *Järnkontoret*, Stockholm, udgivne Bog »Hållfasthetsprof å svenska Materialier«, 1897, S. 88.

tage Forkortelserne fremdeles stærkt: for en vis Værdi af kraften, Brudgrænsen, mister Materialet sin Modstandsevne og bliver plastisk.

Saaledes som Fænomenerne ved et Trykforsøg her ere ildrede, er der tænkt paa Svejsjærn eller blødt Staal. Haardt aal derimod har ikke Evnen til at blive plastisk, Bruddet karakteriseres her ikke ved en Flyden ud, men ved en Knusning, Springen i Stykker, saaledes som det skal beskrives for brøde Materialer i Almindelighed nedenfor (§ 50—51).

Den beskrevne fuldstændige Analogi mellem Fænomenerne ved Træk- og Trykforsøg for smedeligt Jærn indrømmes ikke af alle at være til Stede. *Bach, J. B. Johnson* og de fleste ævde, at Brudgrænsen for Tryk falder sammen med Flydegrænsen, altsaa at Materialets Modstandsevne her er udtømt. Dette er dog neppe korrekt, saaledes som bl. a. *Tetmajer**) mener at have vist ved sine Forsøg, og det synes ogsaa lidet rimeligt, naar Fænomenerne ved Træk og Tryk ellers ere fuldstændig analoge: men at der kan opstaa Meningsforskelligheder, er let forstaaeligt, da fuldstændige Trykforsøg ere vanskelige at udføre. Prøvestykket maa være kort, naar det ikke skal bøje sig ud til Siden, og i saa Fald ere Forkortelserne ikke lette at maale nøjagtigt. Og naar et kort Prøvestykke uavirkes til Tryk op over Flydegrænsen, er det næsten umuligt at konstatere, om man træffer paa nye mærkelige Punkter af Arbejdslinien; thi selv om der foregaar en Tilstandsforandring, hvor Legemet — ligesom ved Kontraktionens Begyndelse ved Trækforsøg — gaar over til at blive plastisk, vil dette ikke vise sig ved, at Kraften aftager med voxende Forkortelse, fordi Legemets Tværsnit ogsaa er bleven større, og fordi Legemets Udflyden til Siden hindres af Friktionen med de Plader, hvorigennem Trykket overføres.

Tetmajers Betragtning gaar ud paa, at den Tilstandsforandring, der foregaar ved Overskridelse af Flydegrænsen, ligesom ved Trækforsøg viser sig ved, at de blivende Forkortelser nu begynde at voxe stærkt, uden at dog Modstandsevnen derfor er udtømt. Det sidste indtræffer efter hans Mening først senere; idet Belastningen vedbliver at voxe, kommer man atter til et Punkt, hvor der indtræder en tydelig

*) *Mittheilungen, Heft 4.*

udtalt Tilstandsforandring, idet Legemet nemlig her bliver plastisk, og det viser sig ved et Spring — en Uregelmæssighed — i Arbejdslinien, dog ikke meget tydeligt. Fig. 118, Pl. 12, viser Arbejdslinien for et Prøvestykke af blødt Staal *) (en Cylinder med Diameter og Højde lig 20^{mm}). F og B betegne de af Tetmajer angivne Flyde- og Brudgrænser; man ser Knækket i Kurven ved B , men Fig. 118 viser ogsaa den af de 18 Forsøgsrækker, som Tetmajer anfører, hvor Knækket er tydeligst. Af de ovenfor anførte Grunde kan det naturligvis være vanskeligt at *paavise* »Brudgrænsen«, men Tetmajers Anskuelse — at den i alt Fald eksisterer — synes dog mest tiltalende.

Forøvrigt kan det meste af det om Trækforsøg sagte overføres paa Trykforsøg; Definitionerne af Arbejdsliniens mærkelige Punkter (undtagen Brudgrænsen) ere de samme, naar blot Forkortelse substitueres for Forlængelse. Ogsaa Tvivlen angaaende Elasticitetsgrænsens **) Existens for Materialer i deres oprindelige Tilstand bliver bestaaende her.

Ved Forskydningsforsøg kan der ikke godt være Tale om at maale andet end Brudbelastningen. En ren Forskydning forudsætter nemlig Paavirkning i to konsekutive Tværsnit, og naar man nærmer sig hertil saa meget som praktisk muligt, bliver der ligefrem ikke Plads til at komme til at maale Formforandringerne.

Ved Vridnings- og Bøjningsforsøg derimod kan man ligesom ved Trækforsøgene maale sammenhørende Værdier af Kraft og Formforandring, og man kommer til Former af Arbejdslinierne, der ganske ligne den i Fig. 113, Pl. 12, og have alle de samme mærkelige Punkter. Som Resultat af disse Forsøg kan man derfor ogsaa angive Elasticitets-, Proportionalitets-, Flyde- og Brudgrænse, Formforandringen i Brudøjeblikket o. s. v., men der er dog her en Ting at mærke.

*) Tetmajer: *Mittheilungen*, Heft 4, S. 69 i den franske Udg.

**) Ifølge Rejlö: *Die innere Reibung* etc. skal Elasticitetsgrænsen for Tryk (E_c) ligge højere end Elasticitetsgrænsen for Træk (E_t), nemlig $E_c = E_t \cdot \text{tg. } \beta$, hvor β er »Virkningsvinklen«. For to af Rejlö undersøgte Kedelplader angiver han, at $\beta = 54^\circ$ og $\beta = 56\frac{1}{2}^\circ$, altsaa skulde man have:

$$E_c = 1,37 - 1,5 \cdot E_t.$$

Det vides dog ikke, at noget saadant er observeret.

Naar man f. Ex. har en Bjælke med bekendte Dimensioner, Belastnings- og Understøtningsmaade, og naar man har fundet, at der er Proportionalitet mellem Kraft og Formforandring lige op til Belastningen P , saa kan man beregne den tilsvarende Spænding σ i de yderste Fibre af Formlen

$$M = \sigma \cdot W$$

og altsaa ligesom ved Trækforsøg angive Proportionalitetsgrænsen i Kraft pr. Arealenhed (kg./cm.^2). Det samme kan man derimod ikke gøre for Flydegrænsen og endnu mindre for Brudgrænsen, fordi den nævnte Formel for Spændingen kun gælder indenfor Proportionalitetsgrænsen. Dette Forhold har man ikke altid været opmærksom paa; man har uden videre af Formlen $M = \sigma \cdot W$ beregnet »Brudspændingen«, men man har saa naturligvis ikke kunnet faa den beregnede Spænding til at passe med den ved direkte Træk- eller Trykforsøg fundne. En korrekt Beregning af den største optrædende Spænding er kun mulig, hvis man kender Afhængigheden mellem Spænding og Formforandring for Træk og Tryk, og er i alle Tilfælde meget besværlig, saa den aldrig udføres; Fremgangsmaaden er forøvrigt ganske den samme som den, vi senere skulle udvikle for de Materialer, for hvilke Hooke's Lov ikke gælder (§ 52). Man angiver derfor ofte endnu en »Brudmodulus for Bøjning«, som man f. Ex. kan kalde den af Ligningen $M = \sigma \cdot W$ beregnede Spænding σ , naar M betegner det bøjende Moment, der fremkalder Brud; men man maa saa være klar over, at denne Brudmodulus ogsaa er afhængig af Tværsnitsformen, saa Værdier hentede fra Bøjningsforsøg med forskellige Bjælker af samme Materiale kun kunne sammenlignes, naar Tværsnitsformen er den samme. Ganske de samme Bemærkninger gælde for Vridning.

§ 42. Indflydelsen af Prøvestykkets Form ved Trækforsøg. Paa en meget slaaende Maade overbevises man om, at Prøvestykkets Form har stor Indflydelse paa Resultaterne, ved følgende Forsøg af *Kirkaldy* *) med Prøvestykker af *Svejsjærn* (særlig godt Materiale) af de i Fig. 116 a, Pl. 12, viste tre Former:

*) Se f. Ex. *Bach: Elasticität und Festigkeit*, 2te Aufl., 1894, S. 28—29.

Prøvestykkets Form	Brudgrænse kg. cm. ²	Kontraktion %
Fig. 116, 1. $D = 2,54$ cm.	4560	51,0
- 2. $d = 1,85$ -	6420	8,0
- 3. $d = 1,85$ -	4920	49,2
Fig. 116, 1. $D = 2,54$ cm.	5025	40,7
- 2. $d = 1,78$ -	6910	13,8
- 3. $d = 1,78$ -	5020	36,0

Prøvestykket 2 med en inddrejet Not giver langt højere Brudgrænse og langt mindre Kontraktion end de to andre Former. Fænomenet kan forklares ved Hjælp af § 17, hvor vi have set, at en hindret Kontraktion forøger Bæreevnen. At Kontraktionen faktisk er hindret for Prøvestykke Nr. 2, ses tydeligt af Tallene i Tabellens sidste Kolonne; og at Formen her *maa* hindre Kontraktionen, forstaas ved at lægge et Normal-snit et Sted i den inddrejede Not i nogen Afstand fra dens Midte. Ude ved Overfladen *maa* Spændingen være rettet parallelt med denne og har altsaa en Komposant vinkelret paa Kraftretningen, som modsætter sig Tværnittets Formindskelse.

Det samme Fænomen er konstateret af mange andre og for forskellige Materialer*), og det er sikkert en almindelig Lov for Trækprøver, uafhængig af Materialet, naar det blot kontraherer forinden Bruddet. Analoge Resultater gælde for Trykprøver, men ere navnlig konstaterede for sprøde Materialer (Støbejern, Sten o. l.), hvorfor vi skulle opsætte den nærmere Omtale deraf til senere (§ 51).

Indflydelsen af Længden l (Fig. 116 b) af den inddrejede Not illustreres godt ved følgende Forsøg af J. E. Howard**) med Stænger af Staal, for hvilke Notens Diameter var 2,03 cm:

*) Barba for Staal (J. Résal: *Fonte, fer et acier*, Paris 1892, S. 202), Bach for Svejsjern og blødt Staal (*Elasticität und Festigkeit*, 2te Aufl., S. 30; o. fl. Samme Resultat faas, som bl. a. Tetmajer har vist, (*Mittheilungen*, Hest 3 og 4) for Prøvestykker af fladt Jærn med et eller flere Huller: Gennemhulning forøger Styrken.

**) Report of tests at Watertown Arsenal, 1889, S. 663. Ogsaa citeret af J. B. Johnson: *Materials of construction*, New-York, 1897, S. 514. Tallene ere omregnede fra engelsk Maal.

Prøvestykkets Form	Brudgrænse kg./cm. ²	Kontraktion %
$l = 2,54$ cm.	6640	49,0
$l = 1,27$ -	6870	43,4
$l = 0,635$ -	7200	39,6
Halvcirkel-Not, Rad. = 1 cm.	8170	31,6
- - - = 0,29 cm.	9470	23,0
skarp, trekantet Not	8220	ubestemt.

Den skarpe, trekantede Not giver ikke saa stor en Forøgelse af Brudgrænsen som den afrundede Not med mindst Radius, hvilket forklares ved det vel kendte Fænomen, at ganske pludselige Tværsnitsvariationer altid vise sig som svage Punkter.

Ved de her omtalte Forsøg spiller ogsaa den Omstændighed en Rolle, at Bruddet nødvendigvis maa falde i Noten, og det er sandsynligvis ikke just Stangens svageste Punkt; en tilstrækkelig Forklaring faas dog næppe herved.

Ved virkelige Trækprøver maa man naturligvis anvende en Form af Prøvestykkerne, hvorved saadanne fremmede Indflydelser som en hindret Kontraktion o. l. ikke gøre sig gældende. Dette opnaas ved at give Prøvestykket en nøjagtig cylindrisk eller prismatisk Form paa en Længde, der er noget større (mindst 1^{cm.} ved hver Ende) end den, paa hvilken Forlængelsen maales. Men dernæst opstaar det Spørgsmaal, hvorledes man skal forme sine Prøvestykker for at opnaa Resultater, der i alle Henseender kunne sammenlignes med hinanden. Herover er der gjort en Mængde Forsøg; som Resultat af disse skal det først fremhæves *), at *Elasticitetskoefficienten, Brudgrænsen og Kontraktionen ere næsten uafhængige af Prøvestykkets Form*; Afvigelserne, der vise sig, og som ogsaa ses af Forsøgsresultaterne nedenfor, ere i Almindelighed ikke større, end at de kunne hidrøre fra tilfældige Forskelligheder af Materialet. Spørgsmaalet drejer sig egentlig kun om *Forlængelsen*.

For at Sagen skal være klaret, maa man vide, hvorledes de maalte Forlængelser for to Prøvestykker med forskellig

*) *Bauschinger: Mittheilungen, Heft 21.*

Maalelængde og forskellig Form og Størrelse af Tværsnittet skulle sammenlignes. Saa vidt er man dog ikke naaet; man ved kun følgende:

1. *Fuldstændig ligedannede Prøvestykker af samme Materiale give samme Forlængelse (Barba's Lov *).*

Til Bevis for Rigtigheden anføres følgende Forsøg af Barba **):

a. *Cylindriske Legemer; haardt Staal.*

<i>d</i> m.m.	<i>l</i> m.m.	<i>l : d</i>	Brudgrænse kg./cm. ²	Kontraktion %	Forlængelse %
6,9	50	7,24	6480	36,5	20,0
10,35	75	"	6490	38,0	18,8
13,80	100	"	6380	37,4	18,2
17,20	125	"	6330	38,4	18,1
20,75	150	"	6350	31,8	18,0
24,10	175	"	6200	35,8	18,1
27,60	200	"	6320	34,4	19,5

b. *Rektangulært Tværsnit; blødt Staal.*

Tværsnit m.m.	Længde m.m.	Brudgrænse kg./cm. ²	Forlængelse %
20 × 5	50	3720	39,0
40 × 10	100	3820	39,0
60 × 15	150	3890	39,0

2. *For vilkaarligt formede Prøvestykker med Længde l og Tværsnit F har man den totale Forlængelse λ lig Summen af en ensformigt over hele Længden fordelt Forlængelse $\lambda_1 = \epsilon_1 l$*

*) Specielt Tilfælde af Kick's Proportionalitetslov: »De Arbejdsmængder, der ere nødvendige for at frembringe overensstemmende Formforandringer af to ligedannede Legemer af samme Materiale, forholde sig som Legemernes Volumen eller Vægt« (»overensstemmende Formforandringer« vil sige saadanne, som ved ensartede ydre Paavirkninger i samme Tid føre til ligedannede Endeformer). Se f. Ex. *Zeitschr. d. Vereins deutscher Ing.* 1892, S. 278.

**) Tagne fra: *Rapport XXVI de la commission des méthodes d'essai*, Tome III, Paris, 1895.

(den, der danner sig, inden Punktet *B* i Fig. 113, Pl. 12, er overskredet) og af den lokale Forlængelse λ_1 paa den Strækning, hvor Indsnøringen finder Sted. Den sidste Størrelse (λ_2) er for cylindriske Prøvestykker tilnærmelsesvis proportional med Diametren, for vilkaarlig Form af Tværsnittet kan den tilnærmelsesvis sættes lig $K\sqrt{F}$, hvor K er en Konstant. Nu har man altsaa:

$$\lambda = \varepsilon_1 l + K\sqrt{F},$$

eller

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l} = \varepsilon_1 + K \frac{\sqrt{F}}{l}. \quad (3).$$

Heri ere ε_1 og K konstante for samme Materiale. Denne Relation maa dog ikke betragtes som absolut rigtig, saaledes at man ved den skulde kunne sammenligne Resultaterne for helt forskelligt formede Prøvestykker. Den gælder vel egentlig kun saa nogenlunde for ligedannede Tværsnit; af følgende Forsøgsrække af *Barba***) ses f. Ex. Forholdet mellem forskellige *Former* af Tværsnittet:

Samme F og l; Forlængelsen skulde være den samme.

Tværsnits- form	Brudgrænse kg.cm. ²	Forlængelse pr. 10 cm.
Cirkel	4150	32,7 %
Kvadrat	4170	33,7 -
Rektangel	3960	36,0 -

*) Ligningen indbefatter *Barba's* Lov som specielt Tilfælde. For Prøvestykker med kongruente Tværsnit, men forskellige Længder, er den opstillet og dens Rigtighed eftervist af *Brandt* og *Liachnitzki* (Foredrag af *Belelubsky*, se *Bauschingers Mittheilungen*, Heft 22, S. 309), sammesteds er Ligningen opstillet for konstant Længde og forskellige, men dog ligedannede Tværsnit, og Rigtigheden heraf er — ikke særlig slaaende — eftervist af *Brandt* (*Zeitschr. d. österr. Ing. og Arch. Vereins*, 1893, S. 528) ved Hjælp af *Tetmajers* Undersøgelser (*Tetm.: Mittheilungen*, Heft 4). — Større Undersøgelser over dette Emne ere foretagne af *Barba*, *Bauschinger*, *Tetmajer* (cit. ovenfor), *Appleby* (*Min. of proc. Inst. C. E. Vol. CXVIII*, 1893—94), og formodentlig flere.

**) Se: Rapport XXVI de la *commission des méthodes d'essai*, T. III.

Selv om man saaledes ikke er i Stand til at opstille en Relation, der kan bruges under alle Forhold, kan man dog i Praxis med tilstrækkelig Tilnærmelse antage, at Prøvestykker, for hvilke $\sqrt{F}:l$ er konstant, give samme Forlængelse, naar man ikke anvender altfor unormale Dimensioner (rektangulært Tværsnit med meget stor Bredde i Forhold til Tykkelsen o.l. eller altfor kort Maalelængde (mindre end Indsnøringslængden). Et Begreb om den Nøjagtighed, der opnaas paa denne Maade, faas ved følgende Forsøg *) med to forskellige Slags Jærn, anstillede i Creusot. For begge Forsøgsrækker er $l:\sqrt{F} = 8,165$.

Tværsnit m. m.	F. cm. ²	l cm.	Brudgrænse kg./cm. ²	Kontraktion %	Forlængelse paa Længden %
Cirkel, $d = 27,64$		20,0	3790	67,1	30,0
Rektangel, 25×10		12,9	3995	62,0	31,4
„ 40×5		10,0	3842	59,2	30,8
Cirkel, $d = 20$	2,96	14,0	4310	59,8	32,4
□, $50 \times 25 \times 6$	5,25	18,8	4550	50,5	31,0
□, $30 \times 30 \times 4$	2,18	12,0	4120	49,1	32,5
„ do.	2,18	12,0	4060	53,0	34,0
„ $20 \times 20 \times 4$	1,41	9,7	4650	53,9	31,5
„ do.	1,42	9,7	4540	49,8	33,5

Paa Grundlag af det nu udviklede har man opstillet visse Normaldimensioner for Trækprøvestykker af Jærn og Staal. Man er herved overalt gaaet ud fra et Prøvestykke med cirkulært Tværsnit og med Maalelængde 20^{cm.} (8^{''} engl.) som Normalprøvestykke; Diametren er derimod valgt noget forskjellig. Paa Materialprøve-Kongressen **) i Wien 1893 vedtog man at gaa ud fra $d = 2$ ^{cm.}, altsaa $l:d = 10$, hvilket giver

$$l:\sqrt{F} = 11,3;$$

*) Se: Rapport XXVI de la commission des méthodes d'essai, T. III.

**) Conferenz zur Vereinbarung einheitlicher Prüfungsmethoden für Bau- und Konstruktions-Materialien. Verhandlingerne ere offentliggjorte i 23. Hefte af Mittheilungen aus dem mech.-techn. Laboratorium, München.

naar Prøvestykkets Tværsnitsareal er givet, skal man herefter beregne Maalelængden af:

$$l = 11,3 \sqrt{F}. \quad (4).$$

Den franske Statskommission angaaende Materialprøver, hvis Beretning er citeret adskillige Gange ovenfor, er derimod gaaet ud fra $F = 6 \text{ cm}^2$, $l = 20 \text{ cm}$, hvorefter Maalelængden skal beregnes af

$$l = 8,165 \sqrt{F}. \quad (4 a).$$

Maalingen af Forlængelsen udføres i Almindelighed paa to diametralt modsatte Sider af Prøvestykket mellem de Kørnpunkter, der begrænse Maalelængden. Hvis Bruddet falder tæt ved den ene Ende af Maalelængden, bliver en direkte Maalings Resultater upaalidelige, fordi Indsnørings-Strækningen ikke falder helt paa den prismatiske Del af Prøvestykket. Man kan da hjælpe sig ved at anvende en indirekte Maaling, naar man i Forvejen har inddelt Maalelængden i enkelte Centimeter. Hvis Længden f. Ex. er 20 cm , og Bruddet falder ca. 5 cm fra den ene Ende, maaler man den nye Længde af den Strækning paa 10 cm , i hvis Midte Brudstedet ligger, og adderer hertil det dobbelte af den nye Længde af de følgende 5 cm paa den ene Side. Man anvender nu i Almindelighed denne Methode, hvis Bruddet falder udenfor den midterste Trediedel af Længden *).

§ 43. Gennemsnitsresultater af Forsøgene. I efterfølgende Tabel er angivet de Middelværdier af Elasticitetskoefficienten for Træk og Tryk og af Proportionalitetsgrænsen, man kan regne med, samt de Fordringer, man almindelig kan stille til Jærn, der skal anvendes i forskellige *Bygningskonstruktionsøjemed*.

*) *Bauschinger* (Mitth. Heft 21) har angivet, at man kun behøver at anvende Metoden, naar Bruddet falder udenfor den midterste Halvdel af Længden.

	<i>E</i> kg./cm. ²	Proport.- grænse. kg./cm. ²	Brud- grænse. kg./cm. ²	For- længelse pr. 20 cm. %
1. Svejsejærn.				
Bedste Nittejærn, $d \leq 25$ m.m.	$E = 2000000$	1600	3800 *)	18 *)
„ „ $d > 25$ -		15—1600	3600 *)	15 *)
Façonjærn, fladt Jærn og Plader i Valseretningen,				
med Tykkelser ≤ 10 m.m.		„	3600 *)	12 *)
„ „ mellem 10 og 15 m.m.		„	3500 *)	12 *)
„ „ „ 15 og 25 -		„	3400 *)	12 *)
Plader, tværs paa Valseretn.			28-3000 *)	3-4 *)
Traad **)			5-8000	
2. Blødt Staal.				
Nittejærn	$E = 2150000$	20-2400	36-4200 *)	22 *)
Façonjærn, fladt Jærn og Plader i Valseretningen		„	37-4400 *)	20 *)
Plader, tværs paa Valseretn.			36-4500 *)	17 *)
Traad **)			65-8500	
3. Haardt Staal.				
Støbt eller smedet til Lejekon- struktioner o. l.	$E = 2200000$	25-4200	45-6000 *)	10 *)
Traad **), blød			65-10000	
„ middelhaard			10-14000	
„ haard			14-20000	
„ Digelstaal, middelhaard		5000-	12000	} 3-9
„ „ haard		7000	18000	

*) De i »Normalbedingungen für die Lieferung von Eisenkonstruktionen für Brücken- und Hochbau«, Hamburg, 1895, angivne Tal. De betyde derfor i de fleste Tilfælde Minimumsværdier; navnlig Forlængelserne ere som oftest rigelig smaa. De franske officielle Betingelser (Circulaire ministérielle du 29 août 1891, se »Nouvelles annales de la construction« Jan. 1892) fordre saaledes 22 % Forlængelse for almindeligt valset Staal, 28 % for Nittestaal; for Svejstjærn fordres til Gengæld mindre.

**) Efter Tetmajer: Die Baumechanik, Zürich, 1889 og Tetm.: Mittheilungen. Heft 4. Styrken af et Traadto er noget mindre end det, der svarer til det rene Metaltværsnit; som Middeltal af en lang Række Forsøg har Tetmajer fundet et Tab af 6,3 %; man kan almindelig regne 10 %.

De anførte Tal gælde særlig for det til Jærnkonstruktioner (Broer, Husbygning o. l.) anvendte Materiale. Vi kunne ikke her komme ind paa de specielle Fordringer, der stilles til Jærn i alle særlige Tilfælde (Dampkedler, Skibsbygning o. s. v.), men skulle dog for at give et fyldigere Begreb om visse Arter af Jærn, der ere særlig daarligt repræsenterede i ovenstaaende Tabel, endnu anføre følgende Sammenstilling *):

	Brudgrænse kg./cm. ²	Forlængelse %	Kontraktion %
<i>Digelstaal, smedet eller valset.</i>			
Til Hjulbandager for Lokomotiver	65—7000	15	25
» » » Tendere og alm. Vogne	55—6000	18	30
Til Jærnbaneaxler o. l.	50—6000	20	35
» Skibs-Skrueaxler o. l.	50—5500	20—25	40
» Hjulbandager, højest	85—9000		
<i>Martinstaal, smedet eller valset.</i>			
Til Hjulbandager for Lokomotiver	60—6500	15	25
» » » Tendere o. l.	5000	18	30
» Jærnbaneaxler	5000	18	30
» Hjulbandager, højest	8000		
<i>Støbt Staal (usmedet, mest Martin-)</i>			
<i>Krupp leverer:</i>			
til Skibsstævnene, Krumtapaxler o. l.	42—5000	25—30	40—60
» Stempler, Tandhjul o. l.	45—5500	20—27	35—55
» Jærnbanehjul med paastøbt Bandage, Hjærtestykker	60—7000	10	
<i>Jærnbaneskinner**), mindst</i>			
Telegraftraad**), udglødet, forzinket mindst	4000		
Telefontraad**) forzinket, mindst	13—14000	5 (pr. 50 cm.)	

*) Efter C. Bach: *Die Maschinen-Elemente*, 6te Aufl., 1897. De angivne Tal ere Gennemsnitsfordringer og betegne derfor almindeligvis Minimumsværdier. Oplysninger om det af svenske Værker præsterede Støbestaal findes i »Hålfasthedsprof å svenska materialier«, utgifna af Järnkontoret, Stockholm, 1897.

**) Efter »Vorschriften für Lieferungen von Eisen und Stahl, aufgest. vom Verein deutscher Eisenhüttenleute, Düsseldorf, 1893.

Hermed er der givet et fundamentalt Begreb om de vigtigste Talværdier. Vi skulle nu gaa lidt mere i Detailler.

1. *Træk*. Af Tabellen S. 198 ser man tydeligt, at Styrken er størst for de spinklere Dimensioner; Materialet forædles ved Bearbejdelsen. Det er imidlertid ikke blot Brudgrænsen, der hæves herved, ogsaa og endnu mere Proportionalitetsgrænsen, saaledes som man ser af følgende Forsøgsrække*) med Rundjærn (Svejsjærn) af samme Materiale, men forskellig Diameter; naar Brudgrænsen og Proportionalitetsgrænsen for Stangen med 2" Diameter sættes lig 1, fandtes følgende Forhold:

Diameter:	2"	1½"	1"	¾"	¾"	5/8"	1/2"	3/8"
Brudgrænse	1,0	1,05	1,16	1,05	1,11	1,08	1,09	1,09
Proport.grænse	1,0	1,23	1,39	1,30	1,40	1,49	1,51	1,60.

Hver af Angivelserne er Middeltal af 3—6 Forsøg.

Dette Forhold træder ikke saa stærkt frem for Staal som for Svejsjærn. Efter *Campbell* angiver *Johnson***), at Brudgrænse og Forlængelse for Staal ere omtrent uafhængige af Metaltykkelsen, medens Flydegrænsen (og formodentlig ogsaa Proportionalitetsgrænsen) ligger højere for spinkle Dimensioner.

I Sammenhæng hermed skal nævnes *Tetmajers* Undersøgelser af valsede I-Bjælker af Svejsjærn og Thomasstaalet***. I Fig. 117, Pl. 12, ses forskellige Træk-Arbejdslinier, og deriblandt ogsaa for to Prøver af en Svejsjærnsbjælke, den ene (III) taget fra Flangen, den anden (IV) fra Kroppen; Linien III ligger hele Tiden højere end IV, hvilket dels forklares ved den intensivere Behandling, Materialet i Flangen er undergaaet ved Valsningen, dels hidrører fra Packeteringen. Som Resultat af Trækforsøgene fandt *Tetmajer* følgende Tal, hvoraf forskellige andre Oplysninger kunne faas (hver Angivelse fremtræder som Middeltal af 30 Forsøg, to for hvert af de 15 Profilnumre, tysk Normal Profil I Nr. 10—24; *E* betegner Elasticitetskoefficienten. *P* Proportionalitetsgrænsen, *F* Flyde- og *B* Brudgrænsen, alle i kg./cm.²; ϵ betegner Forlængelsen pr. 20 cm., φ Kontraktionen, begge i %):

*) *Report of tests at Watertown Arsenal, 1888, S. 562.*

**) *Materials of construction, S. 495.*

***) *Tetmajer: Mittheilungen, Heft 3. Mittelresultaterne findes S. 142—48.*

<i>Blødt Staal.</i>			<i>Svejsjærn.</i>	
	Flange.	Krop.	Flange.	Krop.
$E = \dots$	2110900	2099900	2035100	2053100
$P = \dots$	2310	2510	1440	1390
$F = \dots$	2800	3210	2440	2360
$B = \dots$	4240	4690	3760	3460
$\epsilon = \dots$	26,3	24,1	22,3	10,7
$\varphi = \dots$	57,4	52,0	32,7	16,2
$P : B = \dots$	0,54	0,54	0,38	0,40
$F : B = \dots$	0,66	0,68	0,65	0,68.

Ved Svejsjærnet viser Flangens Overlegenhed sig tydeligt, ved Staalet er Kroppens Materiale stærkest, men Flangens blødest (ϵ og φ ere størst for Flangen).

De nederste to Talrækker angive Belliggenheden af Proportionalitets- og Flydegrænsen i Forhold til Brudgrænsen. Ihvorvel disse Forhold naturligvis langt fra ere konstante, give de dog i det hele et rigtigt Begreb: *Flydegrænsen ligger omtrent lige højt i Forhold til Brudgrænsen for Svejsjærn og blødt Staal, Proportionalitetsgrænsen derimod forholdsvis lavere for Svejsjærn.*

I denne Henseende er ogsaa en anden, mere omfattende Forsøgsrække af *Tetmajer**) særdeles oplysende. Vi anføre følgende Tal:

<i>Blødt Staal.</i>				<i>Svejsjærn.</i>	
		$P : B$	$F : B$	$P : B$	$F : B$
Rundjærn (18 Forsøg)		0,46	0,66	0,40	0,64
Plader (18 —		0,47	0,61	0,43	0,63
Fladt Jærn (16 —		0,62	0,75	0,56	0,72
Vinkeljærn (16 —		0,54	0,66	0,49	0,68

Forøvrigt skal det bemærkes, at Proportionalitetsgrænse, Flydegrænse o. s. v. kunne variere betydeligt indenfor samme Stykke Jærn, Elasticitetskoefficienten ligeledes. Dette gælder navnlig Proportionalitetsgrænsen; eksempelvis kan anføres, at *Bauschinger***) for 4 Prøvestykker, der bleve skaarne ud lige

*) *Mittheilungen*, Heft 4. Resultaterne findes S. 110, 118, 134, 140 (i den transke Udg.).

**) *Mittheilungen*, Heft 21, Tab. III. Sammesteds ses flere lignende Exempler, ogsaa for Staal (Tab. II).

ved Siden af hinanden af samme Plade af Svejsjærn, fandt Proportionalitetsgrænserne: 1990, 1210, 1490, 1780 kg./cm.² Elasticitetskoefficienten angives undertiden at kunne variere indtil 10 % fra Middelværdien til begge Sider, selv for Prøvestykker tagne fra samme større Stykke.

Tværs paa Valseretningen er Svejsjærnets Styrke ofte kun c. 0,8*) af Styrken i Valseretningen, men ved særlig Packetering kan Styrken skaffes lige stor i alle Retninger; for Staal er der ingen væsentlig Forskel.

Naar der i Tabellen ovenfor (S. 198) er opført en højere og en lavere Værdi for Brudgrænsen, — det erindres, at Tallene ere tagne fra Leveringsbetingelser, — saa er Meningen hermed, at man til Jærnkonstruktioner som oftest kun vil anvende temmelig blødt Staal, og man foreskriver derfor undertiden ogsaa en højere Grænse for Brudstyrken, idet dennes Størrelse rent praktisk anvendes som Skelnemærke mellem de haarde og bløde Varieteter. At den højere Grænse er angivet lidt større, naar Proven tages tværs paa Valseretningen, betyder kun, at man helst maa tillade noget større Spillerum i denne Retning.

I Fig. 117, Pl. 12, ses Arbejdslinier for forskellige Arter af smedeligt Jærn. Linien V svarer til ualmindelig blødt Svejsjærn; den plastiske Periode er her usædvanlig lang. III og IV have været omtalte ovenfor, II svarer til almindeligt blødt Staal, I til haardt Staal, hvor Flydegrænsen omtrent er ukendelig og den plastiske Periode ganske forsvunden. — Vi skulle senere komme lidt ind paa Virkningen af Jærnets forskellige kemiske Sammensætning; for dog strax at give et Begreb om Kulstofindholdets Indflydelse anføres følgende Forsøgsrække af *Bauschinger***). (Se næste Side).

Elasticitetskoefficienten er, som det ses af Tabellen, S. 198 ikke meget forskellig for de tre Slags Jærn og saa godt som uafhængig af Bearbejdelsen; selv for Traad er Værdien omtrent den samme. *Johnson****) anfører en Række Forsøg af *Ch. A. Marshall*, ifølge hvilke Elasticitetskoefficienten altid

*) Omtrentligt Middeltal af en Del af *Bauschinger*, (Mittheilungen, Heft 2. fundne Værdier.

**) *Mittheilungen*, Heft 3, S. 6. Hvert Tal er Middeltal af to Forsøg.

***) *Materials of construction*, S. 509.

Kulstof- indhold	Brudgrænse	Forlængelse pr. 40 cm
‰	kg./cm. ²	‰
0,14	4430	21,8
0,19	4780	20,1
0,46	5330	18,1
0,51	5600	14,3
0,54	5560	17,8
0,57	5605	18,5
0,66	6300	13,7
0,78	6470	11,4
0,87	7350	8,1
0,96	8300	6,6

fandtes en lille Smule højere, naar den maalttes 2den Gang, hvilket viser, at den første Paavirkning har frembragt en lille blivende Formforandring ogsaa indenfor Proportionalitetsgrænsen. Dette Forhold træder langt stærkere frem ved de sprøde Materialer, som vi senere skulle se. Man bør derfor altid ved Bestemmelse af Elasticitetskoefficienten først strække Stangen omtrent op til Proportionalitetsgrænsen, inden man foretager Maalingen.

Ved Forzinkning formindskes Styrken af Traad for de tykkere Sorter 2—3 ‰, for de finere op til c. 10 ‰.*)

2. Tryk. De i Tabellerne S. 198—99 anførte Tal gælde kun Træk; vi skulle nu undersøge Forholdet overfor de andre Paavirkningsmaader og begynde med Paavirkning til Tryk.

Her gælde i Virkeligheden ganske de samme Tal som for Træk, baade for Elasticitetskoefficient og for Proportionalitets-, Flyde- og Brudgrænse, naar denne sidste tages i Tetmajers Betydning af Ordet (se § 41). Til Illustration heraf anføres følgende Forsøgsresultater. Idet Proportionalitets-, Flyde- og Brudgrænse ligesom ovenfor betegnes ved P , F og B , og idet Index l betegner Træk, c Tryk, fandt Tetmajer**) som Middeltal af et større Antal Forsøg:

*) Ifølge G. Mehrrens: *Eisen und Eisenkonstruktionen* (Abth. I, Bd. II, Heft 1 af *Handbuch der Baukunde*), Berlin, 1887. S. 247.

**) *Mittheilungen*, Heft 4, S. 84 (i den franske Udg.).

	$E_c : E_t$	$P_c : P_t$	$F_c : F_t$	$B_c : B_t$
Blødt Staal, rundt	1,01	1,18	0,95	0,98
Svejsjærn, »	1,00	1,05	1,01	1,00
Blødt Staal, Kedelplade			1,00	1,00
Svejsjærn, rundt,			0,86	0,91

Arbejdslinien for et af disse Trykforsøg ses i Fig. 118, Pl. 12; Flyde- og Brudgrænserne ere mærkede ved F og B .

Dupuy*) har for blødt Staal fundet $P_c : P_t = 1,04$, $F_c : F_t = 1,00$, som Middeltal af 5 Forsøg; $E_c : E_t$ er efter Dupuy lidt større end 1; Forsøg ved det Chalmerske Institut i Göteborg med valset og udglødet Bessemerstaal**) af forskelligt Kulstofindhold have givet:

Kulstof, %: 0,15, 0,25, 0,35, 0,50, 0,60, 0,70, 0,80, 0,95, 1,10, 1,20
 $E_c : E_t = 1,05, 1,04, 1,00, 1,09, 1,05, 1,07, 1,01, 1,04, 1,06, 1,07$;

derimod have Forsøg af Marshall***) med Svejsjærn, Staal (med under 7000 kg./cm.² Brudgrænse) og Fjederstaal (Brudgrænse 10000 kg. cm.²) givet:

$$E_c : E_t = 0,98, 0,97, 0,99.$$

Naar man taler om Brudgrænse overfor Tryk for seige Legemer, maa man erindre, at den tænkes funden ved at sammentrykke et kort, prismatisk Prøvestykke mellem to parallelle Plader; Materialet kan da nogenlunde uhindret »flyde ud« til Siden†). Hvis derimod denne Udflyden er mere eller mindre umuliggjort, kan Materialet taale næsten hvilket som helst Tryk. Dette Tilfælde spiller en betydelig Rolle i Praxis, f. Ex. ved Rullelejer for Brodragere o. l. Herhen høre nogle

*) *Annales des ponts et chaussées*, 1897, I, S. 1 (Tallene findes S. 61).

**) »Hålfasthetsprof å svenska materialier«, utg. af »Järnkontoret«, 1897. S. 30—31.

***) J. B. Johnson: *Materials of construction*, S. 509.

†) Ganske uhindret er det dog ikke, dels paa Grund af Friktionen med Trykpladerne, dels fordi de i Midten af Prøvestykket liggende Partikler hindres i deres Bevægelse af de nærmere ved Overfladen liggende. Denne Omstændighed vil endog bevirke, at Trykket ikke kan fordele sig ensformigt over Prøvestykkets Tværslit, saaledes som Kick meget elegant har vist ved Sammentrykning af en Kobbercylinder, der ligger mellem to Blyplader (se Zeitschr. d. Vereins deutsch. Ing. 1892, S. 278).

ganske oplysende Forsøg, som *J. B. Johnson**) har anstillet; han trykkede i en Prøvemaskine et Stykke af Bandagen af et Lokomotivhjul mod en Jærnbaneskinne og maalte Arealet af Berøringsfladens Størrelse svarende til forskellige Tryk. Som et af sine Resultater nævner han, at den største Fiberpaavirkning, der naaedes, maa have været c. 11500 kg./cm.², og her ved viste der sig ingen maalelig permanent Sammentrykning, hvoraf han slutter, at Flydegrænsen ikke kan være naaet, skønt den, bestemt paa sædvanlig Maade, kun var 3500 kg./cm.² (for Skinnematerialet).

Lignende Resultater skulle vi se i § 51 for sprøde Materialer, hvor Indflydelsen af Prøvestykkets Form er nærmere undersøgt.

3. *Bøjning.* Saa længe man holder sig indenfor Proportionalitetsgrænsen, gælde ganske de samme Tal som for Træk og Tryk. For Elasticitetskoefficientens Vedkommende have vi allerede eftervist dette i § 39. For Proportionalitetsgrænsen gælder det naturligvis netop endnu; ved de ovenfor omtalte Forsøg af *Tetmayer***) med valsede I-Bjælker fandtes, som nævnt, ved Trækforsøgene med Materiale fra Flangerne (det er nærmest dem, man maa sammenligne med Bøjningsforsøg) Proportionalitetsgrænsen 2310 kg./cm.² for blødt Staal, 1440 for Svejsjærn. Som Middeltal af 15 Bøjningsforsøg fandtes de tilsvarende Tal at være 2320 og 1560 kg./cm.².

Naar man kommer udenfor Proportionalitetsgrænsen, kan man som bekendt ikke vente Overensstemmelse med Trækforsøgene, hvis man anvender de sædvanlige Bøjningsformler. Den ved disse beregnede *Brudmodulus* B_b (se § 41) eller dennes Forhold til Træk-Brudgrænsen B_t vil foruden af Materialet ogsaa afhænge af Tværsnitsformen. Da Værdien af Brudmodulus ofte anføres (sjældnere dog for smedeligt Jærn end for andre Materialer), skulle vi nævne et Par Forsøgsresultater. *Bauschinger****) finder for Bjælker med rektangulært Tværsnit ($14 \times 5,5^{\text{cm}}$) paa Højkant af Staal med forskelligt Kulstofindhold (samme Materiale som ved de ovenfor omtalte Trækforsøg):

*) *Materials of construction*, S. 506.

**) *Mittheilungen*, Heft 3, S. 134 og 142.

***) *Mittheilungen*, Heft 3, Tabel II og VII.

C i % = 0,14, 0,19, 0,46, 0,51, 0,54, 0,57, 0,66, 0,78, 0,87, 0,96.
 $B_b : B_t = 1,78, 1,79, 1,56, 1,66, 1,54, 1,71, 1,37, 1,35, 1,04, 1,01.$

Considère *) finder for to Stænger af Staal med kvadratisk Tværsnit $B_b : B_t = 1,73$ og $1,95$, for en Stang med kvadratisk Tværsnit af Svejsjærn $1,92$, med cirkulært Tværsnit $2,40$.

Tetmajer **) finder for¹ valsede I-Bjælker som Middeltal af 15 Forsøg: for blødt Staal $B_b : B_t = 0,97$, for Svejsjærn $0,98$.

I Fig. 119, Pl. 12, ses to Bøjnings-Diagrammer ***) for valsede I-Bjælker af Svejsjærn og blødt Staal; Bjælkerne havde to simple Understøtninger i $1,50^m$. Afstand og belastedes med en Enkeltkraft i Midten. Nedbøjningerne i Midten ere afsatte som Abscisser, Kraften som Ordinat.

Uoverensstemmelsen mellem Brudmodulus for Bøjning og Brudgrænsen for Træk er i Almindelighed størst for Svejsjærn og blødt Staal, mindre for haardt Staal. Grunden hertil maa for en stor Del søges i, at en Bjælke af blødt Materiale, naar Flydegrænsen er overskredet, forholder sig som forklaret tidligere ved Hjælp af Fig. 102 og 103, Pl. 10; Tværnittet deformerer meget stærkt, og den neutrale Axe flytter sig bort fra Midten, hvorved Modstandsevnen forøges; der finder ofte slet ikke noget egentligt Brud Sted.

4. *Forskydning*. Denne Paavirkningsmaade spiller navnlig en Rolle for Nitte- og Bolteforbindelser; de forskellige specielle Omstændigheder, som vise sig at være af Betydning for disse — Hulrandenes Beskaffenhed, Paavirkning i ét eller to Snit o. s. v. — skulle vi ikke komme ind paa her.

I § 20 have vi fundet en Relation mellem de samtidigt optrædende Forskydnings- og Træk- eller Trykspændinger,

$$\tau \lesseqgtr 0,75 - 0,8 \cdot \sigma;$$

Formlen er udledet under Forudsætning af, at man befinder sig indenfor Proportionalitetsgrænsen, og hvis man derfor sammenligner de ved Brudforsøg fundne Værdier af Spændingerne, B_f og B_t , kan man ikke uden videre vente, at Relationen skal gælde; Forholdet er for saa vidt ganske analogt

*) *Annales des ponts et chaussées*, 1885, S. 611—19 og 675.

**) *Mittheilungen*, Heft 3, S. 134 og 142.

***) *Tetmajer: Mittheilungen*, Heft 3, S. 116.

med, hvad vi lige have set angaaende Brudmodulus ved Bøjning og Brudgrænsen for Træk. Imidlertid finder man ved Forskydningsforsøg *tilfældigvis**) netop omtrent $B_f: B_t = 0,75 - 0,8$. *Lavalley***) har saaledes fundet for Rundjærnstænger ($B_t = 4000 \text{ kg./cm.}^2$):

Diameter (i m.m.)	8	10	12	16
$B_f: B_t = . .$	0,82	0,79	0,78	0,79.

Bauschinger fandt for de oftere nævnte Staalstænger med forskelligt Kulstofindhold (rektangulært Tværsnit):

$C \text{ i } \text{‰} = 0,14, 0,19, 0,46, 0,51, 0,54, 0,57, 0,66, 0,78, 0,87, 0,96$,
 $B_f: B_t = 0,77, 0,78, 0,67, 0,72, 0,70, 0,65, 0,68, 0,64, 0,68, 0,70$.

Herefter synes det i det hele, som om Forholdet er mindre for de haardere Staalsorter. For Nittejærn er der anstillet utallige Forsøg; $B_f: B_t$ varierer her gerne mellem 0,8 og 1,0.

Ved Svejsjærnsplader afhænger B_f af Retningen af Forskydningspaavirkningen i Forhold til Valseretningen og af Packeteringen***). Hvis Hovedretningen for Fugerne i Packeten falder i Pladens Længderetning og Forskydningspaavirkningen har samme Retning, gaar $B_f: B_t$ ned til 0,7.

5. *Vridning*. Saalænge Paavirkningen holder sig indenfor Proportionalitetsgrænsen, gælde de samme Tal som for For-

*) Forskydningsspændingen i Brudøjeblikket beregnes ved den Slags Forsøg altid ved at dividere hele Kraften Q med Tværsnitsarealet F , og for Materialer, der blive plastiske, inden Bruddet foregaar, er dette sikkert ogsaa meget nær rigtigt; Spændingen er da i sidste Øjeblik ensformig fordelt. Det synes derfor mindre korrekt, naar *Bach* (*Elasticität und Festigkeit*, 2te Auflage, S. 220) i Ligningen $\tau: \sigma = 0,75 - 0,80$ indfører de i § 38 fundne Udtryk for Forskydningen, hvorved for rektangulært Tværsnit $\frac{Q}{F}: \sigma = 0,5 - 0,53$, for

en Cirkel $\frac{Q}{F}: \sigma = 0,56 - 0,6$, og saa venter, at disse Udtryk skulle bekræftes ved Brudforsøg. Formlerne i § 38 for Forskydningsspændingens Fordeling over Tværsnittet gælde kun indenfor Proportionalitetsgrænsen ligesom Ligningen $\tau: \sigma = 0,75 - 0,80$. For det første kan man ikke vente, at denne Ligning skal bekræftes ved Brudforsøg, og endnu mindre kan man det, naar den først omformes ved Hjælp af andre Ligninger, der heller ikke gælde i Brudøjeblikket.

**) *Rapport XXXIII de la commission des méthodes d'essai*, T. III. Paris 1895.

***) *Bauschinger: Mittheilungen*, Heft 2.

skydning, eller da man ikke ved Forskydningsforsøg kan anstille Maalinger indenfor Proportionalitetsgrænsen, maa man hellere udtrykke det saaledes, at indenfor denne Grænse gælder de tidligere ad theoretisk Vej udledede Relationer mellem Forskydning og Træk. *Elasticitetskoefficienten kan saaledes nøjagtigt nok regnes lig $0,4 \cdot E$* , som man vil se af følgende Forsøg af *Bauschinger* med de oftere nævnte Staalstænger:

Kulstof %: 0,19, 0,46, 0,54, 0,57, 0,66, 0,78, 0,87, 0,96.

$G : E = 0,40, 0,38, 0,40, 0,39, 0,38, 0,36, 0,39, 0,40$.

Andre Forsøg have givet $G : E = 0,36 - 0,49$ som de yderste Grænser.

Som Resultat af Vridningsforsøg angiver man undertiden ligesom ved Bøjningsforsøg en Brudmodulus B_r , nemlig den Spænding, man (for en cirkulær Cylinder) finder af Formlen $M_v = \frac{1}{2} \pi \cdot \tau \cdot r^3$, naar man heri indsætter det vridende Moment, der fremkalder Brud. Naturligvis kan man ikke vente, at det saaledes bestemte B_r skal blive lig den Brudspænding B_f , der findes ved Forskydningsforsøg. For at give et Begreb om Størrelsen af denne Brudmodulus for Vridning skulle vi anføre nogle Forsøg af *Popplewell* og *Coker* *) med cirkulære Cylinder af Svejsjærn og blødt Staal, for hvilke Arbejdslinierne ere viste i Fig. 120, Pl. 13. Vridningsvinklen maalttes paa en Længde af 12,7^{cm}; der eksperimenteredes dels med massive Cylinder med Diameter 1,20^{cm}, dels med hule (udborede) Cylinder med ydre Diameter 1,27^{cm}, indre Diameter 0,8^{cm}; de hule og massive Cylinder havde da samme Styrke efter Formlen: $M_v = \frac{1}{2} \pi \cdot \tau \cdot r^3$. Hver af de i Fig. 120 tegnede fire Arbejdslinier er funden som Middelresultat af 5 Forsøg. Værdien af Forholdet $B_r : B_f$ var

	Svejsjærn,	blødt Staal,
massiv Cylinder	1,35	1,30
hul —	1,19	1,23,

hvoraf det bl. a. fremgaar, hvad ogsaa tydelig ses i Fig. 120, at de massive Cylinder ere betydelig stærkere end de hule udenfor Proportionalitetsgrænsen. Lige ved denne Grænse fandtes de massive Cylinder endnu at være lidt stærkere end de hule, men det anføres, at med samme Volumen ere de

*) *Min. of proc. Inst. C. E.*, Vol. CXXII, 1894—95.

hule langt de stærkeste ikke blot indenfor Proportionalitetsgrænsen, men ogsaa oppe ved Brudgrænsen.

Andre Experimentatorer have fundet Forholdet $B_v : B_f$ liggende mellem Grænserne 1,14 og 1,56 for de forskellige Arter af smedeligt Jærn. *)

§ 44. Stød, Tidens Indflydelse paa Forsøgene. Vi have tidligere set, at den Arbejds-mængde, et Legeme konsumerer, naar det undergaar en vis Formforandring, hvorved Proportionalitetsgrænsen ikke overskrides, uden Hensyn til Paavirkningsmaaden er proportional med Slutningsspændingens Kvadrat og med Legemets Volumen; dette Arbejde er grafisk fremstillet ved Arealet af den Trekant, der begrænses af den retlinede Arbejdslinie, Abscisseaxen og Slutningsordinaten, Trekant OAA' (Fig. 121, Pl. 12).

Hvis Proportionalitetsgrænsen overskrides, finder man let, at det konsumerede Arbejde fremdeles er repræsenteret ved Arealet mellem Arbejdslinien, Abscisseaxen og Slutningsordinaten, f. Ex. Arealet OPA_1A_1' i Fig. 121, naar Slutningsspændingen er $A_1'A_1$. Men der er dog en væsentlig Forskel paa disse to Tilfælde. Idet vi se bort fra de muligt optrædende blivende Formforandringer indenfor Proportionalitetsgrænsen, altsaa betragte Legemet som fuldstændig elastisk indenfor denne, vil Legemet give det ved $\triangle OAA'$ repræsenterede Arbejde fra sig igen, naar Kraften hører op med at virke; men naar Formforandringen er bleven saa stor som OA_1' , og Kraften saa hører op med at virke, vil Legemet ikke gaa tilbage til sin oprindelige Længde, der vil være en blivende Formforandring, f. Ex. af Størrelse OO_1 . Næste Gang Kraften begynder at virke, skal man derfor regne med en Arbejdslinie $O_1A_1A_2B$, og idet vi senere ville faa at se, at Proportionalitetsgrænsen ved den forrige Paavirkning er bleven hævet op til A_1 , kan man nøjagtigt nok regne Kurven O_1A_1 for en ret Linie parallel med OP (Elasticitetskoefficienten beholder omtrent sin Størrelse uforandret). Ved Paavirkningen op til A_1 vil den magasinerede elastiske Arbejds-mængde derfor være repræsenteret ved $\triangle O_1A_1A_1'$, Resten af det konsumerede Arbejde er medgaaet til at frembringe den blivende Formforandring (overvinde den

*) Rapport XXXII, de la commission des méthodes d'essai, T. III.

»indre Gnidning«). Da $\triangle OAA' \sim \triangle O_1A_1A_1'$, ville deres Arealer forholde sig som $\overline{AA'}^2 : \overline{A_1'A_1'}^2$, hvorefter ses, at den ovenfor udtalte Sætning — at den konsumerede Arbejdsmængde indenfor Proportionalitetsgrænsen er proportional med Slutningsspændingens Kvadrat og med Legemets Volumen — gælder almindeligt, ogsaa udenfor Proportionalitetsgrænsen, naar man blot i Stedet for den »konsumerede« Arbejdsmængde sætter den »magasinerede elastiske« Arbejdsmængde. Men for at frembringe en vis Formforandring OA_2' , der gaar udover Proportionalitetsgrænsen, maa man udføre et Arbejde, saa stort som Arealet $OPA_1A_2A_2'O$, og heraf kan kun Arbejdet $O_2A_2A_2'$ genvindes. For at frembringe Brud maa man udføre et Arbejde, saa stort som Arealet $OPFBB_1B_1'$.

Alt det sagte gælder uafhængigt af Paavirkningsmaaden (Træk, Bøjning etc.). Det skulde synes, at man ogsaa herved maatte kunne bestemme den Formforandring, der frembringes af et Stød; naar man kender den Arbejdsmængde (levende Kraft), det stødende Legeme indeholder, og naar man ved, hvor stor en Del heraf der overføres til det stødte Legeme, skulde man blot finde et saadant Punkt A_2 (Fig. 121), at OPA_2A_2' er lig denne Arbejdsmængde. Dette er dog ikke ganske rigtigt, fordi nemlig Arbejdslinien $OPFB$ ikke nødvendigvis bliver den samme, naar Paavirkningen er et Stød, som naar man anstiller et Forsøg med roligt Træk, Tryk etc. Dette skulle vi se lidt nærmere paa om et Øjeblik, men vi ville først gøre endnu et Par Bemærkninger om Stød, idet vi saa forudsætte, at den i Fig. 121 tegnede Arbejdslinie er den rigtige for pludselige Paavirkninger.

Man anvender ofte Paavirkning ved Stød som Materialprøve (Faldprøver), som oftest ved at lade en Vægt fra en vis Højde falde ned midt paa Prøvestykket, der ligger paa to simple Understøtninger. Jærnbaneskiner og andet Jærnbanemateriel prøves regelmæssigt paa den Maade. Man faar naturligvis ikke hele Faldvægtens Energi overført til Prøvestykket, og hvor meget der overføres, ved man sjældent; en Del anvendes til lokale Deformationer af baade Prøvestykke og Faldvægt, en Del overføres til Prøvestykkets Understøtninger og optages af Fundamenterne o. s. v.; for at Faldprøver, der ere udførte med forskellige Apparater, skulle kunne sammenlignes, maa derfor hele Arrangementet være saa nær ens, at

man kan antage, at det er omtrent den samme Brøkdelen af hele Arbejdsmængden, der overføres til Prøvestykket. — Men dernæst maa der ved Prøverne anvendes samme Antal Slag, hvis man virkelig skal kunne sammenligne Resultaterne. Hvis et Prøvestykke brydes ved 1 Slag, et andet ved 10 Slag, kan man ikke sammenligne Summen af Energimængderne i de 10 Slag med Energimængden i det ene Slag; første Slag har maaske overført Energimængden OA_1A_1' (Fig. 121) til Prøvestykket, 2det Slag Energimængden $O_1A_1A_2A_2'$ o. s. v., og Summen heraf er ikke lig $OA_1A_2A_2'$. — Hvis man kender den Arbejdslinie, hvormed der skal regnes overfor pludselige Paavirkninger, har man i dens hele Areal et Maal for den Energimængde, Legemet kan modstaa i Form af ét Stød. I Mangel af Kendskab til denne Arbejdslinie regner man dog gerne med den, man faar ved Forsøg med rolig Paavirkning.

Tidens Indflydelse paa Arbejdsliniens Form er navnlig undersøgt for Paavirkning til Træk. Vi have allerede tidligere nævnt den *elastiske Eftervirkning*, som medfører, at der hengaar nogen Tid, inden Formforandringen har antaget den til Paavirkningen svarende Størrelse. Heraf ligger det nær at slutte, at et hurtigt gennemført Forsøg vil give en Arbejdslinie, der ligger nærmere ved Ordinataxten (Kraften tænkes altid afsat som Ordinatat, Formforandringen som Abscisse) end et langsomt Forsøg; til samme Værdi af Kraften vil der nemlig i første Tilfælde svare en mindre Formforandring end i sidste. *Et hurtigt Forsøg skulde altsaa give større Brudgrænse og mindre Forlængelse end et langsomt.* Dette bekræfter sig ogsaa, men ganske vist ikke altid særlig tydeligt; navnlig gælder Reglen aabenbart ikke absolut for Forlængelsen, som man vil se af følgende Forsøg *): (Se øverst næste Side.)

Indflydelsen af Forsøgenes forskellige Varighed er altsaa ikke stor; med den sædvanlige Varighed af Forsøget for almindelige Handelsprøver vil Brudgrænsen næppe variere mere end 100 kg./cm.², Forlængelsen 1 %.

Bauschinger har udført en hel Del meget omhyggelige

*) Rapport XX de la commission des méthodes d'essai, T. II.

Bach (*Elasticität u. Festigkeit*, 2te Aufl., 1894, S. 39) anfører nogle Forsøg af Goedicke, der altid passe med Reglen ovenfor.

	Antal Forsøg	Varighed	Brud- grænse kg./cm. ²	For- længelse °.
<i>Barba</i> , blødt Staal, $d = 1,6\text{ cm.}, l = 10\text{ cm.}$		$2\frac{1}{2}'$	3925	32,0
		75'	3720	34,0
<i>de la Marine Privat</i> , extra blødt Staal, $d = 1,9\text{ cm.}, l = 10\text{ cm.}$	1	4''	3900	39,0
	4	10''	3710	35,2
	5	60''	3630	32,3
	4	11'	3550	33,6
<i>Le Chatelier</i> , blødt Staal, $d = 1,38\text{ cm.}, l = 10\text{ cm.}$	6	10''	4563	26,3
	6	10'	4296	24,8

Forsøg*) over Varighedens Indflydelse, men kom til det Resultat, at for Svejsjærn og Staal var der ingen kendelig Forskel paa hurtige og langsomme Forsøg. Dette synes at staa i Modstrid med de ovenfor anførte Resultater, men det forklares ved, at han kun lod Tiden variere mellem 26 og 77 Minutter, medens det først er ved langt større Hastigheder. Forskellen viser sig.

Intet af de anførte Forsøg giver nogen Oplysning om Forholdene ved *øjeblikkelig Paavirkning* (Stød). Man ved heller ikke ret meget herom. Noget Begreb om Sagen faar man dog ved Betragtning af Fig. 122, Pl. 12, der viser Resultatet af et Forsøg af *Considère* **). Den nederste Kurve i Figuren er Arbejds-
linien for roligt Træk for en Traad af blødt Jærn, den øverste Kurve er den Arbejdslinie, man skal regne med ved pludselig Paavirkning (Stød) for samme Materiale. Hvert Punkt af denne Kurve er fundet ved sit Prøvestykke: et Traadstykke paavirkedes af en faldende Vægt paa 0,5 kg.; Traaden var ophængt i en Fjeder, hvorved dens dynamiske Spænding kunde observeres. Da det saaledes deformerede Traadstykke nu ikke vilde forholde sig som en upaavirket Traad overfor et nyt Stød, maatte der

*) *Mittheilungen*, Heft 20. Undersøgelsen omfattede forskellige Metaller: en kendelig Indflydelse af Varigheden konstateredes kun for Zinkblik. Bly og navnlig for Tin.

**) Rapport XX de la commission des méthodes d'essai, T. II.

bruges et nyt Stykke Traad for hvert nyt Punkt af Kurven. — Man ser, at de to Arbejdslinier afvige betydeligt fra hinanden; ikke desto mindre er man i Virkeligheden altid henvist til at regne med den statiske Arbejdslinie ogsaa overfor Stød, da der ikke foreligger tilstrækkeligt Forsøgsmateriale til at bestemme den i dette Tilfælde rigtige Kurve. De i Fig. 122 gængivne Resultater ere ganske enkeltstaaende.

De nu refererede Undersøgelser tilsigte navnlig at faa opklaret, hvorledes det gaar, naar Paavirkningens Varighed indskrænkes til det mindst mulige. Men ogsaa den stik modsatte Yderlighed, meget langvarig Paavirkning, har Interesse. Forsøg herover ere først gjorte af *Vicat* (1834), som fandt, at en Jærntraad, der var belastet med $\frac{3}{4}$ af Brudbelastningen (i den sædvanlige Betydning af Ordet), efter 33 Maaneders Forløb brødes efter at have forlænget sig 0,6 %. Lignende Forsøg ere i den nyere Tid udførte af *Thurston**) med Traad af svensk Jærn; alle udglødede Traade, der vare paavirkede med 65 % af Brudbelastningen og derover brødes efter kortere eller længere Tid (højest 17 Maaneder), de ikke udglødede viste langt større Modstandsevne; Forlængelserne maalttes ikke, saa man mangler en væsentlig Kontrol paa Forsøgene. Heraf slutter *Thurston*, at bløde Materialer (udglødet Traad) overfor meget langvarige Paavirkninger have en betydelig lavere Brudgrænse end den, man sædvanlig finder ved Trækforsøg. Det er dog ikke ganske udelukket, at Rust har spillet en Rolle ved disse Forsøg; i hvert Fald har *Considère***) gentaget Forsøgene med følgende Resultat: en udglødet Staaltraad, der var paavirket med 75 % af Brudbelastningen havde fra den 8de til den 18de Dag forlænget sig 0,01^{m.m.}, i de følgende 3 Maaneder kun 0,005^{m.m.}; ingen af de andre Traade, af hvilke en dog var paavirket med 73 % af Brudbelastningen, havde efter den 8de Dag forlænget sig 0,005^{m.m.}. Og naar Forlængelsen saaledes aftager, ligger det nær at slutte, at der ikke vil indtræde Brud. *Le Chatelier****) har ved lignende Forsøg vist, at hvis der

*) *Materials of engineering*, New York 1894, Part. II, S. 590. *Thurston* beretter ogsaa om *Vicat's* Forsøg.

**) *Rapp. XX de la commission des méthodes d'essai*, T. II.

***) *ibid.* Her er ogsaa vist, at for enkelte andre Metaller, navnlig Zink, ligger den virkelige Brudgrænse langt lavere end den sædvanlig fundne.

indtræder Brud efter nogen Tids Forløb, saa ville Forlængelserne i Begyndelsen ganske vist aftage noget (d. v. s. Forlængelserne pr. Minut), men derefter voxer, lige til Bruddet indtræder.

Resultatet af disse Forsøg er, at den *»virkelige Brudgrænse, den Belastning, som kan taales i det uendelige ved rolig Paa-virkning, rimeligvis ligger noget lavere end den, man bestemmer ved de almindelige Træksforsøg, men for smedeligt Jærn næppe mere end ca. 10 %*, og endda kun for de bløde Arter af smedeligt Jærn.

§ 45. *Temperatures Indflydelse.* Kendskab hertil har Betydning for Praxis i mange Tilfælde, baade for Bedømmelsen af den Sikkerhed, man har for de færdige Konstruktioner ved abnormt eller under sædvanlige Forhold indtrædende høje eller lave Temperaturer (almindelige Jærnkonstruktioner, specielt Jærnbaneskiner, under særlig stærk Kulde, Jærn-Søjler og -Bjælker under en Ildebrand, Dampkedler o. s. v.), og for den rigtige Behandling af Jærnet under Bearbejdelsen. I den nyere Tid er der anstillet en Mængde Undersøgelser herover*); vi skulle ganske kort referere de vigtigste Resultater, idet vi holde os til Konstruktionsjærn.

*Udglødning, d. v. s. Opvarmning til ca. 700° med paa-følgende langsom og jævn Afkøling, bringer Jærnet tilbage til sin normale Tilstand, hvis det af en eller anden Grund er undergaaet Forandringer. Indre Spændinger bringes til at forsvinde, Skørhed (omkring lokkede Huller, Blaaskørhed o. l. ligesaa. I Almindelighed tabes der noget i Styrke og vindes i Sejghed ved Udglødning. Naar der findes indre Spændinger før Udglødningen, kan der dog vindes i Styrke, saaledes f. Ex. naar støbte Stykker udglødes for at bringe Støbespændinger til at forsvinde. Exempelvis anføres nogle Resultater af Udglødning af Staalstøbninger**):*

*) Gode Oversigter findes i: *Zeitschr. d. Vereins deutsch. Ing.*, 1896. S. 565. 596, 635 (*Ledebur*). *Johnson: Materials of construction*, 1897, S. 537. Rapport XIX de la *commission des méthodes d'essai*, (*Le Châtelier*) Udførlig Kildeangivelse findes det førstnævnte Sted.

**) *Thurston: Materials of engineering*, New York 1894. Part II. S. 575.

	Brud- grænse kg./cm. ²	For- længelse o/o
ikke udglødet	6177	4
udglødet	7337	8
ikke udglødet	5055	4,2
udglødet	5763	14,6
ikke udglødet	3781	1
udglødet	4572	13

Hvis Proportionalitets- eller Flydegrænsen som Følge af en eller anden Behandling i kold Tilstand er bleven hævet (hvorum senere), vil den ved Udglødning helt eller tilnærmelsesvis vende tilbage til sin oprindelige Beliggenhed.

Virkningen af Temperaturer over 100° C. Som *Le Chatelier* har vist, har Forsøgets Varighed en betydelig Indflydelse paa Resultatet. Naar vi foreløbig tænke paa *Forsøg, der gennemføres i Løbet af 5—6 Minutter*, viser det sig, at *Brudgrænsen* i Begyndelsen aftager op til ca. 60° for blødt Jærn, 80—100° for haardere Materiale, og derefter voxer, indtil der ved 250—300° naas et Maximum, der ligger 800—1000 kg./cm.² højere end *Brudgrænsen* ved almindelig Temperatur, omtrent ens for al Slags smedeligt Jærn. Derefter aftager *Brudgrænsen* hurtigt. Disse Forhold ere illustrerede i Fig. 123, Pl. 14, der viser Resultatet af en Række Forsøg med Staal af højst forskellig Haardhed, Svejsjærn og Støbejærn i *Watertown Arsenal* *), 1888; *Brudgrænsen* er afsat som Ordinat, *Temperaturen* som Abscisse.

Af dette Forløb af Kurverne for *Brudgrænsen* skal man dog ikke slutte, at Jærnets Modstandsevne overfor ydre Paa-virkninger er større ved 250—300° end ved almindelig Temperatur. Alle Forsøg vise nemlig, at *Proportionalitetsgrænsen*

*) *Report of tests at Watertown Arsenal*, 1888, S. 503—13. Ogsaa refereret af *Johnson: Materials of construction*, S. 558. Temperaturen maalttes ved Stangens Forlængelse, idet denne antoges ensformig, ogsaa ved højere Temperaturer, hvilket neppe er korrekt. Kurverne stemme dog meget godt med lignende andetsteds fra.

og *Flydegrænsen* aflage hele Tiden med stigende Temperatur. Dette ses tydeligt i Fig. 124, Pl. 13, hvor nogle Middelresultater, som Rudeloff*) har fundet, ere fremstillede. Heraf ses ogsaa, at *Brudforlængelsen* og *Brudgrænsen* variere næsten i modsat Retning; Forlængelsen har sit Minimum omtrent ved den Temperatur, der giver Maximum for Brudgrænsen. Endvidere ses i Fig. 124, hvorledes Kontraktionen og Elasticitetskoefficienten variere; for Staal synes den sidste at voxe i Begyndelsen. Forsøgene i *Watertown* have givet en jævn Aftagen hele Tiden.

Det vigtigste af de i det foregaaende nævnte Resultater er denne Sammentræffen af Brudgrænsens Maximum med Forlængelsens Minimum omtrent ved 2—300°. Dette tyder nemlig paa, at Materialet maa være skørt ved denne Temperatur, og denne Skørhed, *Blaaskørhed*, er ogsaa godt kendt, navnlig for Staal; af Hensyn til den maa man aldrig bearbejde Staal ved Temperaturer mellem 100—200° og forsvindende Rødgloedhede. Sædvanlig foreskrives det da ogsaa ligefrem, at en saadan Bearbejdelse ikke maa finde Sted, og hvis det i enkelte Tilfælde ikke har kunnet undgaas, at da hele Stykket skal udglødes bagefter.

Naar Forsøget udføres hurtigt, i 40—50 Sekunder, forandres Forholdene noget, som det ses i Fig. 125, Pl. 14; Kurverne vise Brudgrænsens Variation med Temperaturen, som den er funden af *Le Chatelier***) for langsom Paavirkning (5—6 Min., fuldt optrukken Kurve) og hurtig Paavirkning (40—50 Sek., punkteret Kurve); mellem ca. 100° og ca. 300° giver hurtig Paavirkning den mindste Brudgrænse og største Forlængelse, for højere Temperaturer er det omvendt. For hurtig Paavirkning indtræffer Brudgrænsens Maximum først ved en noget højere Temperatur end ved langsom Paavirkning; Blaaskørheden er derfor størst overfor Stød og Slag ved ca. 500°, overfor rolig Paavirkning ved 300—350°. — Blaaskørheden viser sig forøvrigt ikke blot, medens man bearbejder Jærnet ved den nævnte farlige Temperatur; naar blot en saadan Bearbejdelse har fundet Sted, er Materialet endnu skørt efter Afkølingen:

*) *Mittheilungen aus den königl. techn. Versuchsanstalten zu Berlin*, 1893. S. 292. Kurven for Brudgrænsen viser her ikke det samme Minimum ved 60° — 100° som i Fig. 123.

**) Rapport XIX de la commission des méthodes d'essai, T. II.

man har adskillige Exempler paa, at Staalstænger, hvorpaa der er smedet ved »blaa Varme«, senere ere knækkede som Glas ved et ubetydeligt Stød eller Fald.

Af det ovenfor meddelte fremgaar det, at smedeligt Jærn i alt Fald ved 8—900° mister Størstedelen af sin Bæreevne. Denne Omstændighed spiller en stor Rolle i Praxis ved Bedømmelsen af Jærnkonstruktioners Brandsikkerhed, og Spørgsmaalet er derfor ogsaa adskillige Gange bleven undersøgt ved Prøver med Konstruktionsdele (Søjler) i fuld Størrelse, hvorved man kommer Virkeligheden nærmere end ved de ovenfor anførte Laboratieforsøg. Saadanne Forsøg ere udførte af *Bauschinger**) o. fl., i den nyeste Tid navnlig af en *Kommision***), der blev nedsat i Hamburg i Anledning af en Pakhusbrand dér i 1891; Søjlerne belastedes omtrent med det Tryk, man vilde byde dem i en Bygning, udsattes derpaa for Ildens Virkning og tilsidst i Almindelighed for Paasprøjtning med koldt Vand. Som almindeligt Resultat kan angives, at ubeklædte Smedejærnsøjler, belastede med 800—1000 kg./cm.² give efter og bøje sig ud til Siden ved c. 600°; ved en god Beklædning med et ildfast Materiale***) kan Bruddet udsættes længe, 4—5 Timer.

Virkningen af Temperaturer under 100°. Det har længe været bekendt, at Jærn undertiden viser sig skørt i Frostvejr; der indtræffer f. Ex. gennemsnitlig langt flere Skinnebrud paa Jærnbannerne om Vinteren end om Sommeren. At dette ikke alene kan skyldes tilfældige ydre Omstændigheder (for Jærnbaneskinners Vedkommende den frosne Ballast), har ligeledes længe været klart. Allerede *Knut Styffe*†) viste ganske vist, at Brudgrænsen overfor Træk voxer i alt Fald ned til ÷ 40°, men *Sandberg* konstaterede (1867) ved Faldprøver, at Skinner

*) *Mittheilungen*, Heft 12 og 15.

**) Dens Beretning er udkommen som særligt Værk: »*Vergleichende Versuche über die Feuersicherheit von Speichersstützen*«, Hamburg, 1895—96. Kort Omtale af de vundne Resultater i *Centralbl. d. Bauverwaltung*, 1896, S. 246 og 1897, S. 507.

**) En Beretning navnlig om de ved de hamburgske Forsøg gjorte Erfaringer om forskellige Beklædninger findes i »*Ingeniøren*«, 1896, S. 305, 313.

†) De nævnte Forsøg ere f. Ex. refererede af *Ledebur* i den ovenfor nævnte Art. i *Zeitschr. d. V. deutsch. Ing.* 1896.

virkelig vare mere skøre i Kulde end i Varme, og flere andre have senere vist det samme. *Sandberg**) lod en Del Svejsjærns-Skiner skære i to Stykker og prøvede den ene Halvdel ved $+ 29^{\circ}$, den anden ved $\div 12^{\circ}$; som Middelværdi fandtes, at ved $+ 29^{\circ}$ behøvedes der en Faldhøjde af $11,9^m$ for at frembringe Brud, ved $\div 12^{\circ}$ kun $3,4^m$ Faldhøjde (med samme Faldvægt); Nedbøjningen var mindst 4 Gange saa stor i første som i sidste Tilfælde.

Denne Skørhed kunde man tænke sig forklaret ved, at Forlængelsen aftager samtidig med at Brudgrænsen voxer; men dette er dog neppe tilstrækkelig Aarsag. *Steiner**) fandt rigtignok ved sine Forsøg (1891—92) baade med Thomas- og Martinjærn en ganske betydelig Aftagen af Forlængelsen — fra 28—30 % til 17 % ved en Variation i Temperaturen fra $+ 25^{\circ}$ til $\div 40^{\circ}$ —, og hans Forsøg bevirkede i sin Tid en vis Ængstelse overfor Staal som Konstruktionsmateriale, men man maa næsten antage, at det Staal, han eksperimenterede med, endnu har lidt noget af Børnesygdomme; i alt Fald have forskellige nyere Forsøg givet langt gunstigere Resultater for Staal, og navnlig synes *Rudeloff's***) meget omfattende Undersøgelser ikke at give nær saa stærk en Aftagen af Forlængelsen. Vi skulle anføre nogle af hans Resultater (Forlængelsen maalt paa $30^{m.m.}$ paa hver Side af Bruddet.). (Se Tabellen næste Side.)

Den mest plausible Forklaring er fremsat af *Le Chatelier****), som antager, at Skørheden er en Følge af Flydegrænsens Variation med Temperaturen og med Paavirkningens Hastighed. I Fig. 126, Pl. 14, hvor der er fremstillet nogle Forsøgsresultater med Traad af extra blødt Staal, angive de fuldt optrukne Kurver Flyde- og Brudgrænse ved meget langsom Paavirkning, de punkterede Kurver for en Varighed af Forsøget paa 1 Minut og den stiplede Kurve endelig Brudgrænsen, naar Forsøget gennemførtes i 2—3 Sekunder. Man ser, at ved langsom Paavirkning holder Afstanden mellem Flyde- og Brud-

*) De nævnte Forsøg ere f. Fx. refererede af *Ledebur* i den ovenfor nævnte Art i *Zeitschr. d. V. deutsch. Ing.* 1896.

**) *Mittheilungen aus den königl. techn. Versuchsanstalten zu Berlin*, 1895. S. 206.

***) Rapport XIX de la commission des méthodes d'essai, T. II.

Materiale	Temperatur	Flydegrænse kg./cm. ²	Brudgrænse kg./cm. ²	Forlængelse %
Blødt Nittejern, Svejsjern	+ 18°	2870	3970	30,2
	— 20°	2920	4170	29,0
	— 80°	3040	4270	26,6
Martinjern, Skibsbygningsmateriale	+ 18°	2400	4040	39,5
	— 20°	2470	4360	38,0
	— 80°	2970	4520	—
Thomasjern, Skibsbygningsmateriale	+ 20°	2870	4340	35,3
	— 20°	3040	4550	33,8
	— 80°	3200	4620	(31,9)
Fjederstaa	+ 18°	3870	7720	17,7
	— 20°	4020	8420	15,7
	— 80°	4440	8440	12,8

grænsen sig omtrent konstant; begge voxe langsomt med af-
tagende Temperatur. Ved 1 Minuts Varighed af Forsøget
stiger Flydegrænsen mellem + 10° og ÷ 65° langt stærkere
end Brudgrænsen, og ved ÷ 65° falde de to Grænser sammen.
At disse to Punkter af Arbejdslinien falde sammen, vil her
dog kun sige, at de have samme Ordinat; naar Flydegrænsen
er naaet, bliver Arbejdslinien omtrent vandret, Kraften holder
sig konstant, indtil Bruddet indtræder, men der foregaar (eller
kan foregaa) en betydelig Forlængelse, inden dette finder Sted.
Kurven i Fig. 126 for 2—3 Sekunders Varighed af Forsøget
har ganske samme Forløb som Kurven for Flydegrænsen ved
1 Minuts Varighed af Forsøget, i alt Fald fra ÷ 20° og ned-
ad, og det ligger da nær at slutte, at ved pludselig Paavirk-
ning falde Flyde- og Brudgrænse sammen, naar Temperaturen
er under ÷ 20°. Hvis dette imidlertid er Tilfældet, kan man
let tænke sig, at der paa Grund af Mangel paa Homogenitet
kan findes et enkelt Punkt af Prøvestykket, hvor Brudgrænsen
kan naas, inden man er kommen op til Flydegrænsen for det
øvrige Materiale, og i saa Fald springer Prøvestykket dér
udeh først at forlænges, viser sig altsaa at være skørt.

Almindelige Jærnkonstruktioner ere dog sjældent udsatte for saa lav en Temperatur eller for saa stødvis en Paavirkning, at denne Skørhed faar nogen Betydning.

§ 46. Indflydelsen af den kemiske Sammensætning.

Det ligger ganske udenfor denne Bogs Ramme at behandle Spørgsmaalet om Jærnets kemiske Sammensætning og de forskellige Indblandingers Virkning i Enkelthederne. En kort Redegørelse for Hovedpunkterne vil dog være af Betydning for en Ingeniør, der beskæftiger sig med Jærnkonstruktioner.

Kemisk rent Jærn har i Almindelighed forholdsvis ringe Styrke, men stor Seighed. I Praxis forekommer det aldrig; det er først ved Forbindelsen med forskellige andre Stoffer, og navnlig da Kulstof, at det bliver til et teknisk brugbart Materiale.

Kulstof forekommer i smedeligt Jærn i alle mulige Forhold mellem c. 0,1 % og 2 %; 2—2,3 % er omtrent Grænsen mellem Støbejærn og smedeligt Jærn. Det kulstoffattige Jærn har mindst Styrke, størst Seighed; ved Forøgelse af Kulstofindholdet fra 0,1 til 1,0 % kan man bringe Brudgrænse og Flydegrænse op til omtrent det dobbelte, men samtidig gaar Seigheden meget stærkt ned (sammenlign de i § 43 refererede Forsøg af *Bauschinger* med Jærn af forskelligt Kulstofindhold; se ogsaa Fig. 123).*) Ved c. 1 % Kulstofindhold — Grænsen angives noget forskelligt, 0,8—1,3 % — naar Brudgrænsen sit Maximum, og ved endnu større Kulstofindhold aftager baade Styrke og Seighed, saa Materialet nærmer sig mere og mere til at forholde sig som Støbejærn. De forskellige Former, hvori Kulstoffet optræder, og disses Betydning for Hærdning, Udglødning m. m. skulle vi ikke indlade os paa.

Af de mange andre Stoffer, der mere eller mindre almindeligt forekomme i Jærn (Staal), ere Silicium, Mangan, Phosphor og Svovl de vigtigste. Et godt Begreb om de forskellige Stoffers Virkning paa Styrke og Seighed faar man ved en Række Forsøg, der er anstillet af *Arnold***) (Sheffield), og som

*) En lang Række Resultater for Staal med forskelligt Kulstofindhold findes i *Hålfasthetsprof å svenska materialier* utg. af Jærnkontoret, Stockholm, 1897, S. 19—38.

**) Refereret i *Zeitschr. d. Vereins deutsch. Ing.*, 1894, S. 902.

vi her skulle referere. For at bestemme Virkningen af hvert Stof for sig fremstillede han Legeringer af tilnærmelsesvis rent Jærn og c. $1\frac{1}{2}\%$ af vedkommende Stof, idet alle de andre sædvanlige Indblandinger saavidt muligt bleve holdte borte, og af hver Legering udvaldes Rundstænger, der underkastedes Trækprøver. Analyser af de enkelte Prøvestykker viste, at der i intet af dem (undtagen naturligvis i den særlige Legering med vedkommende Stof) fandtes mere end $0,03\%$ Svovl, $0,03\%$ Phosphor, $0,08\%$ Silicium (i Manganlegeringen dog $0,37\%$ Si), $0,04\%$ Aluminium, $0,14\%$ Mangan (i Kullegeringen dog $0,28\%$ Mn.); Kulstofindholdet er nedenfor anført for hver af Legeringerne. I almindeligt Jærn forekommer intet af de nævnte Stoffer dog i saa store Mængder som $1\frac{1}{2}\%$, saa man kan ikke af Forsøgsresultaterne slutte noget bestemt om Indblandingernes Virkning under almindelige Forhold; men man faar et Begreb om, i hvilken Retning Virkningen af de enkelte Stoffer gaar. Resultaterne i Tabellen nedenfor skulle nærmest sammenlignes med Resultaterne for det *valsed*e Jærn i 2den Linie.

Specialelement	Indhold af		Elasticitetsgrænse kg./cm. ²	Brudgrænse kg./cm. ²	Forlængelse pr. 5 cm. %	Kontraktion %
	Specialelement %	Kulstof %				
Jærn, udstøbt	99,82	0,08	2250	3160	16,0	38,8
" valset	99,87	0,04	2260	3430	47,0	76,5
Kulstof	1,35	1,35	7320	9060	5,0	5,6
Nikkel	1,51	0,11	3520	4210	35,3	62,0
Mangan	1,29	0,10	3570	5070	35,0	65,0
Kobber	1,81	0,10	4850	5480	30,5	62,2
Chrom	1,10	0,17	3100	4280	40,0	72,1
Wolfram	1,41	0,08	3150	4280	42,5	76,6
Aluminium	1,85	0,03	2680	4250	35,0	63,7
Silicium	1,94	0,08	3200	4990	36,0	62,4
Arsen	1,57	0,04	2780	4260	28,5	34,1
Phosphor	1,36	0,07	4560	4560	0,0	0,0
Svovl	0,97	0,08	400	400	0,0	0,0

Det ses af Tabellen, at saadanne Mængder som c. $1\frac{1}{2}\%$ ikke have nogen særlig fremtrædende Virkning undtagen for

Kulstof, Phosphor og Svovl; Kobber, Silicium og Mangan have dog aabenbart en afgjort gunstig Indflydelse. Undersøgelsen giver kun Oplysning om Virkningen af de nævnte Mængder af Stofferne; større Mængder give som bekendt ofte Legeringer med fremragende Egenskaber (Nikkel-, Chrom-, Wolfram-, Manganstaal o. fl.).

Silicium og *Mangan* forøge i de sædvanligt i Jærn forekommende Mængder Styrken, formindske Seigheden; dette er forøvrigt en almindelig Regel, som i forskellig Grad gælder næsten alle fremmede Stoffer i Jærn.

Silicium giver tættere Støbninger, Mangan modvirker Svovlets skadelige Indflydelse og tilsættes under Fremstillingen af Staal som Afiltningmiddel. Disse to Stoffer forekomme altid i ikke ubetydelig Mængde i Staal. For at Seigheden ikke skal blive formindsket for meget, sættes i Almindelighed for Konstruktionsjærn 0,1 % Silicium og 0,3—0,5 % Mangan som Grænser, der ikke gerne maa overskrides.

Svovl gør Jærnet rødskørt, d. v. s. skørt ved Rødgldhede, i Almindelighed mest ved mørk Rødgldhede. Façonjærn med tynde Flanger kan derfor overhovedet ikke vals, naar Svovlindholdet overskrider en vis Størrelse; for Konstruktøren er dette en ganske beroligende Omstændighed, han behøver altsaa i Almindelighed kun at frygte Svovlet i Jærn, der leveres i simple Former. Svovlets skadelige Virkning modarbejdes, som ovenfor bemærket, af Mangan, saa det tilladelige Svovlindhold kan være større, naar der er rigeligt Mangan til Stede. Medens f. Ex. 0,04 % Svovl allerede kan gøre Svejsjærn tydelig rødskørt, fordi der her intet eller næsten intet Mangan er til Stede, kan Staal endnu taale 0,08—0,1 %, naar det indeholder 0,7—0,8 % Mangan. Det tilladelige Svovlindhold varierer derfor gerne mellem 0,02 % og 0,1 %.

Phosphor forøger Styrken, men formindsker samtidig Seigheden i meget høj Grad; Jærnet bliver *koldskørt*. Virkningen voxer med Kulstofindholdet og viser sig langt tydeligere ved Staal end ved Svejsjærn; det forholdsvis store Procentindhold af Phosphor i Svejsjærn, der undertiden kan forekomme uden at gøre videre Skade, hidrører maaske dog som oftest fra Slaggede og er derfor ikke i direkte Berøring med Jærnet. Det tilladelige Phosphorindhold varierer mellem 0,01 % og 0,08 %.

Der er gjort mange Forsøg paa at opstille Formler for Brudgrænse, Brudforlængelse, Kontraktion etc. som Funktion af den kendte Sammensætning*), uden at Bestræbelserne dog kunne siges at være lykkedes. Vanskeligheden herved ligger for en stor Del i, at den forskellige Bearbejdelse og Behandling af Jærnet spiller en ofte lige saa stor Rolle som den kemiske Sammensætning; den maa derfor i alt Fald ogsaa indgaa i Formlen paa en eller anden Maade, men at udtrykke Bearbejdelsens Effektivitet ved Tal har hidtil været umuligt.

Her i Europa har det hidtil ikke været almindelig Brug at specificere Grænser for Indholdet af skadelige Stoffer; i Nordamerika specificeres næsten altid et Maximumsindhold af Svovl og Phosphor.

§ 47. Paavirkninger, der overskride Proportionalitetsgrænsen, hyppigt gentagne Paavirkninger. Arbejdsliniens Form og dens mærkelige Punkters Beliggenhed afhænger i høj Grad af den Behandling, Jærnet tidligere har været underkastet. Dette Spørgsmaal er navnlig bleven undersøgt af *Bauschinger* og *Wöhler*; vi skulle først gengive en Del af *Bauschingers***) Resultater og begynde med Paavirkninger, der stadig ere af samme Art, altsaa enten *Træk* eller *Tryk*.

1. *Paavirkninger, der holde sig under Proportionalitetsgrænsen, medføre ingen Forandring i Prøvestykkets elastiske Egenskaber, selv om de variere adskillige Gange mellem Nul og deres højeste Værdi. Anderledes gaar det derimod, hvis Proportionalitetsgrænsen overskrides.*

2. *Ved en Paavirkning mellem Proportionalitets- og Flydegrænsen hæves den første strax og desto mere, jo højere Paavirkningen er; naar Paavirkningen er naaet omtrent op til Flydegrænsen, befinder Proportionalitetsgrænsen sig ved et Maximum,*

*) En Del amerikanske Forsøg refereres af *Johnson* (*Materials of construction*, S. 157). En fransk Formel (*Deshayes*) findes i *Ann. d. ponts et chaussées* 1885, I, S. 767. *Jüptner v. Johnstorff* (*Beziehungen zwischen Zerfallsfestigkeit u. chemischer Zusammensetzung von Eisen u. Stahl* og *Beziehungen zwischen der chemischen Zusammensetzung u. den physikalischen Eigenschaften von Eisen u. Stahl*, Leipzig, 1895 og 1896) opregner de fleste tidligere opstillede Formler, førend han opstiller sine egne.

**) *Mittheilungen*, Heft 13.

og saasnart Flydegrænsen overskrides, gaar Proportionalitetsgrænsen ned, ofte helt til Nul. For at konstatere dette sidste, maa man foretage en Maaling umiddelbart efter; lader man nemlig nogen Tid hengaa, forandres Forholdene atter, idet den saaledes sænkede Proportionalitetsgrænse i Tidens Løb atter hæver sig; efter nogle Dage naar den op til Paavirkningens Værdi, og efter længere Tid, i alt Fald efter nogle Aars Forløb, ligger den endnu højere.

3. Ved Paavirkning op over Flydegrænsen hæves denne strax op til samme Størrelse som Paavirkningen, og i Tidens Løb gaar Flydegrænsen endnu højere op.

Det endelige Resultat af en Paavirkning over Flydegrænsen er altsaa altid, at baade Proportionalitetsgrænsen (i Tidens Løb) og Flydegrænsen hæves.

4. Med Elasticitetskoefficienten forholder det sig i Reglen paa samme Maade som med Proportionalitetsgrænsen: ved Paavirkning over Flydegrænsen bringes den til at aftage noget, men den voxer i Tidens Løb igen og ligger efter nogle Aars Forløb altid højere end oprindelig. Variationen af E er dog ikke betydelig.

For den klarere Forstaaelses Skyld skal anføres et Par af de Forsøgsrækker, ved hvilke Bauschinger har bevist ovenstaaende Sætninger. Sætning 2 og 3 (undtagen Tidens Virkning bagefter) fremgaar af følgende Forsøg*) med Materiale fra en Staalskinne (alt er angivet i kg./cm.²):

Paavirkning: Træk.	E	P	F	Maximumsbelastning
Oprindelig Tilstand	2200000	1900	> 2460	2460
Ved Maaling strax efter	2225000	2120	> 3130	3130
• • • •	2226000	2350	3330	3350
• • • •	2200000	1900	3480	4490
• • • •	2140000	1030	> 4590	4590

Ved første Maaling var højeste Belastning 2460, og Flydegrænsen var da endnu ikke naaet (dette er betegnet ved >

*) Bauschingers Mittheilungen, Heft 13, Tab. VIII.

foran Tallet i Kolonnen »F«). Ved Belastningen 2460 ses i 2den Linie Proportionalitetsgrænsen at være hævet til 2120; ligesaa hæves Proportionalitetsgrænsen ved Belastningen 3130, der endnu ikke naar Flydegrænsen. I 3die Linie ses Maximumsbelastningen at overskride Flydegrænsen ganske lidt, og her ved sænkes P og ligeledes E , hvorimod F hæves; den stærkere Belastning, hvormed 4de Linie ender, ses i 5te Linie at have langt større Virkning.

Sætning 3 og 4 samt sidste Del af Sætning 2 kan paa samme Maade forfølges ved følgende Forsøgsrække*) med Svejsjærn:

Paavirkning: Træk	E	P	F	Maximumsbelastning
Oprindelig Tilstand	2050000	1620	2130	2430
20 Minutter efter	1980000	1035	2480	3000
63 Timer "	1960000	2960	3380	3590
20 Minutter "	1870000	1070	> 3650	3650
3 Aar 18 Dage efter	2090000	> 3870	> 3870	3870

Mellem 2den og 3die Linie maa man erindre, at der er hengaaet 63 Timer; ved Belastningen 3000 er Proportionalitetsgrænsen strax bleven sænket, men i Løbet af de 63 Timer har den atter hævet sig helt op til 2960. Elasticitetskoefficienten er ligeledes bragt til at aftage ved Belastningen 3000, og endnu efter de 63 Timers Forløb ligger den lavere; Virkningen er her langsommere.

Sætningerne ere navnlig beviste ved Trækforsøg, men enkelte Forsøg af Bauschinger med Tryk have givet ganske samme Resultater, hvilket ogsaa er bekræftet af Dupuy**).

Ifølge det nu meddelte er Beliggenheden af Proportionalitets- og Flydegrænsen højst usikker, da man ikke altid kan kende den Behandling, Jærnet er undergaaet, inden man faar fat paa det. For Proportionalitetsgrænsens Vedkommende har Bauschinger dog gjort nogle senere Forsøg, der synes at tyde

*) Bauschingers Mittheilungen, Heft 13, Tab. II.

**) Annales des ponts et chaussées, 1897, I. S. 1.

paa, at selv om dens øjeblikkelige Beliggenhed kan være meget forskellig, saa er dog den højeste Beliggenhed, hvortil den kan hæves, uafhængig af den tidligere Behandling. Den højeste Beliggenhed faar man ifølge det foregaaende ved at anvende saa stor en Paavirkning som muligt, og det vil sige Brudbelastningen. For Brudstykker af Provelegemer, der vare blevne trukne over, fandt *Bauschinger* følgende *):

	Proportionalitetsgrænse	
	oprindelig	efter Brud
Svejsjærn	1840	2800
„	1290	2850
Blødt Staal	2350	2700
„	1000	2700

De to Svejsjærns Stænger og ligesaa de to Staalstænger vare skaarne ud af samme større Stykke; trods den højst forskellige oprindelige Beliggenhed af Proportionalitetsgrænsen gave Maalingerne med Brudstykkerne, som man ser, samme Resultat. Tidens Virkning spiller ved disse Forsøg ingen Rolle, da Brudstykkerne havde ligget lige længe efter at være revne over.

De i det foregaaende omtalte Paavirkninger forekomme ikke sjældent i Praxis; saasnart man giver Jærn en blivende Formforandring i kold Tilstand — ved Bøjning, Hamring, *kold Valsning***), kold Traadtrækning etc. — overskrides Flyde-

*) *Mittheilungen*, Heft 21, S. 27.

**) En meget omfattende Undersøgelse af koldt valsede Axler af *Thurston* (se *Th.: Materials of engineering*, New-York 1894, Part II, S. 615) bekræfter *Bauschingers* Resultater. *Thurston* fandt, at denne Proces havde Elasticitetskoefficienten c. 4 0/0, »Elasticitetsgrænsen« (vistnok her lig Flydegrænsen) c. 100 0/0, Brudgrænsen 25—40 0/0, medens Brudforlængelsen aftog fra c. 25 0/0 til c. 10 0/0; disse Tal ere fundne som Gennemsnitsværdier af flere Hundrede Forsøg.

Materialets Stivhed forøges altsaa overordentligt, hvilket man i mange Tilfælde kan drage sig til Nytte; men det er kun blødt Materiale, der kan taale Behandlingen, og der tabes meget i Modstandsevne overfor Stød o. l.

Et Begreb om, hvad der opnaas ved kold Valsning, faar man ogsaa

grænsen i de paavirkede Punkter, og Jærnet viser derfor nu mindre Strækkelighed og Sejghed, men større Stivhed, end i sin oprindelige Tilstand. — Det har derfor stor Betydning at vide, om man kan faa de kunstigt forhøjede Proportionalitets- og Flydegrænser sænkede igen, og hvorledes dette kan ske, og ogsaa herover har *Bauschinger* anstillet omfattende Undersøgelser. Som Resultat heraf anføres, at stærke Rystelser (Oversmedning i kold Tilstand) og ligeledes *Opvarmning til mindst ca. 400° med paafølgende Afkøling* *atter sænker de kunstigt hævede Grænser*; Virkningen er kraftigst overfor Proportionalitetsgrænsen, men ogsaa Flydegrænsen sænkes. *Hurtig Afkøling efter Opvarmningen virker langt kraftigere end langsom Afkøling; ved Glødning og paafølgende hurtig Afkøling sænkes Proportionalitetsgrænsen til Nul eller omtrent til Nul, langsom Afkøling kan derimod ikke frembringe saa stærk en Sænkning.*

Til Bevis for disse Sætninger anfører *Bauschinger* en Mængde Forsøgsrækker, og de ere ogsaa fundne bekræftede andetsteds. Vi skulle anføre en Forsøgsrække med en koldt valset Svejsjærns-Axel fra *Watertown Arsenal**), der viser god Overensstemmelse med *Bauschingers* Resultater:

af hosstaaende Tabel; (se »Hålfasthetsprof å svenska materialier« utgifna af Järnkontoret, Stockholm 1897, S. 38). Materialet er 30 m.m. Rundjærn (Bofors' Martinstaal) med 0,44 % Kulstof. Stængerne vare udglødede før Valsningen.

Valsningen udført under et totalt Tryk af ts.	Elasticitets- grænse kg./cm. ²	Brudgrænse kg./cm. ²	Forlængelse pr. 10 cm. %
12,25	3900	6100	20
15,40	4470	6180	12,3
18,50	5170	6250	12,2
21,70	5620	6320	10,3
29,50	5680	6260	11,5
35,85	6270	6660	9,0
67,25	6590	7100	5,0

*) Report of tests at Watertown Arsenal, 1892, S. 513.

Udglødnings- temperatur	Afkolet	Proport.- grænse kg./cm. ²	Brud- grænse kg. cm. ²	Forlængelse pr. 12,5 cm. 0,0
Ikke udglødet		3380	4750	13,6
"		3310	4730	9,6
150°	langsomt	3450	4510	13,4
300°	"	3450	4500	15,0
450°	"	3020	4180	14,6
600°	"	2670	3560	21,6
850°	"	2590	3580	22,2
lys kirsebærrød	i Luften	ca. 1000	3440	28,0
lys kirsebærrød	i Saltvand	0	3740	21,6
"	i Olie	0	3620	25,8

Ogsaa de tidligere omtalte Forsøg med Smedejærnsøjler under Indvirkning af Varme (Ildebrand) bekræfte Sætningernes Rigtighed; naar der sprøjtes koldt Vand paa den til ca. 600° opvarmede Søjle, bøjer den sig meget stærkt ud til Siden, hvilket tyder paa en Sænkning af navnlig Flydegrænsen.

Vi gaa dernæst til *Paavirkninger, der skifte mellem Træk og Tryk*. Her sandt *Bauschinger* følgende Forhold:

1. *Ved Belastning til f. Ex. Træk over Proportionalitetsgrænsen, bliver Proportionalitetsgrænsen for Tryk bragt ned til Nul eller omtrent til Nul; omvendt ved Belastning til Tryk: Virkningen er des større, jo højere Belastningen er.* Naar f. Ex. Proportionalitetsgrænsen for Træk paa denne Maade er sænket, kan den, efter hvad der ovenfor er meddelt, atter hæves ved Træk-Belastning; men *saasnart Belastningen overskrider den saaledes havede Proportionalitetsgrænse for Træk, vil Proportionalitetsgrænsen for Tryk strax gaa ned.* I Tidens Løb ville de paa denne Maade sænkede Grænser *ikke* atter hæve sig, eller dog kun lidt.

2. Ved jævnt voxende, mellem Træk og Tryk skiftende Paavirkninger, der ikke overskrider den oprindelige Proportionalitetsgrænse, kunne Proportionalitetsgrænserne ikke sænkes.

3. Naar man her har haft begge Proportionalitetsgrænser trykkede ned, og man atter vil hæve dem saa højt som muligt, lader dette sig ikke gøre ved at behandle dem hver for sig, — Tryk-Proportionalitetsgrænsen ved Trykbelastning, — thi en

Overskridelse af en af de frembragte Grænser bringer strax den anden til at gaa ned. Derimod kan man anvende Belastninger, der skifte regelmæssigt mellem Træk og Tryk og voxe jævnt; ved en saadan Paavirkning vil nemlig Proportionalitetsgrænsen for f. Ex. Tryk ikke gaa ned til Nul, førend Trækpaavirkningen kommer op over den oprindelige Proportionalitetsgrænse. Selv paa den Maade kan man imidlertid kun hæve begge Proportionalitetsgrænser til en vis Værdi, der altid ligger betydeligt lavere end den oprindelige; denne Værdi kaldte Bauschinger den »naturlige Elasticitetsgrænse«.

Vi anføre atter her en af Bauschingers Forsøgsrækker *) (for Bessemerstaal):

Paavirkning	P	Max.-lastning	P. G. af den anvendte Max.-Belastning gaar	
			P (Træk)	P (Tryk)
Træk	2694	3674	op	ned
Tryk (22 $\frac{1}{2}$ Timer senere)	494	3706	ned	op
Træk (5 » »)	245	3429	op	ned
Tryk (4 Dage » »)	738	1230	bliver	op
Træk (2 » »)	738	1230	op	bliver
Tryk (5 $\frac{1}{2}$ Timer » »)	1230	1476	bliver	op
Træk (21 $\frac{1}{2}$ » »)	1230	1476	op	bliver
Tryk (2 Dage » »)	1476	1476	bliver	op
Træk (4 Timer » »)	1476	1722	op	bliver

Ved 3 yderligere Forsøg med Maximumsbelastning 1722 baade til Træk og Tryk hæves Proportionalitetsgrænserne ikke højere; 1476 er altsaa den »naturlige Elasticitetsgrænse«. Ved de første 3 Forsøg overskrider Maximumsbelastningen den oprindelige Proportionalitetsgrænse og bevirker derfor en Forandring af baade Træk- og Tryk-Grænserne; ved de følgende Forsøg naar Belastningen derimod ikke op til den oprindelige Proportionalitetsgrænse, og idet der skiftes regelmæssigt mellem Træk og Tryk, hæves begge Grænserne.

Hidtil have vi navnlig talt om Proportionalitets- og Flydegrænsen, men heller ikke *Brudgrænsen* er uafhængig af Jærnets tidligere Paavirkninger. En Paavirkning, der overskrider Flyde-

*) *Mittheilungen*, Heft 13, Tab. XIII.

grænsen, vil i Almindelighed ogsaa hæve Brudgrænsen *), mest naar Paavirkningens Størrelse nærmer sig til Brudgrænsen eller virkelig naar denne, saa der indtræder Brud; naar Forsøget gentages med Brudstykkerne af en overreven Slang, finder man en højere Brudgrænse. Det synes ogsaa, som om Brudstykkernes Styrke voxer yderligere i Tidens Løb: en Overskridelse af Brudgrænsen har altsaa ganske samme Virkning paa denne Grænses Beliggenhed som en Overskridelse af Flydegrænsen har paa Flydegrænsens Beliggenhed.

Disse Sætninger ere bekræftede ved mange Forsøg, bl. a. af *Bauschinger* **), der trak en Jærnstang over 7 Gange efter hinanden og derved fandt Brudgrænsen tiltaget fra 3200 til 4400 kg./cm.², og af *Thurston* og *Beardslee* ***), der ogsaa navnlig have studeret Tidens Indflydelse. Sidstnævnte fandt ved Forsøg med godt, sejt Jærn (Kedelplade), at Styrken voxede ca. 15 % ved en Paavirkning til Brudgrænsen og ca. 1 Dags Hvile bagefter; haardt Materiale viste kun en Tilvæxt af gennemsnitlig ca. 6 %. Vi skulle anføre Resultaterne af en anden Række Forsøg af *Beardslee* med Rundjærn af forskellig Diameter (23—78 m. m.), hvorefter Tidens Indflydelse tydeligt fremgaar:

Hviletid mellem de to Forsøg	Middel- Tilvæxt i Styrke	Antal Forsøg
mindre end 1 Time	1,1 %	5
1—8 Timer	3,8 -	8
3 Dage	16,2 -	10
8 Dage	17,8 -	2
8—43 Dage	15,3 -	5
6 Maaneder	17,9 -	12

Man har villet forklare denne Voxen af Brudgrænsen alene derved, at Prøvestykket selvfølgelig første Gang rives over paa det svageste Punkt; denne Forklaring kan dog ikke være

*) Se Noten ovenfor om koldt valsede Axler.

**) Se *Weyrauch: Die Festigkeitseigenschaften etc. von Eisen- und Stahlkonstruktionen*, 2te Aufl.; Leipzig 1889. S. 98.

***) Se *Thurston: Materials of engineering*, Part. II, New-York 1894, S. 600.

rigtig af flere Grunde, navnlig af Hensyn til Hviletidens Indflydelse.

Vi komme nu til de saakaldte »Wöhler'ske« Forsøg. Naar man ser bort fra enkelte Forløbere, var nemlig Wöhler den første, der undersøgte Virkningen af *hyppigt gentagne Paavirkninger* paa Brudgrænsens Beliggenhed (1859—70)*); Forsøgene fortsattes af *Spangenberg*, og senere har navnlig *Bauschinger* underkastet dette Spørgsmaal en meget omhyggelig Under søgelse**).

Resultaterne af Wöhlers Forsøg kunne sammenfattes saaledes: *Ved hyppigt gentagne Belastninger indtræder Brud for en mindre Spænding end ved en rolig Paavirkning.* Idet Paavirkningen varierer mellem en højere og en lavere Grænse, $p_{\max.}$ og $p_{\min.}$, vil det Antal Spændingsvariationer, der er nødvendigt for at fremkalde Brud, navnlig afhænge af Differensen mellem $p_{\max.}$ og $p_{\min.}$ (disse indføres med Fortegn), og disse Grænsers absolute Værdier ville kun have den Betydning, at for *væxende Spænding indtræder Brud ved en mindre Differens.*

Hvis f. Ex. $p_{\max.}$ holdes konstant, skal der des flere Spændingsvariationer til at fremkalde Brud, jo større $p_{\min.}$ er, altsaa jo mindre Differensen er; og der vil for et givet $p_{\max.}$ være en vis Værdi af Differensen eller af $p_{\min.}$, ved hvilken Brud netop endnu ikke indtræder, selv om Spændingsvariationernes Antal er uendelig stort (Wöhler har anvendt 30—50, i et enkelt Tilfælde endog 132 Millioner Spændingsvariationer).

Wöhlers Resultater have en meget vidtrækkende praktisk Betydning, idet man derved har et Udgangspunkt for Valget af den tilladelige Fiberpaavirkning, som vi skulle se i næste §. Hvad man for dette Formaals Skyld navnlig har Brug for at kende, er de sammenhørende Værdier af $p_{\max.}$ og $p_{\min.}$, hvorefter der endnu netop kan taaes Variationer i det uendelige; for et givet $p_{\min.}$ er det tilsvarende $p_{\max.}$ at betragte som Brudgrænsen. For denne variable Brudgrænse har man indført Betegnelsen: den til det givne $p_{\min.}$ svarende »Arbejds-

*) De vigtigste af Wöhlers Resultater findes i *Zeitschrift für Bauwesen*, 1870, S. 74.

**) *Bauschingers* Resultater findes i hans »*Mittheilungen*«, Heft 13 og 25. Han fik desværre aldrig bearbejdet sine sidste Forsøg (siden 1886), skønt Spørgsmaalet beskæftigede ham lige til hans Død 1893. Resultaterne i Heft 25 ere offentliggjorte af *Föppl*.

styrke. Med det samme skal der indføres særlige Betegnelser for nogle specielle Værdier af Arbejdsstyrken. For $p_{\min.} = p_{\max.}$ falder den tilsvarende Værdi af Arbejdsstyrken sammen med Materialets Brudgrænse for absolut rolig Paavirkning; denne Værdi af Arbejdsstyrken skal i det følgende betegnes ved Ordet *Ligevægtsstyrke**). Den til $p_{\min.} = 0$ svarende Arbejdsstyrke skal kaldes *Udsvingstyrke**), den til $p_{\min.} = -p_{\max.}$ svarende Værdi *Svingningsstyrke**). — Mellem Minimumspaa-virkningen og den tilsvarende Arbejdsstyrke maa der bestaa en vis Relation; hvis den var bekendt, havde man ved den Wöhlers Resultater udtrykte paa den simpleste og mest udtømmende Maade. Skønt Wöhlers Forsøg ere lovlig faatallige hertil, er der dog gjort adskillige Forslag til en saadan Relation. Den første, der indlod sig paa Forsøget, var *Gerber*, der fandt, at naar man afsatte $p_{\min.}$ som Abscisse, $p_{\max.} - p_{\min.}$ som Ordinat, fik man en 2den Grads Parabel. Denne »*Gerberske Parabel*» spillede i sin Tid en betydelig Rolle, men stemmer slet ikke med Bauschingers seneste Resultater; i næste § skulle vi anføre en anden lignende Relation.

Bauschinger har ved sine Forsøg bekræftet Wöhlers Resultater, men hans Formaal var forøvrigt navnlig at finde en Forklaring af dem. Han gik derved ud fra, at da en Paavirkning, der overskrider Elasticitetsgrænsen, frembringer en blivende Formforandring, saa maa en Gentagelse heraf tilstrækkelig mange Gange nødvendigvis fremkalde Brud**). Ud fra denne Anskuelse vare Wöhlers Resultater egentlig selvfølgelig, for saa vidt som det anvendte $p_{\max.}$ overskred Elasticitetsgrænsen; det mærkelige var, at Brud *ikke altid* indtraadte.

*) Analogien hentet fra et Pendul i Hvile, i Udsvingning fra Ligevægtsstillingen, og i Svingning med lige store Udslag til begge Sider.

**) Det erindres, at Bauschinger bestemte Elasticitetsgrænsen som Proportionalitetsgrænse. De blivende Formforandringer begynde først at voxe stærkt udenfor denne og ere indenfor den praktisk talt forsvindende allerede ved den første Paavirkning; efter en Gentagelse af Paavirkningen falder Elasticitetsgrænsen sikkert sammen med Proportionalitetsgrænsen eller ligger maaske endog højere. Bauschingers ovenfor refererede Resultater kunne selvfølgelig kun bruges til at forklare Fænomenerne ved de Wöhler'ske Forsøg, hvis man gaar ud fra, at Elasticitets- og Proportionalitetsgrænse falde sammen, i alt Fald efter nogle Paavirkninger. I det følgende beholdes Betegnelsen Proportionalitetsgrænse, da Bauschingers Resultater kun gælde den.

selv om $p_{\max}$ overskred denne Grænse. Dette forklares imidlertid meget simpelt ved Bauschingers Forsøg, idet vi foreløbig indskrænke os til at antage $p_{\max}$ og $p_{\min}$ af samme Fortegn. Han viste nemlig, at ved hyppigt gentagne Spændingsvariationer mellem Nul og en højere Værdi, som ligger i Nærheden af eller ogsaa mere eller mindre over den oprindelige Proportionalitetsgrænse,) hæves denne op over Spændingens højeste Værdi og des højere, jo større Antallet af Spændingsvariationer er; men der vil altid være en vis højeste Beliggenhed, som den ikke kan overskride. Hvis $p_{\max}$ ikke naar op til den oprindelige Proportionalitetsgrænse, vil der ikke indtræde Brud selv for 5—16 Millioner Gentagelser, og det samme er Tilfældet, selv om $p_{\max}$ nok overskrider den oprindelige Proportionalitetsgrænse, naar blot denne ved Paavirkningerne hæves op til $p_{\max}$. Den sidste Del af Sætningen er maaske ikke fuldstændig bevist, men den passer i alt Fald i de af Bauschinger undersøgte Tilfælde. Udsvingsstyrken er altsaa den højeste Værdi, hvortil Proportionalitetsgrænsen kan hæves ved Variationer af Spændingen mellem Nul og en højere Grænse.*

Vi gaa nu over til det Tilfælde, at Paavirkningen skifter mellem Træk og Tryk. For saadanne Spændingsvariationer har Bauschinger, som ovenfor anført, paavist, at der skal en Overskriden af den oprindelige Proportionalitetsgrænse til for at bevirke nogen Forandring i Proportionalitetsgrænsens Beliggenhed. Man skulde heraf nærmest være tilbøjelig til at slutte, at Svingningsstyrken falder sammen med den oprindelige Proportionalitetsgrænse, og denne Slutning er sandsynligvis ogsaa rigtig. I 1886, da Bauschinger endnu ingen af den Slags Forsøg havde udført, kom han af Grunde, vi ikke her skulle gaa nærmere ind paa, til den Slutning, at Svingningsstyrken maatte falde sammen med den »naturlige Elasticitetsgrænse«, bl. a. fordi dette vilde passe bedst med den Gerberske Parabel, til hvis Rigtighed han havde en meget stærk Tiltro. Imidlertid vise de Forsøg, han har udført i 1886—93, at Svingningsstyrken ligger betydelig højere end den »naturlige Elasticitetsgrænse«. Forsøgene begyndte ofte med at bestemme

*) Her antage vi nu, at man kan substituere Elasticitets- for Proportionalitetsgrænse. Se § 50 angaaende Muligheden af at hæve den virkelige Elasticitetsgrænse.

Proportionalitetsgrænsen, og denne Bestemmelse gentoges flere Gange, medens Forsøgene stod paa; herved anvendtes imidlertid en Belastning, der *overskred* Proportionalitetsgrænsen, hvorved Forklaringen i høj Grad vanskeliggøres. Bauschingers egen Mening om Spørgsmaalet har man desværre aldrig faaet at vide, da han ikke fik Forsøgene bearbejdede før sin Død, men af nedenstaaende Sammenstilling, hvori ogsaa er optaget de af Wöhlers Forsøg, for hvilke den oprindelige Proportionalitetsgrænse er bekendt, vil man se, at Svingningsstyrken virkelig i Almindelighed falder temmelig nær sammen med den oprindelige Proportionalitetsgrænse.

		Oprindelig Prop.-grænse kg./cm. ²		Svingnings- styrke kg./cm. ²
		A	B	
Wöhler.	Svejsjærn (Phoenix)	1170		1170
"	Støbestaal (Krupp)	c. 2200		2050
Bauschinger.	Svejsjærn, Plade	1043		1770
"	Blødt Staal, "	1720—3070	1752—3212	1980
"	Art ubekendt	1620—1810	1534—1678	1980
"	" "	1810—2270	1480	2260
"	Thomasstaal, Axel	2680	3415	3000
"	" Skinne	28—3100		2800
"	" Kedelplade	2580—2800	1918	1900
"	Blødt Staal (?)	1285—1620	1623—2308	1600

Tallene i Kolonne *B* ere bestemte ved de Prøvestykker, der underkastedes Forsøgene angaaende Svingningsstyrken, Tallene under *A* ved andre Prøvestykker skaarne ud ved Siden af. Paa Grund af Proportionalitetsgrænsens store Forskellighed er det umuligt at drage nogen bestemtere Slutning, end at Svingningsstyrken ikke synes at afvige meget fra den oprindelige Proportionalitetsgrænse. Uoverensstemmelsen i 3die Linie i Tabellen synes lovlig stor, men Tallet 1043 er kun fundet ved et eneste Forsøg, og vi have allerede i § 43 anført et Exempel paa endnu større Forskel mellem Proportionalitetsgrænserne for to Prøvestykker, tagne fra samme større Stykke. Den i Tabellen under *B* anførte oprindelige Proportionalitetsgrænse er den, der fandtes, inden Varighedsforsøgene begyndte, men

om den virkelig er Jærnets »oprindelige«, er det naturligvis umuligt at faa oplyst. — Ved disse Forsøg af Bauschinger er det i alt Fald paavist, at den Gerberske Parabel ikke kan bruges.

Vi skulle nu anføre nogle Forsøgsresultater. Ligevægtsstyrken betegnes ved L , Udsvingsstyrken ved U , Svingningsstyrken ved S og angives i kg./cm.^2 .

	L	U	S	$U:L$	$S:L$
Wöhler.					
Svejsjærn (Phönix)	3250	2200	1170	0,68	0,36
Axel-Staal (Krupp)	7600	3500	2050	0,46	0,27
» » (Bochum)	6460	3290	1825	0,51	0,28
» » (Vickers)	4240		c. 1460		c. 0,35
Hærdet Fjederstaal (Krupp)	> 8040	4390		< 0,55	
Uhærdet » »	> 7310	3650		< 0,50	
Bauschinger.					
Svejsjærn, Plade	3480	2000	1770	0,57	0,51
Blødt Staal »	4360	2400	1980	0,55	0,45
Fladt Jærn (Art ubekendt)	4050	2200	1980	0,54	0,49
» » » »	4020	2400	2260	0,60	0,56
Thomasstaal, Axel	6120	3000	3000	0,49	0,49
» Skinne	5940	2800	2800	0,47	0,47
» Kedelplade	4050	2400	1900	0,59	0,47
Blødt Staal (?)	3350	2200	1600	0,66	0,48
Watertown*).					
Staal	10700		2800		0,26
»	6200		2300		0,37

Man ser af Forsøgene, at der ikke viser sig nogen mærkelig Forskel paa Svejsjærn og Staal, og at man egentlig ikke kan etablere noget nogenlunde konstant Forhold mellem S ,

*) I Watertown Arsenal er der i 1888—92 anstillet en Mængde Varighedsforsøg, men der er næsten altid anvendt saa store Belastninger, at Bruddet er indtraadt efter faa Variationer. Forsøgene ere forøvrigt fortsatte i de følgende Aar, men Beretningerne fra disse ere mig desværre ikke tilgængelige. Det første af de anførte Resultater findes i »Report« 1889, det andet er refereret i »American Machinist«, 1897, S. 564.

U og *L*. Bauschingers Værdier af *S* ligge forholdsvis betydelig højere end de af andre fundne. Wöhlers Forsøg alene give som Middeltal:

$$U:L = 0,54, S:L = 0,32,$$

Bauschingers alene give:

$$U:L = 0,56, S:L = 0,49.$$

Som Middeltal af alle de anførte Forsøg findes:

$$U:L = 0,55, S:L = 0,41.$$

Man troede tidligere, og den Anskuelse har holdt sig meget længe, at maatte forklare denne lavere Beliggenhed af Brudgrænsen overfor hyppig gentagne Paavirkninger derved, at Materialet i Tidens Løb blev »anstrengt«, og til Støtte herfor anførtes det, at f. Ex. Svejsjærns-Axler o. l., der knække under Brugen, meget ofte vise et krystallinsk Brud, skønt Jærnet oprindeligt aldeles ikke var krystallinsk i Bruddet; man talte derfor om »kold Krystallisation«, bevirket ved Paavirkningerne under Brugen. Man er nu ganske klar over, at dette Udseende af Brudfladen hidrører fra, at Bruddet er foregaaet pludseligt, uden nogen Kontraktion, og ligeledes er det sikkert nok, at der ikke kan være Tale om »Anstrengelse« eller »Udmattelse« af Materialet i den Betydning af Ordet, hvori det her er taget. Bauschinger har nemlig bevist, at *Brudgrænsen overfor roligt Træk ikke formindskes ved millionvis gentagne Paavirkninger*; Prøvestykker, der havde været underkastet Millioner af Spændingsvariationer, viste snarere en højere Brudgrænse end oprindeligt, naar de prøvedes med roligt Træk. Og ligeledes fremgaar det af Bauschingers Forsøg, at *hyppig gentagne Spændingsvariationer ikke frembringe nogen Ændring af Strukturen*. Ganske vist iagttoges altid paa Brudfladerne af de Prøvestykker, der brødes under Varighedsforsøgene, en særlig Tegning (tidligere observeret af Spangenberg), men den forsvandt fuldstændig ved Ætsning, og underneden kom den oprindelige Struktur strax til Syne. Ligeledes er det ofte konstateret *) ved Prøver med Jærn, der har gjort Tjeneste

*) Se f. Ex. »Centralbl. d. Bauverwaltung«, 1894, S. 175 og 397.

Brodragere i 30—40 Aar, at Styrken ikke er aftaget i Tidens Løb.

Denne ældre Forklaring er altsaa absolut forkert, og den rigtige Forklaring er utvivlsomt den af *Bauschinger* fremsatte, at Bruddet tilsidst fremkaldes ved Summation af de smaa livende Formforandringer, som fremkomme ved hver Overkridelse af Elasticitetsgrænsen (enten det nu er den oprindelige, eller den som indstiller sig under Indflydelse af Spændingsvariationerne).

Imidlertid er der i den nyeste Tid fremkommen endnu en Forklaring, som støtter sig paa de ved mikroskopiske Undersøgelser af Jærn gjorte Opdagelser. Saadanne Undersøgelser foretoges først af *Sorby* og ere senere fortsatte af mange andre, og det har derved vist sig, at der altid findes Mængder af ganske smaa Spalter eller Hulheder mellem Jærnkrystallerne, fyldte med Luft eller Gasarter, Jærnsilicat, Jærnsulfid o. l. I de sidste Aar har navnlig *Thomas Andrews* *) underkastet disse Mikro-Spalter en indgaaende Undersøgelse, specielt med Hensyn til Muligheden af at Brud skulde kunne bevirkes eller fremskyndes af dem. De forekomme i et Antal af mindst en Snes Stykker pr. Kvadratcentimeter, og idet de hindre den direkte Berøring mellem Jærnkrystallerne, danne de svage Punkter, navnlig naar de ere fyldte med Jærnsulfid. I et Materiale, der er saaledes bygget, kan man nok tænke sig, at der under vexlende Paavirkninger maa foregaa indre Bevægelser, hvorved efterhaanden flere og flere Mikro-Spalter komme i Forbindelse med hinanden, saa der dannes en større Skilleflade, og *Andrews* anfører flere Exempler paa Revner, der ere begyndte ved et saadant Punkt og have udstrakt sig tværs gennem Staalet som i Is eller Glas. Det er vel utvivlsomt, at noget saadant kan foregaa, og i alt Fald har man sikkert her Forklaringen paa de mange, hidtil ganske uforstaaelige Brud af Jærnbaneaxler, Skihs-Skrueaxler o. l. Ogsaa maatte *Bauschinger* ved Udtalelsen af flere af de ovenfor anførte Sætninger (f. Ex. den, at Brud ikke indtræder ved 5—16 Millioner Spændingsvaria-

*) *Engineering*, 1896, 10de, 17de og 24de Juli, indeholder de første Undersøgelser, og de fortsættes med en længere, endnu ikke afsluttet Artikkelsække i 1897 og 98 om Undersøgelser af brugte Skinner.

tioner mellem Nul og en højere Grænse, der ligger i Nærheden af den oprindelige Proportionalitetsgrænse) tage det Forbehold, især for Staal, at Materialet maatte være aldeles fejlfrit; ellers indtraadte Brud langt lettere. Herved tænkte han ganske vist kun paa Overfladefejl, men disses Virkning maa vel være omtrent den samme som Virkningen af begyndende indre Spalter.

De af *Andrews* paaviste Fænomener give altsaa aabenbart Forklaringen af, at Varighedsforsøg føre til saa højest varierende Resultater; derimod er det neppe sandsynligt, at de skulde være den hele eller eneste Aarsag til Brudgrænsens lavere Bælgelighed overfor skiftende Paavirkninger. Denne maatte nemlig ganske sikkert vise sig selv i et Stykke Jærn uden Mikro-Spalter, hvis et saadant kunde tænkes; thi en ofte gentagen Overskridelse af Elasticitetsgrænsen — hvis en saadan da ellers findes i Jærn uden Mikro-Spalter — maa nødvendigvis medføre Brud tilsidst. Dersom det var Mikro-Spalterne, der alene vare Skyld i Bruddet, maatte Svejsjærn og Staal sikkert forholde sig langt mere forskelligt overfor skiftende Paavirkninger, end de gøre. Mikro-Spalterne kunne være et understøttende Moment for Forklaringen af de *Wöhlerske* Fænomener, men den egentlige Aarsag er sikkert en Opsummering af smaa blivende Formforandringer.

Til Slut skal det lige nævnes, at *Wöhlers* Resultater i den almindelige Form, hvori de ovenfor ere udtalte, fra enkelte Sider ere blevne mødte, om ikke just med Tvivl, saa dog med en stærk Kritik, saaledes af *Considère**), *Mohr***) o. fl. Kritikken gjaldt især Resultaternes Anvendelse til Bestemmelse af den tilladelige Fiberpaavirkning, hvorom i næste §, men rettedes ogsaa mod selve de *Wöhlerske* Love. Hovedindvendingerne vare, at Paavirkningernes Varighed ikke var tilstrækkelig, til at Deformationerne kunde antage den fulde til Spændingerne svarende Størrelse; dette var maaske rigtigt overfor de af *Wöhler* selv anstillede Forsøg, hvor Maskinens Omdrejningstal (efter *Considère*) var 72 pr. Sekund, men kan absolut ikke gøres gældende overfor *Bauschingers* Forsøg.

*) *Annales des ponts et chaussées*, 1885, I., S. 703.

**) *Mohrs* Indvendinger ere refererede i *Handbuch d. Ingenieurwissenschaften*, Bd. II, Abth. 2, Leipzig 1890, S. 79.

vor der kun anvendtes 100 Omdrejninger pr. Minut. *) Og indvidere indvendtes, idet de fleste af Resultaterne ere fundne ved Bøjningsforsøg, hvoraf Spændingerne beregnedes ved Formlen: $M = \sigma \cdot W$, at denne Formels Anvendelse her var korrekt, fordi der var Tale om Paavirkninger over Proportionalitetsgrænsen. Dette er naturligvis rigtigt, naar Formlen anvendes til at finde den Spænding, ved hvilken et Brud er indtraadt under Forsøgene. Derimod er det ikke rigtigt, naar Beregningen anvendes paa et Forsøg, ved hvilket Paavirkningen ikke er større, end at den kan taaes i det uendelige, idet i saa Fald er, som vi ovenfor have set, den øjeblikkelige Proportionalitetsgrænse netop endnu ikke overskreden; de ved Formlen beregnede Værdier af Arbejdsstyrken ere derfor fejlagtige.

§ 48. Tilladelig Fiberpaavirkning. Tidligere regnede man simpelthen den tilladelige største Spænding, hvorefter Dimensionerne bestemtes, til $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{5}$ af Materialets Brudgrænse eller til $\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{3}$ af Proportionalitetsgrænsen (eller Elasticitetsgrænsen, som den dog den Gang altid kaldtes). Nævneren af de anførte Brøker kaldes Sikkerhedskoefficienten, og man saadan er man nødt til at indføre af mange Grunde. Vi kunne nævne nogle af de vigtigste.

1. *De ved Spændingsberegningen »givne« Størrelser.* De tre Kræfters Størrelse beror ofte paa et Skøn; saaledes kender man ikke altid Konstruktionens Egenvægt i Forvejen, og ogsaa Nyttelasten — den, for hvis Skyld Konstruktionen bygges — kan være ret ubestemt. F. Ex. beregnes en Gangbro for en ensformig Belastning, svarende til Mennesketrængsel, men om man skal regne 3-, 4- eller 500 kg. pr. m.², kommer til syvende og sidst an paa et Skøn.

*) Hvis Deformationerne ikke faa Tid til at antage den fulde til Spændingerne svarende Størrelse, maa aabenbart hurtig Skiften af Paavirkningen være mindre farlig end langsom; men dette passer absolut ikke med, at Bauschinger fandt Svingningsstyrken højere end Wöhler. Sammenhængen er snarere den, at der ved den hurtige Skiften fremkaldes dynamiske Spændinger, der ere betydelig større end de paaregnede statiske. Hvis den sidste Forklaring er rigtig, er det langt snarere Bauschingers Resultater, man har Brug for ved Bestemmelsen af den tilladelige Fiberpaavirkning, end Wöhlers (undtagen ved enkelte Maskinkonstruktioner).

2. *Spændingsberegningens Gennemførelse* er i Almindelighed langt fra exact. Dette viser sig ikke saa tydeligt ved de hidtil behandlede simple Konstruktioner, men det skal ikke desto mindre her nævnes, at i mere komplicerede Tilfælde, Gitterdragere med stive Knudepunktsforbindelser o. s. v., kan den Spændingsberegning, der udføres, kun betragtes som en temmelig raa Tilnærmelse. Man forudsætter f. Ex. friktionsløse Led, hvor der i Virkeligheden udføres nittede, og altsaa stive Forbindelser, og ogsaa paa anden Maade kan der optræde *secundære Spændinger*, som man ser bort fra. Ved en simpel Understøtning gaar man saaledes ud fra, at en Drejning kan foregaa uden Friktion; Reaktionens Angrebspunkt er som oftest ikke nøje bekendt; for statisk ubestemte Bjælker er der endnu flere Forudsætninger, som man ikke kan vente at faa opfyldte i Praxis. — Ligeledes gaar man ofte let hen over de saakaldte *Extraspændinger*, d. v. s. Spændinger, der hidrøre fra Vindtryk, Bremsekræfter, Temperaturvariationer, eftergivende Understøtninger o. l. — En særlig Art af Extraspændinger er de *dynamiske Spændinger*; man regner med Belastningen som staaende stille, men i Virkeligheden bevæger den sig jo, og derved frembringes forskellige Virkninger, som det er mere eller mindre umuligt at tage Hensyn til ved Beregningen. Der frembringes saaledes Stød og Rystelser, som sætte Konstruktionen i Svingninger, og vi have flere Gange i det foregaaende set, at en pludselig Virkning af Kraften fremkalder en dynamisk Spænding, der kan naa op til det dobbelte eller mere af den statiske Spænding. Naar et Lokomotiv kører hen ad et Jærnbanespor, der jo aldrig ligger fuldkommen jævnt, fremkommer der Slag ved Skinnestødene og Uregelmæssighederne i Sporet, Lokomotivet sættes i Svingninger paa sine Fjedre, hvorved Hjultrykkene kunne variere periodisk o. s. v. Naar Sporet fører over en Bro, vil denne bøje sig ned under Belastningens Vægt, og Lokomotivet kommer derfor til at gennemløbe en krum Bane, hvorved der frembringes en Centrifugalkraft, der forøger Belastningen. Alt dette er kun anført eksempelvis, de dynamiske Virkninger kunne optræde paa flere andre Maader.

3. *Materialet* har ikke nøjagtig de Egenskaber — Brudgrænse, Proportionalitetsgrænse, Elasticitetskoefficient etc. — man har lagt til Grund. Der kan forekomme tilfældige Fejl i Materialet. Tværsnitsdimensionerne af de enkelte Bjælker

eller Stænger kunne afvige noget fra det forlangte, og i Tidens Løb rustet Jærnet.

4. *Udførelsen af Arbejdet* ved Bygningen eller Fabrikationen er ikke altid fejlfri. Jærnets Styrke kan forringes ved uheldig Behandling, Bøjning, Lokning, Bearbejdelse ved blaa Varme o. s. v. Forbindelserne blive ikke ganske fejlfri; Stænger, hvis Midtlinier skulle gaa igennem et bestemt Punkt, komme maa-ske i Virkeligheden til at ligge noget excentrisk; Nitningen er ikke altid saa fuldkommen, som den burde være.

Man ser, at der er overmaade god Grund til at indføre en Sikkerhedskoefficient, men ved Bestemmelsen af dens Størrelse kan man dog ikke tillægge alle de opregnede Omstændigheder samme Vægt. Mod den under 1) omtalte Ubestemthed maa man dække sig strax ved Fastsættelsen af den Belastnings Størrelse, der skal indføres i Beregningen; dette tages der i Almindelighed ikke Hensyn til under Sikkerhedskoefficienten. De under 3) og 4) anførte Ufuldkommenheder optræde i de forskellige Tilfælde i omtrent samme Grad; deres Bidrag til Sikkerhedskoefficienten kan regnes konstant. *Häseler**) skønner for nittede Konstruktioner et konstant Tillæg af 30 % til de beregnede Spændinger af den Grund. — Derimod have de under 2) nævnte Omstændigheder højst forskellig Betydning i de forskellige Tilfælde. Man kan gennemføre Beregningen af de sekundære Spændinger og Extraspændingerne mere eller mindre nøjagtigt, og selvfølgelig kan man nøjes med en desto mindre extra Sikkerhed, jo nøjagtigere Beregningen af Spændingerne er gennemført. Men det er navnlig de dynamiske Virkninger af Belastningen, der volde Vanskeligheder, og det er Hensynet til dem, der har fremkaldt de mange forskellige Dimensioneringsmetoder, der i den sidste Snes Aar have set Dagens Lys.

De dynamiske Virkninger hidrøre alene fra den bevægelige Belastning* (d. s. s. ovenfor er kaldt Nyttelasten; denne er i alle praktisk forekommende Tilfælde bevægelig), hvorimod der til den hvilende Belastning ikke er knyttet nogen saadan Bivirkning. Det maa derfor kaldes rationelt ikke at bruge samme Sikkerhedsgrad overfor de to Slags Belastning. *Gerber* var den første, der tog Hensyn hertil ved Bestemmelsen af

*) *Häseler: Der Brückenbau*, I, 1, Braunschweig 1888. S. 36.

A. Ostenfeld: *Teknisk Elasticitetelære*.

Dimensionerne (1863): naar σ_g betegner Spændingen fra den hvilende, σ_p fra den bevægelige Belastning, satte han:

$$\sigma_g + 3\sigma_p = 1600 \text{ kg./cm.}^2.$$

Det heri udtalte almindelige Princip, at multiplicere σ_g med en vis *Stødkoefficient* μ og dernæst behandle Spændingerne σ_g og $\mu \cdot \sigma_p$ ens, anvendes ofte endnu under forskellige Former. I Nordamerika er det saaledes meget almindeligt at regne dobbelt saa stor en tilladelig Paavirkning overfor den hvilende Belastning som overfor den bevægelige *). Hvis man direkte vil anvende en Stødkoefficient, kan den f. Ex. have følgende Værdier:

For Jærnbanebroer . . .	$\mu = 1,5,$
- Vejbroer	- = 1,4,
- Bjælkelag o. l. . . .	- = 1,3,
- Tagværker	- = 1,2.

Specielt for Jærnbanebroer er det korrektere at udtrykke μ som Funktion af det Antal Hjul, der i Øjeblikket befinder sig paa Broen: *Hüseler* har saaledes foreslaaet at regne:

$$\mu = 1,2 + \frac{1}{n},$$

hvor n er Hjulenes Antal: jo flere Hjul der findes, des større Sandsynlighed er der for, at de enkelte Stød ville modvirke hinanden. I Nordamerika**) udtrykkes Stødkoefficienten undertiden som en Funktion af Broens Længde, hvilket er noget mindre korrekt, men langt bekvemmere.

Paa en helt anden Maade tager man Hensyn til den bevægelige Belastning ved de mange, mere eller mindre direkte paa de Wöhler'ske Forsøg byggede Formler. Den bevægelige Belastning bevirker nemlig, at Spændingen i et bestemt Punkt snart har en Værdi, snart en anden, og hvis man kan gaa ud fra, at denne Variation af Spændingen er af samme Art som den, der praktiseres ved Varighedsforsøgene, har man aabenbart i disse Forsøgs Resultater et Grundlag for Bestemmelsen af den tilladelige

*) Se f. Ex. *Theo. Cooper: General Specifications etc.* 1890 (Highway-bridges) og 1896 (Railroad-bridges). Ogsaa næste Note.

**) Se *Tekn. Forenings Tidsskrift*, 1896—97, S. 263.

Paa virkning. Hvis man skulde bestemme Tværsnittet af en Stang, for hvilken Spændingen svinger mellem to bekendte Værdier $\sigma_{\max}$. og $\sigma_{\min}$, uden at indføre nogen Sikkerhedskoefficient, vilde man aabenbart kun have at sørge for, at den til $\sigma_{\min}$. svarende Arbejdsstyrke var større end eller lig $\sigma_{\max}$. Man faar da Brug for en Relation mellem Arbejdsstyrken og den tilsvarende Minimumsspænding. Som ovenfor meddelt, er en saadan Relation først opstillet af Gerber, men den Gerberske Parabel har nu ved Bauschingers Forsøg vist sig mindre heldig. Imidlertid er der opstillet vist henved en Snes andre Ligninger; vi skulle eksempelvis gaa lidt nærmere ind paa den af dem, som har funden størst Anvendelse til Dimensionsbestemmelse, den *Launhardt - Weyrauch'ske**). — Som Relationen mellem Arbejdsstyrken A og den tilsvarende Minimumsspænding a antog de:

$$A = C \left(1 + m \cdot \frac{a}{A} \right),$$

hvor C og m ere Konstanter, der skulle bestemmes af Forsøgene. For $a = 0$ er $A = C$; C betegner altsaa Udsvingstyrken U . m har forskellige Værdier, eftersom A og a have samme eller modsat Fortegn. For $A = a$ skal A være lig Ligevægtsstyrken L , og man finder

$$m = \frac{L}{U} - 1;$$

for $A = -a$ skal A være lig Svingningsstyrken S , altsaa

$$m = 1 - \frac{S}{U}.$$

For Svejsjærn vilde man med Forsøgsresultatet i første Linie af den i forrige §, S. 235, givne Tabel have:

$$\frac{U}{L} = 0,68, \quad \frac{S}{L} = 0,36, \quad \frac{L}{U} = 1,47, \quad \frac{S}{U} = 0,53,$$

hvoraf $m = 0,47 \approx 0,5$, gældende for alle Tilfælde.

*) Weyrauch: *Die Festigkeitseigenschaften etc. von Eisen- und Stahlkonstruktionen*, Leipzig 1889. Her findes ogsaa en Oversigt over de fleste foreslaaede Dimensioneringsmetoder. Se ogsaa *Tekn. Forenings Tidsskr.* 1889—90, S. 77.

Naar man nu skal bestemme Dimensionen af en Stang, for hvilken Spændingen varierer mellem Grænserne $\sigma_{\max.}$ og $\sigma_{\min.}$, saa skulle disse to, hvis man ingen Sikkerhedskoefficient vil anvende, svare til hinanden som A til a , hvorved Formlen for den tilladelige Fiberpaavirkning bliver:

$$r \leq A = U \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_{\min.}}{\sigma_{\max.}} \right),$$

gældende for alle Tilfælde, idet $\sigma_{\min.}$ og $\sigma_{\max.}$ indføres med Fortegn ($\sigma_{\max.}$ er den *numeriske* Maximumsspænding). I Virkeligheden maa man naturligvis indføre en Sikkerhedskoefficient; sædvanligvis nøjes man her med 3 à 3,5. Idet U for det omhandlede Svejsjærn er lig 2200 kg./cm.², altsaa $\frac{1}{3} U = c. 700$, bliver den tilladelige Paavirkning:

$$r = 700 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_{\min.}}{\sigma_{\max.}} \right).$$

De her brugte Talværdier gav tilfældigvis samme Værdi for m , enten man satte $A = a$ eller $A = -a$, og dette var overordentlig bekvemt, fordi man saa kunde bruge samme Formel, enten $\sigma_{\max.}$ og $\sigma_{\min.}$ havde samme eller modsat Fortegn. Dette vil naturligvis ikke slaa til, naar man benytter de andre Værdier af S , U og L , der ere givne i Tabellen i forrige §, men naar man kun tager Hensyn til Wöhlers egne Forsøg*), bliver Afgangelsen dog ikke større, end at man nok kan regne $m = \frac{1}{2}$ altid. I følgende Skikkelse:

$$r = r_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_{\min.}}{\sigma_{\max.}} \right) \quad (5)$$

har *Launhardt-Weyrauch's* Formel været anvendt grumme meget. Tallet foran Parenthesen (r_1) kan varieres efter det foreliggende Tilfælde, sædvanlig er det 6—800; i Stedet for $\frac{1}{2}$ har der ogsaa undertiden været anvendt andre Værdier lige fra $\frac{1}{3}$ til 1.

Naar man imidlertid tager Hensyn til alle de i forrige

*) *Bauschingers* Værdier af S ere først offentliggjorte i 1897. *Weyrauch* har selvfølgelig ved Opstillingen af Formlen kun kendt *Wöhlers*.

§ anførte Forsøgsresultater, faar man (som Middeltal af alle Forsøgene):

$$\frac{U}{L} = 0,55, \quad \frac{S}{L} = 0,41, \quad \frac{L}{U} = 1,82, \quad \frac{S}{U} = 0,75,$$

hvorved Formlerne blive:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max.} \text{ og } \sigma_{\min.} \text{ samme Fortegn: } r &= r_1 \left(1 + 0,8 \frac{\sigma_{\min.}}{\sigma_{\max.}} \right), \\ \text{» - » modsat »} \quad r &= r_1 \left(1 + 0,25 \frac{\sigma_{\min.}}{\sigma_{\max.}} \right); \end{aligned} \quad (5 \text{ a}).$$

Spændingerne indføres ogsaa her med deres Fortegn.

Herefter er en Variation af Spændingerne mellem Træk og Tryk ikke nær saa farlig som efter den almindelige Launhardt-Weyrauchske Formel ovenfor; men det er netop ogsaa Hovedresultatet af Bauschingers seneste Forsøg, som jo have givet betydelig højere Værdier af Svingningsstyrken, end man tidligere antog.

For den bedre Oversigts Skyld anføres nogle specielle Værdier af r , som de findes ved Formlerne (5) og (5 a), idet vi regne $r = 1200 \text{ kg./cm.}^2$ for absolut rolig Belastning og altsaa bestemme r_1 saaledes, at baade (5) og (5 a) give $r = 1200$ for $\sigma_{\min.} = \sigma_{\max.}$:

$\sigma_{\min.} : \sigma_{\max.} =$	1	0	— 1
(5) giver $r =$	1200	800	400
(5 a) » $r =$	1200	666	500.

At (5 a) giver den sandsynligvis rigtigste Variation af Spændingerne, skulle vi om et Øjeblik faa bekræftet ved en ganske anden Betragtning.

Ud fra et helt andet Udgangspunkt er *Claxton Fidler**) kommen til ganske lignende Resultater angaaende den tilladelige Fiberpaavirkning, som dem vi her have udledet med de Wöhlerske Forsøg som Grundlag. Han tænker sig, at den af den bevægelige Belastning bevirkede Variation af Spændingen fra $P_{\min.}$ til $P_{\max.}$ foregaar pludseligt, og hvis saa er, have vi allerede i § 15 set, at der fremkommer Svingninger

*) *Cl. Fidler: A practical treatise on bridge-construction, London, 1893, S. 240.*

om den statiske Ligevægtsstilling, og at den dynamiske Spænding naaar op til Værdien:

$$P_d = P_{\min.} + (P_{\max.} - P_{\min.}),$$

hvor Spændingerne skulle indføres med deres Fortegn.

Denne dynamiske Spænding maa nu ikke overskride den ovenfor en fuldkommen rolig Paavirkning tilladelige, r_0 ; det nødvendige Areal F for en Stang, der er paavirket af Spændingsvariationer mellem $P_{\max.}$ og $P_{\min.}$, skal altsaa bestemmes ved:

$$P_d = r_0 \cdot F.$$

Imidlertid er man nu en Gang vant til at finde det nødvendige Areal F ved at dividere den største statiske Spænding $P_{\max.}$ med en tilladelig Fiberpaavirkning, r , altsaa ved:

$$P_{\max.} = r \cdot F,$$

og naar man vil bibeholde denne Methode og dog komme til samme F som ovenfor, skal man blot i hvert Tilfælde bestemme r af:

$$r = r_0 \cdot \frac{P_{\max.}}{P_d} = \frac{r_0}{1 + \left(1 - \frac{\sigma_{\min.}}{\sigma_{\max.}}\right)}. \quad (6)$$

Sættes ogsaa her, ligesom ovenfor, $r_0 = 1200$, findes:

$$\sigma_{\min.} : \sigma_{\max.} = 1 \quad 0 \quad -1$$

(6) giver $r = 1200 \quad 600 \quad 400$.

Man faar her ligesom ved (5 a) en meget hurtig Aftagen af r i Begyndelsen; naar $\sigma_{\min.}$ og $\sigma_{\max.}$ faa modsat Fortegn, aftager r efter begge Formler kun langsomt.

Ved den Cl. Fidler'ske Formel (6) er der alene taget Hensyn til de Stødvirkninger, der ledsage den bevægelige Belastning, ved den ovenfor udviklede Formel (5 a) alene til Resultaterne af de Wöhlerske Forsøg og den deraf følgende Betragtning af hyppige Spændingsvariationer som farligere end en rolig Belastning. Der er imidlertid ogsaa opstillet Metoder, der tage Hensyn til begge Dele: den bevægelige Belastning multipliceres da først med en Stødkoefficient, og dernæst benyttes en eller anden Formel som (5) eller (5 a). Dette kan

dog næppe være rigtigt; thi i Stedet for at indføre en speciel Stødkoefficient maatte man ogsaa kunne kombinere Formlerne (5) eller (5 a) med (6), idet man i Stedet for r_1 i (5) eller (5 a) indførte r 's Værdi af (6), og det vilde med $r_0 = 1200$ føre til, at man for $\sigma_{\min.} = -\sigma_{\max.}$ skulde regne med $r = 2-300$ for at faa samme Sikkerhed som ved $r = 1200$ overfor rolig Paa-virkning. Dette er dog ganske utænkeligt; man maatte i saa Fald have gjort mange ubehagelige Erfaringer med de ældre Jærnbroer o. l., der i sin Tid ere beregnede med en konstant tilladelig Fiberpaavirkning af alle Stænger. Langt snarere maa man antage, at Formlerne (5) eller (5 a) og (6) ere to, ad forskellige Veje fundne Udtryk for den samme Ting: at den bevægelige Belastning er farligere end den hvilende. En ganske interessant Bekræftelse paa denne Anskuelses Rigtighed har man deri, at *J. B. Johnson* *), aabenbart uden at kende *Cl. Fidler*'s Udvikling, har opstillet ordret den samme Formel (6) som et Udtryk for det ved Wöhlers Forsøg vundne Grundlag for Dimensionsbestemmelsen.

Formel (6) kan forøvrigt skrives noget almindeligere. Ved Udledelsen er det antaget, at Spændingstilvæksten $P_{\max.} - P_{\min}$ virker ganske pludseligt, men dette er ikke altid Tilfældet. I Almindelighed foreslaar *Cl. Fidler* at skrive den dynamiske Spænding:

$$P_d = P_{\max.} + m(P_{\max.} - P_{\min}),$$

hvorved Formlen for den tilladelige Fiberpaavirkning bliver:

$$r = \frac{r_0}{1 + m \left(1 - \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \right)}. \quad (6 a).$$

Herved er der givet et Spillerum for det personlige Skøn, som dog alligevel aldrig vilde lade sig foreskrive faste Regler, hvorfra der i intet Tilfælde kunde afviges. Værdien af m er 1 eller maaske endog noget større (hvis der er særlig Fare for Stød o. l.) for de Konstruktionsdele, der direkte paavirkes af den bevægelige Belastning (Tværbjælker og sekundære Dragere i en Bro o. l.), og den kan maaske for større Drageres Hoved og Fod gaa ned til $\frac{1}{2}$. r_0 sættes lig 1000—1400 kg. cm.²

*) *Materials of construction*, S. 547.

Det forstaar sig af sig selv, at hele denne Udvikling kun har Betydning for større Brokonstruktioner; for mindre Broer og for de ved Husbygning forefaldende Jærnkonstruktioner regner man altid med en konstant, efter et Skøn fastsat Fiberpaavirkning.

I Almindelighed kan man antage:

	Blødt Staal	Svejsjærn
For Tagkonstruktioner, større Dragere i Husbygning o. l.	800 — 1000	700 — 900
• Bjælkelag o. l.	700 — 900	600 — 800
• smaa Vej- eller Gadebroer	700 — 800	600 — 700
• smaa Jærnbanebroer, Tværbjælker, sekundære Dragere o. l. i større Broer	600 — 700	550 — 700
• Hoveddragere i større Broer,		
(5a) eller (6a), $\begin{cases} r_0 = \\ r_1 = \end{cases}$	$\begin{cases} 1100 — 1400 \\ 600 — 800 \end{cases}$	$\begin{cases} 1000 — 1300 \\ 550 — 750 \end{cases}$

De store Værdier af r_0 faar man næsten aldrig direkte Brug for i Praxis, da Spændingerne meget sjældent virke ganske konstant.

Exempel. En Stang i en større Brodrager er paavirket af $P_{\max.} = +90^ts$, $P_{\min.} = +32^ts$, en anden Stang af $P_{\max.} = +90^ts$, $P_{\min.} = -32^ts$; bestem den tilladelige Fiberpaavirkning efter (6 a), idet $m = 1$.

For den første Stang have

$$\frac{\sigma_{\min.}}{\sigma_{\max.}} = \frac{P_{\min.}}{P_{\max.}} = + \frac{32}{90} = +0,36,$$

for den anden er

$$\frac{\sigma_{\min.}}{\sigma_{\max.}} = - \frac{32}{90} = -0,36.$$

Med $r_0 = 1200$ findes da $r = 730$ og $r = 510$.

For Bjælker, der ere paavirkede til Bøjning, indføres

$$\frac{M_{\min.}}{M_{\max.}} \text{ for } \frac{\sigma_{\min.}}{\sigma_{\max.}},$$

da Spændinger og Momenter ere ligefrem proportionale. For Forskydning og Vridning kan regnes $\frac{4}{5}$ af Værdierne for Træk.

Inden vi slutte denne Oversigt over Dimensionerings-metoderne for smedeligt Jærn, skulle vi give nogle Oplysninger om, hvorledes man regner eller har regnet forskellige Steder.

Her i Landet findes der ingen bestemte Forskrifter. Exempelvis nævnes, at der ved *Guldborgsundbroen* er regnet:

for Hoved og Fod i Hoveddragerne	700 kg./cm. ² ,
for Gitterstængerne	650 —
for Tværbjælker og sek. Dragere ...	600 —

Ved *Viadukten over Østerbro's Banegaard* regnedes:

$$r = r_1 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\sigma_{\min.}}{\sigma_{\max.}} \right),$$

hvor $r_1 = 750$ kg./cm.² for Hoved og Fod i Hoveddragerne, 700 for Gitterstængerne, 600 for Tværkonstruktionen; Materialet var blødt Staal.

De preussiske Statsbaner regne for Jærnbanebroer, ifølge Forordning af Sept. 1895*), med blødt Staal som Materiale:

for Hoveddragere af Længde:	
10, 20, 40, 80, 120, 150 m.,	
excl. Spændinger fra Vindtryk,	
$r = 800, 850, 900, 950, 1000, 1050$ kg./cm. ² ,	
incl. Spændinger fra Vindtryk,	
$r = 1000$ 1300 kg./cm. ² ,	
for Svejsjærn 10 % mindre.	

	Staal kg./cm. ²	Svejsjærn kg./cm. ²
Pladejærnsdragere som Hoveddragere, Tværbjælker og sekundære Dragere, naar Ballasten føres over Broen	750	700
do. do., naar Skinnerne hvile paa Tværsveller	700	650
do. do., naar Skinnerne hvile umiddelbart paa Jærndragerne	650	600.

*) Centralblatt d. Bauverwaltung, 1895, S. 485.

De franske officielle Forskrifter *) af 29de August 1891 bestemme:

	Staal kg./cm. ²	Svejsjærn kg./cm. ²
i Almindelighed regnes	850	650
for Tværbjælker, Skinnedragere o. l.	750	550
for Gitterstænger med afvekslende Træk og Tryk	600	400
for mindre Variationer af Spændingen kan dog bruges noget højere Værdier.		
For Broer af mere end 30 ^m . Længde kan i Hoveddragerne tillades større Paavirk- ninger, dog ikke over	1150	850

Til Vejledning ved Fastsættelsen af den tilladelige Paavirkning kan bruges Formlen:

$$r = r_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_{\min.}}{\sigma_{\max.}} \right),$$

hvor $r_1 = 600$ for Svejsjærn, 800 for Staal.

For Svejsjærn, der paavirkes vinkelret paa Valseretningen, regnes kun $\frac{2}{3}$ af ovenstaaende Værdier; for Staal behøves ingen saadan Reduktion. Til Forskydning regnes $\frac{1}{2}$ af ovenstaaende Værdier.

De schweitziske Forskrifter **) af 19de August 1892 regne hovedsagelig med Formlerne:

$$\text{for Svejsjærn: } r = 700 + 200 \frac{\sigma_{\min.}}{\sigma_{\max.}},$$

$$\text{for Staal: } r = 800 + 250 \frac{\sigma_{\min.}}{\sigma_{\max.}}.$$

Om *nordamerikanske Forskrifter* findes nogle Oplysninger i Tekn. Forenings Tidsskr. 1896—97, S. 264.

For Tagværker og andre lignende Jærnkonstruktioner findes sjældent saa udførlige Forskrifter. Det skal dog anføres, at der i 1897 er foreskrevet følgende tilladelige Paavirkninger for Perronhaller og andre Tagkonstruktioner paa de *preussiske Stalsbaner* ***): Naar Tværnittene bestemmes alene efter de

*) *Nouvelles annales de la construction*, 1892, S. 10.

**) *Zeitschr. d. Vereins deutscher Ingenieure*, 1893, S. 159.

***) *Centralbl. d. Bauverwaltung*, 1897, S. 313.

fra Egenvægt og Snetryk hidrørende Spændinger, regnes som højeste Grænse 1200 kg./cm.²; naar ogsaa Vindtrykket medregnes, og naar Sne- og Vindtryk antages at kunne virke samtidig paa den for hver Stang ugunstigste Maade, tillades højst 1600 kg./cm.². De anførte Tal gælde for blødt Staal, for Svejsjærn regnes 10 % mindre.

II. Andre bløde Metaller og Legeringer.

§ 49. Kobber, Bly o. l. bløde Metaller samt forskellige Legeringer finde ikke sjældent Anvendelse i Teknikken til Formaål, hvor man maa kende noget til deres Styrke og andre elastiske Egenskaber. I Betydning staa de dog langt tilbage for Jærn, saa det er ret naturligt, at man ikke har nær saa udtømmende Oplysninger om dem. De Opgivelser, der findes spredte i Litteraturen, afvige tilmed ofte betydeligt fra hinanden, hvilket navnlig hidrører fra, at den Tilstand af Materialet, for hvilken Oplysningen gælder, ikke er nøjagtigt angivet, og Egenskaberne variere altid meget med Fremstillingsmaaden og den senere foretagne Bearbejdelse.

Kobber. Følgende Tabel giver Brudgrænsen for Kobber i de forskellige Former, hvori det forekommer *):

	Brudgrænse	Forlængelse
	kg./cm. ²	%
Støbt	1700	
Plade, valset	20 — 2300	35 — 40
" overhamret eller		
koldt valset	23 — 3200	35 — 12
" udglødet	20 — 2200	35 — 50
Rundstænger. Bolte	22 — 2300	35 — 40
Traad, haard	40 — 5000	
" blød	25 — 3000	

*) Disse (og ligeledes de følgende Angivelser i denne §) ere, hvor ikke andet er bemærket, samlede fra: C. Bach: *Die Maschinen-Elemente*, 6te Aufl., 1897, *Des Ingenieurs Taschenbuch* (Hütte) 1892, I. Buchetti: *Manuel des constructions métalliques*, Paris 1891, *Rapport de la commission des méthodes d'essai*, T. II. 1895, Johnson: *Materials of construction*, 1897.

Ved Overhamring eller kold Valsning kan Brudgrænsen hæves indtil ca. 20 %, medens Sejgheden samtidig aftager: *Bach**) nævner et Exempel paa Rundkobber til Stagbolte, der er bragt paa Markedet i 1896, hvor Brudgrænsen er 4000 kg./cm.², Forlængelsen kun 4 %, og som dog skal besidde betydelig Modstandsevne overfor Stød.

Elasticitetsgrænsen ligger for Kobber i dets oprindelige Tilstand (ikke hamret) ved Nul; der indtræder strax blivende Formforandringer. Ved gentagne Paavirkninger kan den for blødt Kobber hæves op til 6—800 kg./cm.², for haardt Kobber til 1000 kg./cm.². For blødt Kobber ligger *Proportionalitetsgrænsen* ved Nul**), d. v. s. Spændinger og Forlængelser ere overhovedet ikke proportionale, Arbejdslinien krummer sig lige fra Begyndelsespunktet og vender Konkaviteten mod x -Aksen (Forlængelses-Aksen); for hamret Kobber ligger *Proportionalitetsgrænsen* noget højere, ca. 500 kg./cm.².

Elasticitetskoefficienten kan regnes til 1100000—1300000 kg./cm.². Naar der ingen Proportionalitet findes, er dette naturligvis kun en Gennemsnitsværdi.

Styrken af Kobber aftager temmelig hurtigt med voxende Temperatur. Naar Brudgrænsen ved almindelig Temperatur sættes lig 100, fandt *Rudeloff****):

Temperatur	100°	200°	300°	400°
Brudgrænse	92	81	70	48

Den tilladelige *Fiberpaavirkning* er for Plader og Rundstænger 5—600 kg./cm.², eftersom Belastningen er mere eller mindre vekslede eller stødvis.

Zink. For støbt Zink fandt *Bauschinger*†) ved Trækprover med 4 Stykker Brudgrænsen 216—263 kg./cm.²; »Hütte« angiver

*) *Die Maschinen-Elemente*, S. 75.

**) *Martens: Vorversuche über die Festigkeitseigenschaften von Kupfer, Mittheilungen aus den kgl. techn. Versuchsanstalten zu Berlin*, 1894, S. 37. Se ogsaa: *Bach: Elasticität und Festigkeit*, 3te Aufl., 1898, S. 45 o. f.

*** *Mittheilungen aus den kgl. techn. Versuchsanstalten zu Berlin*, 1893, S. 292. Se ogsaa *Bach: Die Maschinen-Elemente*, S. 72—75, hvor der findes en Oversigt over flere lignende Forsøg.

†) *Mittheilungen*, Heft 20, S. 16.

erimod 880 kg./cm.². — Større Interesse har Styrken af *valset Zink* (Zinkplader, Bølgeblik); her fandt *Bauschinger**) ligeledes med 4 Trækforsøg 1640—2050 kg./cm.², »Hütte« angiver 1900, *Landsberg***) angiver efter Karmarsch 1315—1560 kg./cm.², efter Forsøg med schlesisk Zinkblik 1900—2500. Tilladelig Paavirkning 150—200 kg. cm.². Proportionalitetsgrænsen ligger ved Jul (if. Bauschinger*).

Bly anvendes ofte som trykfordelende Mellemlag mellem ærn og Sten o. l., og man har da Brug for at kende det højeste Tryk, man kan anvende, uden at Blyet flyder ud. Forsøg af *Bach****) have givet følgende Resultater for støbt Bly:

	Belastning, hvorved Blyet	
	endnu ikke flyder ud kg./cm. ²	flyder ud kg./cm. ²
Cylinder, $d = 3,5\text{ cm.}$, $h = 7\text{ cm.}$	46	51
» » - » - - 3,5 -	59	69
» » - » - - 1,0 -	105	126
» » - 16 - - 1,5 -	100	150
Tærning, 8 cm. Side	50	72

Valsede Plader give de samme Resultater. Man ser, at Formen af Prøvestykket spiller en overordentlig stor Rolle; jo mindre Højden er i Forhold til Tværsnitsdimensionen, des vanskeligere kan Blyet presses ud. Da det sædvanligvis anvendes i tynde Plader, kan man meget ofte regne med en tilladelig Paavirkning op til 70 kg./cm.²

Blyplader ere i de sidste Aar anvendte ved Konstruktionen af Charnierer i hvælvede Broer i Würtemberg †) (*Leibbrand*); Charnieret dannedes ved Indlæg i Fugen af en Blyplade, hvis Bredde var lig $\frac{1}{3}$ af Hvælvtykkelsen. Der tillodes først

*) *Mittheilungen*, Heft 20, S. 16.

**) *Die Glas- und Wellblechdeckung der eisernen Dächer*, Darmstadt, 1887, S. 149.

***) *Die Maschinen-Elemente*, S. 77, eller: *Elasticität und Festigkeit*, 2. Aufl. S. 54.

†) *Reihling: Stein- und Betonbrücken mit gelenkartigen Einlagen*, Zeitschr. für Arch.- u. Ing.-Wesen, 1896, S. 50.

60 kg./cm.², naar Trykket var ensformig fordelt, hvorved Trykket ved Kanten kunde blive 120 kg./cm.²; senere regnedes 120 kg./cm.² som tilladeligt over hele Blypladens Bredde.

Aluminium. Rent Aluminium har i støbt Tilstand en Styrke overfor Træk af 1000—1300 kg./cm.² med 10—13 % Forlængelse; naar det er smedet eller valset gaar Styrken op indtil 2000 kg./cm.² med 15 % Forlængelse. Det bruges som Tilsætning til Støbejern og Støbestaal og bevirker her tæt Støbning uden Blærer. Som Konstruktionsmateriale finder det kun Anvendelse legeret med andre Metaller, navnlig Kobber (se »Aluminiumbronze«).

Broncer. Angaaende Elasticitetsforholdene af støbt Bronze og Messing (af ikke nærmere angivet Sammensætning) anføres efter *Bach* *), at der ved den første Maaling absolut ikke findes Proportionalitet og strax optræder blivende Formforandringer. Ved Gentagelse af Maalingen formindskes de blivende Formforandringer betydeligt, og der findes Proportionalitet mellem de elastiske Formforandringer og Spændingerne op til 6—800 kg./cm.² Det synes altsaa her, som om baade Elasticitetsgrænse og Proportionalitetsgrænse hæves ved gentagne Belastninger. — Vi skulle ikke komme nærmere ind paa Styrken af de almindelige Legeringer af Kobber og Tin, Kobber og Zink o. s. v.; deres Egenskaber variere stærkt med Sammensætning og Behandling; temmelig udførlige Oplysninger findes i det ovenfor citerede Værk af *Buchetti*. Derimod skal meddeles et Par Oplysninger om nogle nyere Legeringer.

Fosforbronze er en Legering af Kobber og Tin med en ringe Tilsætning af Fosfor, der virker som Afiltningmiddel under Smeltningen og for største Delen gaar over i Slaggen. Hvis Produktet skal smedes, valeses o. l., anvendes 4—5 % Tin og ikke mere end ca. 0,1 % Fosfor, til Støbninger, der skulle modstaa Slid, 7—9 % Tin, 0,5—1 % Fosfor; aldrig mere end 4 % Fosfor. Styrken er i ikke udglødet Tilstand 7—10000 kg./cm.², i udglødet Tilstand 35—4000 kg. med 37—46 % Forlængelse; støbt og ubearbejdet **) 2400 kg.

Ved Tilsætning af Mangan eller Silicium faas et Materiale, der til flere specielle Øjemed udmærker sig fremfor almindelige

*) *Elasticität und Festigkeit*, 3te Aufl., 1898, S. 49 o. f.

**) *Tetmajer: Die Baumechanik*, Zürich, 1889, S. 83.

Broncer. Siliciumbronze-Traad har saaledes en Styrke af 45—7500 kg./cm.², støbt 10 % Manganbronze *) 2500 kg./cm.², valset 4 % Manganbronze *) 2900 kg., 40 % Forlængelse, 15 % Manganbronze *) 3600 kg., 34 % Forlængelse.

Aluminiumbronze er sammensat af 5—12 % Aluminium og 95—88 % Kobbber. Her meddeles efter *Bach* nogle Oplysninger om *Neuhausen-Aluminiumbronze*:

Aluminium %	Brudgrænse Træk. kg./cm. ²	Forlængelse %
11,5	8000	0,5
11,0	6800	1,0
10,0	6400	11,0
9,5	6200	19,0
9,0	5750	32,0
8,5	5000	52,5
5,5	4400	64,0

Tilsætning af en ringe Mængde Kobber til rent Aluminium forøger Styrken uden at forøge Vægtfylden synderligt. Saaledes faas **):

med 2 % Cu. Brudgrænse 1600 kg./cm.², Forl. 18 %,
 „ 3,5 % „ valset, „ 2800 „ „ 4 %,
 „ — „ udglødet, „ 1600 „ „ 20 %.

Deltametal er en Legering af Kobber og Zink med lidt Jærn (50—65 % Cu, 50—30 % Zn, 0,1—5 % Fe.).

	Brudgrænse kg./cm. ²	Forlængelse %
Støbt (i Sand)	30 — 3500	10 — 20
Valset og udglødet	40 — 5500	40 — 14
Traad, stiv	80 — 9000	

*) *Mittheilungen aus den kgl. technischen Versuchsanstalten zu Berlin*, 1893, S. 292.

**) *Rapport XIV de la commission des méthodes d'essai*, T. II. 1895.

Ved højere Temperaturer aftager Styrken hurtigt. Med Brudgrænsen ved almindelig Temperatur lig 100 fandt Rudeloff*),

Temperatur	100°	200°	300°	400°
Brud- { valset	92	72	[50]	16
grænse { støbt	100	82	62	20

Deltametal er if. *Bach* anvendt til Tandhjul paa Rigi- og Pilatusbanen og skal tilfredsstillende særdeles godt. I det hele taget kan man af de her nævnte forskellige Legeringer fremstille Materiale, der i Henseende til Styrke kan staa ved Siden af Jærn og Staal i dets forskellige Skikkelser, og som til specielle Anvendelser har betydelige Fortrin (større Ledningsevne for Elektricitet, større Modstandsevne overfor Slid og overfor Fugtighed (Rust), Søvand o. s. v.).

III. Sprøde Materialer (Støbejærn, naturlige og kunstige Sten).

§ 50. Almindelige Elasticitetsforhold; Træk. Tryk. Man har længe vidst, at disse Materialer ikke følge Hooke's Lov. Allerede *Hodgkinson* viste dette for Støbejærn. I 1875 offentliggjorde *Bauschinger***) en omfattende Række Undersøgelser angaaende de i Bayern forekommende naturlige Sten, og heraf fremgik det tydeligt, at der ikke er Tale om Proportionalitet mellem Spændinger og Formforandringer. Proportionalitetsgrænsen ligger ved Nul, eller der findes slet ingen Proportionalitetsgrænse. Ligeledes viste det sig, at ogsaa Elasticitetsgrænsen ligger ved Nul: der optraadte blivende Formforandringer selv for de mindste Spændinger. Ganske det samme gælder, som *Bach* har vist, for Cementmørtel. Beton o. fl.

At det dog først er i de sidste Par Aar, navnlig ved *Bach's****) og *Föppl's*†) Undersøgelser, man er naaet til større

* *Mittheilungen aus den kgl. techn. Versuchsanstalten zu Berlin*, 1893, S. 292.

** *Mittheilungen*, Heft 5, senere fortsat i Heft 10 og 18.

*** *Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure*, 1895, S. 489; 1896, S. 1361; 1897, S. 241.

† *Mittheilungen aus dem mech.-techn. Laboratorium, München*, Heft 24, 1896.

Klarhed angaaende disse Forhold, er ikke vanskeligt at forstaa. Formforandringerne ere nemlig meget smaa, saa der skal en overordentlig Nøjagtighed til at bestemme dem. Der findes ikke noget til Flydegrænsen svarende Punkt, udenfor hvilket Formforandringerne blive forholdsvis store. Et Begreb om Arbejdsliniernes Udseende faar man af Fig. 135—40 og 142, Pl. 15 og 16.

Hvis man skal kunne bruge de ved Træk- og Trykforsøg fundne Arbejdslinier til derved at forklare Fænomenerne ved f. Ex. Bøjning, er det naturligvis kun de *elastiske* Formforandringer, der spille nogen Rolle; det er kun dem, der frembringe Spændinger. Naar man anstiller et Træk- eller Trykforsøg, maaler man direkte de totale Formforandringer og ved at lade Belastningen gaa tilbage til Nul tillige de blivende; de elastiske Formforandringer findes saa som Differensen. Nu viser det sig imidlertid, naturligt nok, at de nye blivende og totale Formforandringer, man finder ved at gentage Forsøget, ikke have samme Størrelse som første Gang, og heller ikke deres Differens er den samme. Hvis Belastningen ikke er for stor, kan man ved at gentage Forsøget nogle Gange faa de blivende Formforandringer til helt at forsvinde, saa Elasticitetsgrænsen nu er hævet op til Paavirkningens Værdi; efter længere Tids Hvile finder man dog ofte igen en lavere Belliggenhed af Elasticitetsgrænsen. — Naar Materialet indgaar i en eller anden Konstruktion, maa man antage, at Elasticitetsgrænsen paa samme Maade hæves op til eller over Paavirkningen, saaledes at Formforandringerne ere fuldstændig elastiske; det er derfor kun den Slags elastiske Formforandringer, der indtræde, efterat Elasticitetsgrænsen er hævet op over Paavirkningen, som man har speciel Interesse af at kende. Det er forøvrigt naturligt nok, at Elasticitetsgrænsen saaledes kan hæves; ellers maatte tilstrækkelig mange Gentagelser af selv meget smaa Paavirkninger tilsidst medføre Brud. — Paa den anden Side fremgaar det af *Bach's* Forsøg, at der skal desto flere Gentagelser til for at bringe de blivende Formforandringer til helt at forsvinde, jo større Paavirkningen er, saa det ligger nær at slutte, at Elasticitetsgrænsen ikke kan hæves op over en vis Højde, hvorefter igen følger, at Brud maa indtræde for tilstrækkelig mange Gentagelser af en Paa-

virkning, der er større end den højst mulige Værdi af Elasticitetsgrænsen.

Dette Forhold, at Elasticitetsgrænsen saaledes kan hæves, og at egentlig kun de elastiske Formforandringer have Interesse, som maales, efterat Provelegemet ved gentagne Paavirkninger er bragt i en Slags »konstant Tilstand«, har man ikke været klar over tidligere; derfor have Bauschingers ovenfor nævnte Maalinger nærmest kun den Betydning, at det derved er slaaet fast, at Hooke's Lov ikke gælder, men de fundne Arbejdslinier kunne strengt taget ikke anvendes til videre gaaende Undersøgelser.

Efterhaanden som der er bleven udført flere og flere nøjagtige Elasticitetsmaalinger, er der naturligvis ogsaa gjort Forsøg paa at opstille bestemte Relationer mellem Spændinger og Formforandringer. *Hartig* *) har som den simplest mulige Form, naar Funktionen ikke skal være lineær, foreslaaet en Parabel, nemlig:

$$\sigma = \alpha \epsilon - \beta \epsilon^2,$$

hvor α og β ere Konstanter. De specielle Talværdier, han angav for en Del Materialer, have dog vist sig mindre rigtige. Hvis man overhovedet vil tale om en Elasticitetskoefficient, naar man har en saadan kontinuerlig krummet Arbejdslinie, plejer man herved at forstaa Tangentens Retningskoefficient:

$$E = \frac{d\sigma}{d\epsilon},$$

men denne Sprogbrug er dog ikke absolut fast. **)

Bach, eller rettere hans Assistent *Schüle*, har angivet en anden Relation:

$$\epsilon = \alpha \sigma^m,$$

hvor α og m ere Konstanter. m er for de fleste undersøgte

*) *Civilingenieur*, 1892 og 93; refereret i *Zeitsch. d. Arch. u. Ing. Vereins zu Hannover*, 1894, S. 206, og i *Centralbl. der Bauverw.*, 1894, S. 191.

**) *Föppl (Festigkeitslehre, Leipzig, 1897, S. 51)* sætter $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$, altsaa lig

Retningskoefficienten for Korden fra Begyndelsespunktet. Begge Definitioner falde sammen med den sædvanlige, naar Hooke's Lov gælder.

toffer et Tal, der ligger mellem 1 og 2; for et enkelt, som og ikke hører ind under den her behandlede Gruppe, nemlig Jæder, er $m = \text{ca. } 0,7$.

Formlen indbefatter Hooke's Lov som specielt Tilfælde ($m = 1$); for $m > 1$ vender Kurven sin Konkavitet mod σ -Aksen, for $m < 1$ mod ϵ -Aksen. Den leverer Resultater, de stemme udmærket med de maalte Størrelser, og maa derfor i alt Fald betragtes som en tilstrækkelig nøjagtig Interpolationsformel, men om den just kan antages at være Udtryk for den Naturlov, der sammenknytter Spændinger og Formforandringer, kunde være et andet Spørgsmaal. For $m > 1$ tangerer Kurven Begyndelsespunktet σ -Aksen, for $m < 1$ tangerer den ϵ -Aksen, medens den for $m = 0$ gaar over til en ret Linie, hvis Retning er bestemt ved α . Det synes nu ret mærkeligt, at Kurven i det almindelige Tilfælde ($m \geq 1$) skal have en ganske speciel Linie til Tangent uden Hensyn til de særlige Værdier af Materialkonstanterne α og m , medens den derimod i det specielle Tilfælde ($m = 0$) har en Tangent, der efter den særlige Værdi af α kan indtage hvilken som helst Stilling i Vinkelrummet mellem σ - og ϵ -Aksene. Derimod opfylder Formlen netop af den Grund, naar den anvendes paa baade Træk- og Tryk-Arbejdslinien, en anden Betingelse — at Træk- og Tryk-Kurverne i Begyndelsespunktet have fælles Tangent; — man kan ikke godt tænke sig, at der skulde være en Diskontinuitet her.

Der kan sikkert med Rette gøres adskillige Indvendinger*) af theoretisk Natur mod Ligningens Form, bl. a. ogsaa, at det absolut ikke synes at stemme med de foretagne Elasticitetsmaalinger, at Arbejdslinien skærer ϵ -Aksen under en ret Vinkel; nogen Afgørelse heraf kan man dog næppe vente at faa ved direkte Maalinger; hidtil er det, saa vidt vides, kun konstateret for et enkelt Materiale (Marmor, hvorom senere), at Ligningen ikke kan anvendes. Men den væsentligste Indvending mod

*) Föppl (*Festigkeitslehre*, S. 54) gør opmærksom paa, at α 's Dimension i Almindelighed er ubekendt, først bliver bestemt, naar m 's Værdi er givet, og da udtrykkes som Potens med brudten Exponent og derfor ikke kan sammenlignes med andre fysiske Konstanter. Endvidere fremhæves, at et Stof, for hvilket Schüle's Ligning gælder, maa forholde sig ganske anderledes i akustisk Henseende, end Tilfældet er i Virkeligheden. Se ogsaa *Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing.* 1898, S. 694.

Ligningen er af en ganske anden Art. Den eneste fornuftige Aarsag, man har til at søge at opstille en saadan mathematisk Relation og ikke nøjes med at optegne de ved direkte Maalinger fundne Arbejdslinier, er den, at man vil benytte Ligningen som Grundlag for en almindelig Elasticitetstheori, analog med den, der er bygget op paa Hooke's Lov; og Meningen med en saadan Theori — i alt Fald naar den opstilles af Teknikere — maa jo være, at den skal kunne anvendes paa de i Praxis forekommende Tilfælde *). Hertil fordres imidlertid, at Beregningsmaaden ikke bliver altfor kompliceret, og det er umuligt at opnaa med Schüles Ligning som Udgangspunkt. — Der kan nu heldigvis gøres en anden Betragtning gældende, som viser, at det er ganske unyttigt at stille for store Fordringer om Nøjagtighed til den Relation, man skal benytte som Grundlag for en saadan Theori. Naar man betragter de hidtil offentliggjorte Værdier af α og m for et bestemt Materiale, vil man finde meget betydelige Afvigelser. For et Prøvestykke af Granit har Bach saaledes fundet **) (for Tryk):

$$\varepsilon = \frac{1}{249540} \cdot \sigma^{1,132},$$

for et andet:

$$\varepsilon = \frac{1}{339750} \cdot \sigma^{1,109};$$

ligeledes for Granit (dog naturligvis af ganske anden Oprindelse) har Bach derimod udtrykt Resultatet af Föppl's Maalinger ved ***):

$$\varepsilon = \frac{1}{765000} \cdot \sigma^{1,17},$$

alle gældende for Tryk. Dette er naturligvis slet ikke andet end hvad man kunde vente af saadanne Materialer som Støbejern, naturlige Sten o. s. v.; man vil altid finde store Forskelligheder, selv om man tager Prøvelegemer fra samme større Stykke, og endnu mere, naar man tager dem fra for-

*) At man ikke i Længden kan undvære en Theori, der tager Hensyn til Arbejdsliniens virkelige Form, har man et Exempel paa i Monierkonstruktionerne; man kan slet ikke forklare sig Jærnets og Betons Samvirken, hvis man antager Hooke's Lov gældende.

**) Zeitschr. d. Vereins deutscher Ing., 1897, S. 241.

***) Zeitschr. d. Vereins deutscher Ing., 1898, S. 78.

skellige Stykker. Men det, man har Brug for i Praxis, er saadanne Gennemsnitsværdier af Materialkonstanterne, at man kan lægge dem til Grund for sine Beregninger, helst førend man endnu har indhentet Oplysninger om de specielle Værdier, der gælde for det Materiale, man kommer til at anvende. — Det kan af de nu anførte Grunde meget godt forsvares at vælge en simplere Form for Ligningen mellem σ og ε , f. Ex. den af Hartig foreslaaede Parabel; hvis man tager en bestemt Række maalte Værdier af σ og ε , kan man ganske vist ikke faa Parablen til at komme Maalingerne saa nær som den Schüle'ske Kurve, naar man for begge beregner de Konstanter, der give mindst Afvigelse; men hvis man en Gang for alle tillægger Konstanterne i begge Ligninger nogle Gennemsnitsværdier, kan denne bestemte Parabel meget godt komme en maalt Arbejdslinie lige saa nær som Schüle's Kurve.

Paa de enkelte Punkter, hvor vi i det følgende komme ind paa Beregninger for Stoffer, der ikke følge Hooke's Lov, ville vi derfor vælge en parabolisk Arbejdslinie med den Hartig'ske Form af Ligningen; paa den Maade faa vi de simplest mulige Beregninger, — de blive ikke desto mindre komplicerede nok, — og Resultaterne ville i alt Fald stemme bedre med Virkeligheden, end hvis vi benyttede Hooke's Lov og de derved udledede Formler.

§ 51. Indflydelsen af Træk- og Tryk-Prøvestykkernes Form og Størrelse; Paavirkningsmaaden.

1. *Træk.* De her omhandlede Materialer anvendes i Reglen ikke gerne, hvor der stilles Fordringer til deres Modstandsevne overfor Træk. Ikke desto mindre er det meget ofte Trækprøver, der anvendes for at undersøge eller kontrollere Kvaliteten, saa Spørgsmaalet om Træk-Prøvestykkernes Form spiller en ikke uvæsentlig Rolle. Og tilmed har det i de sidste Par Aar faaet en særlig aktuel Betydning, siden *Föppl* i 1896 fremsatte den Paastand, at den »tilsyneladende« Brudgrænse, man bestemmer ved de sædvanlige Trækprøver med Cementmørtel, er en hel Del lavere end den »virkelige« Brudgrænse *).

*) *Mittheilungen aus dem mech.-techn. Laboratorium, München, Heft 24, S. 31, Noten.* Paastanden er bleven stærkt bestridt fra mange Sider, senest af *Bach* i *Zeitschr. d. Vereins deutscher Ing.*, 1898, S. 239. Se ogsaa *»Ingeniøren«*, 1898, S. 87 og S. 118.

Grunden hertil maa søges i den særlige 8-Tal-Form (Fig. 127. Pl. 13), man giver Provestykket; Kraften virker i Punkterne *A* og *B*, de yderste Fibre i Brudtværnsnittet *a—b* blive derved stærkere paavirkede end de midterste; Bruddet begynder ude ved Kanten, og naar det først er begyndt, forplanter Revnen sig indad. Den samme Betragtning er allerede i 1888 fremsat af *L. Durand-Claye* *), der ligesom Föppl viste dens Rigtighed ved Forsøg med et Kautschuklegeme af samme Form som Cementprovestykket. Naar der tegnedes et Par parallelle Linier paa hver sin Side af *ab* (Fig. 127), og Legemet paavirkedes til Træk, saa man, at Linierne krummede sig, saa de vendte Konvexiteten mod hinanden; Forlængelserne ere altsaa større ude ved Kanten end inde i Midten, følgelig maa ogsaa Spændingerne være størst ved Kanten — om end ikke just i samme Forhold som Forlængelserne. *Durand-Claye* paaviste yderligere Rigtigheden heraf paa flere andre Maader, saaledes ved at svække Brudtværnsnittet ved smaa Huller; Svækkelsen skal vise sig at være størst, naar Hullet anbringes tæt ude ved Kanten, hvor Spændingen er størst, og dette var ogsaa Tilfældet. Der er altsaa **) ingen Tvivl om, at den tilsyne-

*) *Annales des ponts et chaussées*, 1888, II., S. 173.

**) *Durand-Claye* har senere (*Annales des ponts et chaussées*, 1895, I. S. 604) forsøgt at opstille en theoretisk Begrundelse heraf og har udledet en Formel for Forholdet mellem den tilsyneladende Brudgrænse ($\frac{P}{F} = \frac{\text{Kraften}}{\text{Brudtværnsnittet}}$) og den virkelige Brudgrænse (= Spændingen ved Kanten i Brudøjeblikket = *R*); Forskellen mellem $P:F$ og *R* bliver herefter desto større, jo større Afstanden mellem Punkterne *A*, *A* bliver i Forhold til Afstanden mellem Linierne *AA* og *ab* (Fig. 127). Skønt Formlen er meget langt fra at være uangribelig, bekræftes den dog til en vis Grad af Erfaringen; *Durand-Claye* anvendte den paa 3 Provestykker af forskellig Form og fandt $R = 1.59, 1.50$ og $1.43 \times \frac{P}{F}$, hvilket stemmer med, at Trækprøverne gav de største Værdier af $\frac{P}{F}$ for den sidste de mindste for den første Form. — Det samme bekræftes af *Johnson* (*Materials of construction*, S. 436—38), der har anvendt *Durand-Claye*'s Formel paa det amerikanske Normal-Provestykke og paa et af ham selv angivet Provestykke, som netop er konstrueret for at faa en mere ensformig Fordeling af Spændingen over Brudtværnsnittet. Formlen viste, at det sidste skulde være 35 % stærkere end det første, og en omfattende Række Forsøg gav 25 % større $P:F$ for *Johnson*'s Form. — Endelig har *Föppl* (*Centralbl. d. Bauverw.* 1898, S. 275) ført et aldeles direkte Bevis. Han

ladende* Brudgrænse, der bestemmes ved de almindelige Cement-Trækprøver, er mindre end den »virkelige«. Hvor meget Forskellen beløber sig til, er det vanskeligt at sige; den kan sandsynligvis variere mellem 0 og 50 %. Imidlertid maa man ikke af det nu meddelte lade sig forlede til at antage, at man saa ogsaa i Praxis kan regne paa en større Modstandsevne af Cementmørtlen overfor direkte Træk end den ved de sædvanlige Forsøg bestemte; man maa tværtimod regne med en betydelig mindre. Dette illustreres ved følgende Forsøg af Bach *) med Cementmørtel 1:3:

	Haandblandet. Brudgrænse kg./cm. ²	Maskinblandet. Brudgrænse kg./cm. ²
Sædvanlig 8-Tal-Form, ($F = 5 \text{ cm}^2$)	36,8	38,5
Lang Cylinder, ($F = 50 \text{ cm}^2$)	17,35	25,1

Men Grunden hertil er en ganske anden; den maa søges deri, at de sædvanlige smaa 8-Tal-Prøvestykker blive stærkt komprimerede i Støbeformen, saa man er sikker paa at faa en absolut tæt Støbning, medens dette langt fra i samme Grad kan være Tilfældet med større Prøvestykker og endnu mindre med den i Praxis anvendte Beton.

Iod stobe en Del sædvanlige 8-Tal-Provelegemer af ren Cement, i hvilke der i Midtlinien var indstøbt en Staaltraadsøsken, saa Kraften kunde overføres herigennem og derved komme til at virke mere centralt end i det almindelige Sonderrivningsapparat. Halvdelen af Prøvestykkerne reves over med den sædvanlige Angrebsmaade for Kraften, Halvdelen ved Hjælp af Traadoskenerne; Resultaterne ere (som Middeltal af 10 Forsøg :

Angrebsmaade	Alder				
	3 Dage	7 Dage		28 Dage	
		I. Række	II. Række	I. Række	II. Række
sædvanlig	22,86	28,44	22,80	35,71	33,84
ved Øskenerne . . .	24,95	31,95	28,47	44,19	40,07

*) Zeitschr. d. Vereins deutscher Ing. 1898, S. 239. Refereret i »Ingeniøren«, 1898, S. 87.

Medens man altsaa af den sidst anførte Grund for Cementmørtel maa vente mindre Styrke pr. Arealenhed af store Prøvestykker end af smaa, synes det modsatte at være Tilfældet for naturlige Sten. For Granit og Sandsten har *Föppl* konstateret dette *); han fandt Styrken af smaa Prøvestykker betydelig mindre end af store og mener, at Grunden maa søges i Bearbejdelsen af Stenen, hvorved det yderste Lag svækkes; hvis denne Svækkelse naar ned til samme Dybde for store og smaa Stykker, saa maa Virkningen deraf mærkes tydeligst ved de smaa, hvor Forholdet mellem Tværsnittets Omkreds og Areal er størst.

2. *Tryk*. For det første gælder her ganske det samme angaaende *Prøvestykkernes Størrelse*, som lige er bemærket for Trækpaavirkning: naar det drejer sig om et Materiale som Cementmørtel eller Beton, der faar sin Form ved Støbning, kan man ikke i Praxis regne paa saa stor en Styrke som den, der findes ved Laboratorieforsøg med smaa Stykker, der komprimeres stærkt; for naturlige Sten derimod, hvor Prøvelegemerne arbejdes ud af et større Stykke, kan man snarere paaregne større Styrke, end Forsøgene give.

Hvad dernæst *Prøvestykkernes Form* angaar, saa gælder her først og fremmest den samme Proportionalitetslov, som i § 42 anførtes for smedeligt Jærn: *ligedannede Prøvestykker af samme Materiale give de samme Resultater*. Til Illustration heraf anføres følgende Forsøg af *Bauschinger* **) med en meget homogen schweitzisk Sandsten; Prøvestykkerne havde rektangulært Tværnit (Siderne ere *a* og *b*), og man ser, at de meget nær kunne regnes for Tærninger:

<i>a</i> cm.	<i>b</i> cm.	<i>h</i> cm.	Brudgrænse kg./cm. ²
9,95	9,85	9,6	680
10,0	9,85	9,7	685
6,0	5,85	5,7	670
5,2	5,2	5,05	690

*) *Mittheilungen aus dem mech.-techn. Laboratorium. München, Heft 24*

**) *Mittheilungen, Heft 6, Tab. III.*

Sætningen er forøvrigt ikke bevist ved ret mange direkte Forsøg med ligedannede Prøvestykker, men den indgaar som specielt Tilfælde i en af *Bauschinger* *) opstillet Formel, ved hvilken man kan sammenligne Resultaterne af Trykforsøg med helt forskelligt formede Prøvestykker. Formlen lyder:

$$B_c = \left(\lambda + \nu \cdot \frac{\sqrt{F}}{h} \right) \sqrt{\frac{F}{\frac{1}{4}u}}, \quad (7).$$

hvor B_c er Brudgrænsen for Tryk (i kg./cm.²), F Tværsnitsarealet, u Perimeteren, h Højden (alt i cm.), λ og ν Konstanter (kg./cm.²). For ligedannede Legemer bliver den sidste Faktor konstant, $\sqrt{F}:h$ ligeledes, saa Formlen bliver til:

$$B_c = (\lambda + \nu \cdot c) \cdot K;$$

for Tærninger faas:

$$B_c = \lambda + \nu, \quad (7 a).$$

hvorved man kan beregne den Brudgrænse, man vilde finde for en Tærning, hvis man har gjort tilstrækkelig mange Forsøg med anderledes formede Prøvestykker til at bestemme Konstanterne λ og ν i Ligning (7). Tærningen regnes for Normalformen; Resultater, der ere fundne ved den, kunne umiddelbart sammenlignes, og Resultater, der ere fundne ved Prøvelegemer af andre Former, skulle reduceres ved (7) eller (7 a) for at kunne sammenlignes.

Bauschinger har eftervist Rigtigheden af Ligning (7) dels ved Bearbejdelse af tidligere Forsøg navnlig af *Rondelet* og *Vicat*, dels ved en Mængde egne Forsøg; Materialet ved alle disse Forsøg var forskellige Slags Sandsten, Cementmørtel, Gibs o. l. For at give et Begreb om den Grad af Nøjagtighed, der opnaas, skulle vi anføre følgende Forsøgsrække **) af Bauschinger med en sinkornet broget Sandsten; Prøvestykkerne ere kvadratiske Prismer og cirkulære Cylindre:

*) *Mittheilungen*, Heft 6.

**) *Mittheilungen*, Heft 6, Tab. V.

Form	h cm.	F cm. ²	Brudgr. i kg./cm. ²	
			observ.	beregnet
Prisme	36,3	84,9	381	387
Cylinder	36,25	66,5	451	407
Prisme	23,1	84,4	438	405
Cylinder	22,8	65,8	464	423
Prisme	12,45	83,0	440	444
Cylinder	12,2	66,8	463	473
Prisme	2,73	84,8	790	755
Cylinder	2,90	65,8	806	729

De i sidste Rubrik anførte Tal ere beregnede efter (7) med $\lambda = 358$, $\nu = 118$, hvilke Værdier Bauschinger angiver for den hele Forsøgsrække, hvoraf ovenstaaende er et Uddrag. Overensstemmelsen er ikke altid videre god, men der kan heller ikke stilles altfor store Fordringer i den Retning til saadanne Materialer som naturlige eller kunstige Sten. — Senere Forsøg af *Martens**) have vist, at Loven ogsaa gælder for en Bly-Tin-Legering, hvorimod den ikke kunde bringes til at passe for Støbejern. For kvadratiske Prismer af Støbejern finder Martens:

$$B_c = 4190 + 1437 \cdot \frac{\sqrt{F}}{h},$$

for cirkulære Cylinder:

$$B_c = 4320 + 1417 \cdot \frac{\sqrt{F}}{h},$$

men man ser let, at disse to ikke kunne sammenfattes under én Formel af den af Bauschinger foreslaaede Form. Martens angiver en ny, mere kompliceret Formel, som vi dog ikke skulle komme ind paa.

Hovedresultaterne af det her om Prøvestykkernes Form meddelte ere følgende: 1) *naar man sammenligner de to hyppigst benyttede Former, det kvadratiske Prisme og den cirkulære Cylinder, vil den sidste levere noget højere Værdier af*

*) *Mittheilungen aus den kgl. techn. Versuchsanstalten zu Berlin*, 1896, S. 133.

Brudgrænsen end den første (naar F og h ere de samme, faasfter (7) 1,06 Gange saa meget for Cylindren); 2) *Prøvestykkets Højde spiller en overmaade stor Rolle, Brudgrænsen vokser meget hurtigt, naar Højden aftager*; dette Forhold ses tydeligt af den ovenfor anførte Forsøgsrække. Her maa man dog vel lægge Mærke til, at der kun er Tale om saadanne Værdier af Højden

Forhold til Tværsnitsdimensionerne, at en Udhøjning til Siden er udelukket; *Formel (7) gælder overhovedet kun for $z < 5\sqrt{F}$* . — At en ganske lille Højde giver en meget stor Styrke overfor Tryk, hænger forøvrigt sammen med et Forhold, vi tidligere have været inde paa, at nemlig i saa Fald Materialet ikke kan komme til at undvige frit til Siden, enten nu denne Undvigen foregaar som en Udflyden eller som en Springen i Stykker. Vi ville et Øjeblik se paa, hvorledes Bruddet indtræder for de her behandlede skøre Legemer.

Naar man af et af disse Stoffer tager et Prøvelegeme, hvis Højde er $1\frac{1}{2}$ Gange Tværnittets Sidelinie (Diameter) eller mere, vil man i Almindelighed se Bruddet foregaa paa den Maade, at Legemet deler sig i to Kiler (Fig. 128, Pl. 13), der glide paa hinanden. Man kunde nu stille sig den Opgave at undersøge dette Forhold nærmere ved en Beregning, idet man forudsatte Brudfladen nøjagtig plan. Den trykkende Kraft σ paa Prøvestykkets Normalsnit kan opløses i to Komposanter, vinkelret paa og i Brudplanen; den sidste vil søge at frembringe en Glidning langs denne Plan, men Bevægelsen modarbejdes af Legemets Modstand mod Forskydning og muligvis af Gnidningen, hvis en saadan kan tænkes at virke, førend Materialets Cohæsion er overvunden. Ved Differentiation kunde man dernæst finde en Retning af Glideplanen, for hvilken det σ , der er nødvendigt for netop at overvinde Modstanden mod Bevægelsen, bliver Minimum; langs den Plan vilde Bruddet da lettest foregaa. — Beregningen har selvfølgelig ikke stor Værdi og skal derfor heller ikke gengives her, men den refererede Tankegang giver dog et Fingerpeg, der kan lette Forstaaelsen af Fænomenerne ved et saadant Trykforsøg. — Hvis Materialet er fuldstændig homogent, vil der aabenbart være lige stor Tilbøjelighed til at revne langs flere Planer, der alle danne samme Vinkel med Normalsnittet; det er heller ikke ualmindeligt at se et kvadratisk Prisme brydes saaledes, at der fremkommer to Pyramider med Toppene mod hinanden, muligvis med et

mellemliggende Stykke, der da falder ud til Siden (Fig. 129, Pl. 14). Bruddet indledes meget ofte ved, at der springer Splinter af Siderne. Naar Prøvestykkets Højde er lig Tværnittets Sidelinie eller mindre, vil den gunstigste Brudplan faa en Retning som AB (Fig. 130 a, Pl. 14), men Revnen kan i Almindelighed ikke aabne sig helt op til B , fordi Friktionen med Trykpladen hindrer en Bevægelse udad af Stykket BC . Der danner sig saa maaske ogsaa en Revne ud fra C , og det i Fig. 130 a skraverede springer af, saa man beholder et af to Pyramidestubbe bestaaende Legeme tilbage, der først brydes, naar Trykket er steget yderligere. Eller det gaar som i Fig. 130 b antydte, at Brudplanen AB drejer sig hen til en Diagonalplan, saa man ved Bruddet faar to Kiler eller Pyramider, der glide forbi hinanden. Man ser, at den Del af Prøvestykket, der nogenlunde let kan komme til at løsne sig og falde ud til Siden, bliver des mindre, jo mindre Højden er.

Vi komme endelig til *Paavirkningsmaaden*. Ovenfor er det hele Tiden forudsat, at Trykket udøves paa hele Prøvestykkets Grundflade; hvis dette ikke er Tilfældet, men Trykket kun virker paa en Del af Grundfladen, f. Ex. paa det skraverede Kvadrat i Fig. 131, Pl. 14, forandre Forholdene sig.

1. *Trykket fra neden virker paa hele Grundfladen, fra oven kun paa en Del deraf* (med Areal f). Ved de herover anstillede Forsøg er der altid anvendt omtrent tærningformede Prøvestykker, og Arealet f har som oftest været centralt beliggende. Den observerede Brudgrænse kan angives enten i Forhold til Arealet f (B_f) eller til F (B_F), og naar den paa sædvanlig Maade, ved Tryk over hele Grundfladen, fundne Brudgrænse kaldes B , maa man vente, at

$$B_f > B > B_F.$$

Dette har ogsaa altid været Tilfældet, men derimod have Forsøgene paa at opstille en Relation mellem B_f og B — det er Sammenhængen mellem disse to, der har størst Interesse — ikke ført til overensstemmende Resultater.

Paa Grundlag af nogle Experimenter af *L. Durand-Claye* har *Flamant* *) givet Relationen:

*) *Annales des ponts et chaussées*, 1887, II, S. 230.

$$B_f = B \cdot \sqrt{\frac{F}{f}};$$

en passer saa nogenlunde, men ikke særlig godt, for Durand-laye's Resultater, naar $\sqrt{\frac{F}{f}}$ ligger mellem $\frac{1}{3}$ og $\frac{1}{7}$, men den temmer slet ikke med Bauschingers Forsøg.

Bauschinger *) har givet Relationen følgende Form;

$$B_f = B \sqrt[3]{\frac{F}{f}}. \quad (8).$$

For at give en Forestilling om den opnaaede Grad af Nøjagtighed skal anføres nogle af Bauschingers Forsøgsresultater. Materialet var en schweitzisk Sandsten, Prøvelegemerne meget nær Tærninger med 10^{cm}. Sidelinie. Ved nogle af dem overførtes Trykket til en Flade som f i Fig. 131 ved et Staalstempel, ved andre vare de opadvendte Kanter af Tærningen fasede af; det synes temmelig ligegyldigt, hvilken af disse Metoder der anvendes.

	F cm. ²	f cm. ²	B_F kg. cm. ²	B_f (kg./cm. ²)	
				observ.	beregnet
Staalstempel	99,0	15,2	162	1052	1186
—	97,5	32,5	308	923	916
—	98,5	60,8	477	772	746
Affasning 1:1	100,0	63,2	510	807	740
— 3:2	99,0	37,2	325	860	879
— 1:3	98,0	18,5	235	1243	1107

For den anvendte Sandsten var $B = 635$ kg./cm.² (for Tærningform), og dermed ere Tallene i sidste Rubrik beregnede efter (8).

Det her omtalte Tilfælde har en Del praktisk Interesse, da det ikke er sjældent, at hugne Sten paavirkes paa den Maade (Søjlefundamenter, Underlagssten for Brodrageres Lejer o. l.). Hvis man da angiver Paavirkningen paa Stenen

*) Mittheilungen, Heft 6.

i Forhold til Arealet f , kan man aabenbart roligt tillade en større Belastning end ellers, naar Stenen indgaar i en Konstruktion, hvor den bliver trykket over hele Fladen, og man kan f. Ex. anvende Relationen (8) ogsaa for de tilladelige Paavirkninger

$$\sigma_f = \sigma \cdot \sqrt[3]{\frac{F}{f}}. \quad (8a).$$

Ogsaa et andet Tilfælde af delvis Paavirkning har praktisk Interesse, nemlig det, hvor det lille Areal f er en rektangulær Strimmel, der strækker sig over Grundfladens hele Bredde (Fig. 132, Pl. 14); fra neden tænkes Trykket ogsaa her at virke over hele Fladen. Vi skulle anføre Resultaterne af nogle Forsøg af Bach*) med Sandsten, for hvilken Brudbelastningen (bestemt ved tærningformede Provestykker) var 653 kg./cm.². Der anvendtes omtrent tærningformede Provelegemer af 10^{cm} Sidelinie (Højden var dog kun 9.8—9.9^{cm}).

Bredde af Strimmen f cm.	F f	B_F kg. cm. ²	B_f (kg./cm. ²)	
			observ.	beregnet efter (8)
2.5	4.0	232	926	1035
2.0	5.0	188	943	1117
1.5	6.67	156	1044	1230
1.0	10.0	120	1193	1405
0.5	20.0	102	2050	1770

De ved Ligning 8 beregnede Værdier passe just ikke særlig godt med de observerede. — Bach anstillede de anførte Forsøg efter Anmodning af Leibbrand i Anledning af Konstruktionen af Charniererne i de af denne byggede hvælvede Broer. Som ovenfor i § 49. Bly berørt paatænkte det nemlig at anvende et temmelig stort Tryk pr. Arealenhed (60—120 kg./cm.²) for det Materiale, der indlagdes i Charnierfugen, og det kunde da være et Spørgsmaal, om selve Hvælvingsmaterialet turde paavirktes saa stærkt. Da det store Tryk pr. Arealenhed imidlertid kun skulde virke over højst $\frac{1}{3}$ af Fugebredden, fandtes der efter Bach's Forsøg intet at være i Vejen derfor.

* *Festschrift zum Festscheit des Prof. 1894*, S. 49

2. Trykket virker baade fra oven og fra neden kun paa *2 Del af Prøvestykkets Overflade*. Dette Tilfælde har langt mindre praktisk Betydning, hvorfor vi kun skulle anføre, at rудbelastningen bliver langt mindre end i Tilfældet ovenfor. *Mauschinger* har gjort en Del Forsøg med Sandstens-Tærninger, der trykkedes fra hver Side paa en lille Flade f (Fig. 133, Pl. 14). Af disse Forsøg fremgik dog et ganske mærkeligt Resultat. Naar man nemlig ved andre Trykforsøg bestemte Konstanterne σ_1 og ν i Ligning (7) for det benyttede Materiale, og naar man dernæst beregnede Brudgrænsen efter (7) for et Legeme som det i Fig. 133 indeni Tærningen punkterede, med Grundfladen f og med samme Højde h som den hele Tærning, viste de beregnede Værdier sig at stemme meget nær med de ved Forsøgene fundne. Man skulde paa Forhaand være tilbøjelig til at tro, at det i Beregningen indførte Legeme maatte underkøttes af det omgivende Materiale, idet en Undvigen til Siden lerved hindres, men dette viser sig altsaa ikke at være Tilfældet i nogen nævneværdig Grad; Grunden hertil maa søges i det omgivende Materiales ringe Modstandsevne mod Træk.

§ 52. Bøjning. Det skal ganske kort udvikles, hvorledes Beregningen af en Bjælke, der er paavirket til Bøjning, skal udføres, naar Hooke's Lov ikke gælder. Det forudsættes, at et oprindelig plant Tværsnit vedbliver at være plant. Der lægges to konsekutive Tværsnit i Bjælken (Fig. 54, Pl. 6), og der betragtes et Fiberelement i Afstanden y fra den (foreløbig ubekendte) neutrale Axe. For et saadant findes ganske som i § 24:

$$\epsilon = \frac{\lambda}{dx} = \frac{y}{\rho},$$

hvor y regnes positiv mod den strakte Side, negativ mod den trykkede.

Som tidligere bemærket, ville vi regne med en parabolisk Arbejdslinie og altsaa sætte:

$$\text{for Træk: } \sigma_1 = \alpha\epsilon - \beta_1\epsilon^2,$$

$$\text{for Tryk: } \sigma_2 = \alpha\epsilon + \beta_2\epsilon^2,$$

idet vi gaa ud fra, at Kurverne for σ_1 og σ_2 skulle have fælles Tangent i Begyndelsespunktet, hvorved Koefficienten α bliver

den samme i begge Ligninger; i Udtrykket for σ_2 er ϵ negativ. Naar der for ϵ indføres det ovenfor fundne Udtryk ved y , faas:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \alpha \frac{y}{\rho} - \beta_1 \frac{y^3}{\rho^3}, \\ \sigma_2 &= \alpha \frac{y}{\rho} + \beta_2 \frac{y^3}{\rho^3}.\end{aligned}\tag{a}.$$

Man skal nu opskrive Ligevægtsbetingelserne for de indre Kræfter i et vilkaarligt Snit og de ydre Kræfter paa den ene Side af Snittet. Idet Bjælken antages vandret, de ydre Kræfter lodrette, faar man ved Projektion paa en vandret Linie kun med de indre Kræfter at gøre, og Ligningen bliver:

$$\int_0^{\epsilon_1} \sigma_1 dF + \int_{-\epsilon_2}^0 \sigma_2 dF = 0;$$

naar Værdierne af σ_1 og σ_2 indsættes, faar man:

$$\frac{\alpha}{\rho} \int_{-\epsilon_2}^{+\epsilon_1} y dF - \frac{1}{\rho^3} \left[\beta_1 \int_0^{\epsilon_1} y^3 dF - \beta_2 \int_{-\epsilon_2}^0 y^3 dF \right] = 0. \tag{b}.$$

Ved at tage Momenterne med Hensyn til den neutrale Axe faas, idet de ydre Kræfters Moment sættes lig M :

$$M = \int_0^{\epsilon_1} y \cdot \sigma_1 dF + \int_{-\epsilon_2}^0 y \cdot \sigma_2 dF,$$

eller:

$$M = \frac{\alpha}{\rho} \int_{-\epsilon_2}^{+\epsilon_1} y^2 dF - \frac{1}{\rho^3} \left[\beta_1 \int_0^{\epsilon_1} y^3 dF - \beta_2 \int_{-\epsilon_2}^0 y^3 dF \right]. \tag{c}.$$

Integralerne i første Led i Ligningerne (b) og (c) betyde Tværsnittets statiske Moment og Inertimoment med Hensyn til den neutrale Axe, Integralerne i de sidste Led ere Inertimomenterne og Momenter af 3die Orden af den strakte eller trykkede Del af Tværsnittet. Man kan temmelig let bestemme alle disse Størrelser grafisk, ligesom der kan angives en grafisk Konstruktion af den neutrale Axe for en vilkaarlig Form af Tværsnittet; men vi skulle ikke komme ind herpaa, og i det følgende forudsætte vi Tværsnittet rektangulært, det Tilfælde, der har størst praktisk Betydning. For et Rektangel med Bredden 1, Højden h , bliver Ligning (b) til:

$$\alpha \cdot \frac{1}{2} (e_1^2 - e_2^2) - \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{3} \beta_1 e_1^3 - \frac{1}{3} \beta_2 e_2^3 \right] = 0,$$

Ligning (c):

$$M = \frac{\alpha}{\rho} \left(\frac{1}{3} e_1^3 + \frac{1}{3} e_2^3 \right) - \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{1}{4} \beta_1 e_1^4 + \frac{1}{4} \beta_2 e_2^4 \right].$$

Naar heri indføres:

$$e_1 = \frac{1}{2} h + x, \quad e_2 = \frac{1}{2} h - x, \quad \frac{x}{h} = n,$$

hvor x betegner Afstanden fra Rektanglets Tyngdepunkt til den neutrale Axe, findes:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{h} \cdot \frac{\alpha}{\beta_1 - \beta_2} \cdot N, \quad (d).$$

$$\text{hvor } N = \frac{3n}{\frac{1}{8} + \frac{3}{2} n^2 + (\frac{3}{4} n + n^3) \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2}},$$

og ved Indsættelse heraf i Ligning (b):

$$M = h^2 \cdot \frac{\alpha^2}{\beta_1 - \beta_2} \cdot N \left[\frac{1}{12} + n^2 - N \cdot N_1 \right] = h^2 \cdot \frac{\alpha^2}{\beta_1 - \beta_2} \cdot N_2, \quad (e).$$

$$\text{idet } N_1 = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{16} + \frac{3}{2} n^2 + n^4 \right) \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} + \frac{1}{2} n + 2n^3 \right].$$

Heri ere N , N_1 og N_2 rene Tal, afhængige af n og Materialkonstanterne β ; for et bestemt Materiale kan man altsaa én Gang for alle beregne en Tabel over disse Størrelser for forskellige Værdier af n , og ved dens Hjælp bestemmes strax den neutrale Axes Beliggenhed af Ligning (e), naar man kender M og h . Den neutrale Axe varierer altsaa med Størrelsen af

Momentet. Naar n nu er bekendt, findes $\frac{1}{\rho}$ ved Ligning (d)

og dernæst Spændingen i et vilkaarligt Punkt ved (a).

Som Exempel paa Anvendelsen af den udviklede Beregning ville vi tage den allerede i § 35 omtalte Granitbjælke, for hvilken Föppl har anstillet Undersøgelser. Som i § 35 bemærket maalte Föppl de ved Bøjningen forårsagede Længdevariationer af Fibrene mellem to bestemte Tværsnit, og idet han ved specielle Elasticitetsmaalinger bestemte Arbejdslinierne baade

for Træk og Tryk, kunde han altsaa angive de i forskellige Punkter af Tværsnittet optrædende Spændinger.

For denne Granit kan regnes *) (i kg. cm.², gældende mellem $+ 46,7$ og $\div 66,7$ kg./cm.²):

$$\alpha = 10^5 \cdot 4,6, \quad \beta_1 = 10^3, \quad \beta_2 = 10^3 \cdot 4,5,$$

hvorefter følgende Tabel er beregnet.

n	N	N_1	N_2
0,01	0,207	0,0426	0,0154
0,02	0,363	0,0441	0,0246
0,03	0,484	0,0459	0,0300
0,04	0,580	0,0478	0,0332
0,05	0,658	0,0500	0,0348

For den betragtede Bjælke var $b = 20^{\text{cm.}}$, $h = 30^{\text{cm.}}$. I det Punkt, hvor Spændingerne maalttes, var Momentet $2,41^{\text{tm.}}$, altsaa for $1^{\text{cm.}}$ Bredde: $M = 12050$ kg. cm. Idet endvidere

$\alpha^4 = 385$, findes af Ligning (e) ovenfor:

$$N_2 = \frac{12050}{30^2 \cdot 385} = 0,0348,$$

*) Naar man efter de observerede sammenhørende Værdier af ε og σ (*Mittheilungen aus dem mech.-techn. Laboratorium, München, Heft 24. Tab. 25*) beregner α_1 og β_1 for Træk og ligeledes α_2 og β_2 for Tryk hver for sig ved de mindste Kvadraters Methode, findes:

$$\alpha_1 = 10^5 \cdot 4,49, \quad \beta_1 = 10^3 \cdot 8,97 \quad \text{og} \quad \alpha_2 = 10^5 \cdot 4,61, \quad \beta_2 = 10^3 \cdot 4,61.$$

For at give et Begreb om den Grad af Nøjagtighed, der opnaas ved Anvendelse af en Parabel som Arbejdslinie, skal anføres de for samme ε beregnede og observerede σ_1 (Trækspændinger):

$$\begin{array}{l} \text{observeret: } 6,7, \quad 13,3, \quad 20,0, \quad 26,7, \quad 33,3, \quad 40,0, \quad 46,7, \\ \text{beregnet: } \quad 6,1, \quad 12,7, \quad 19,1, \quad 27,0, \quad 34,3, \quad 40,5, \quad 46,0. \end{array}$$

Naar man imidlertid stiller det Forlangende, at $\alpha_1 = \alpha_2$, faar man meget nær de ovenfor angivne afrundede Værdier. — Man vilde naturligvis faa bedre Overensstemmelse mellem Beregning og Forsøg, hvis man regnede med de angivne forskellige Værdier af α_1 og α_2 , hvilket lige saa let lader sig gøre.

af Tabellen ses, at hertil svarer $n = 0,05$; den neutrale Ase ligger altsaa $1,5^{\text{cm}}$ fra Midten (hen mod den trykkede Del af Tværnittet), medens Föppl ved sine Maalinger fandt $0,9^{\text{cm}}$. Den til $n = 0,05$ svarende Værdi af N tages af Tabellen, og herved findes:

$$\frac{\alpha}{\rho} = 8,42, \quad \frac{\beta_1}{\rho^2} = 0,335, \quad \frac{\beta_2}{\rho^2} = 0,151,$$

hvorefter Spændingerne i de forskellige Punkter kunne beregnes ved (a). Resultaterne af denne Beregning for de yderste Punkter af Tværnittet og for Punkterne 1, 3, 5, 7 (Fig. 134, Pl. 15) og Föppls Resultater for de samme Punkter ere:

	σ_{e_1}	σ_1	σ_3	σ_5	σ_7	σ_{e_2}
beregnet:	(47,7)	50,0	39,2	— 25,2	— 81,7	— 86,2,
Föppl:	(77,3)		33,2	— 27,7	— 84,1	— 90,4.

Spændingerne ere afsatte som Ordinatorer i Fig. 134; den fuldt optrukne Linie svarer til Föppls Værdier, den punkterede til de beregnede.

Overensstemmelsen er for Trykspændingernes og de mindre Trækspændingers Vedkommende meget tilfredsstillende; for Trækspændingen i det yderste Punkt af Tværnittet passer det derimod slet ikke. Dette kan dog heller ikke forlanges, og det kunde man vide i Forvejen; thi ved Træk-Elasticitetsmaalingerne, hvorefter den anvendte Parabel er beregnet, er man kun naaet op til en Spænding paa $46,7$ kg. (se Noten), saa man har naturligvis heller ikke Lov til at anvende den herefter bestemte Parabel for højere Spændinger; dette ses tydeligt deraf, at Parablen har sit Toppunkt ved $\sigma = 53$ kg. Tallet $\sigma_{e_1} = 77,3$ kg., som Föppl angiver, er af samme Grund heller ikke paalideligt; det er fundet ved en Sandsynlighedsberegning, angaaende hvilken henvises til Föppls Meddelelser. Endelig erindres om, at Tværnittet, som i § 35 (Fig. 100, Pl. 11) omtalt, ikke holder sig nøjagtig plant, og at Afvigelsen navnlig er betydelig for de yderste Fibre paa Træk-siden; en Beregning, der forudsætter plant Tværnit, kan derfor aldrig ventes at ville stemme nøjagtigt; ved det Skøn, der fører Föppl til at antage $\sigma_{e_1} = 77,3$ kg., er der derimod taget Hensyn til den virkelig maalte Forlængelse. — Den angivne

Beregningsmethode er sikkert ret paalidelig, naar man holder sig indenfor det Spændingsomraade, for hvilket de anførte paraboliske Arbejdslinier overhovedet have Gyldighed. Dette viser sig ogsaa, naar man gennemfører Beregningen for den Sandstensbjælke, som Föppl ligeledes undersøgte. For dette Materiale haves (gældende mellem $+10$ og $\div 15$ kg./cm.²):

$$\alpha = 10^5 \cdot 0,9, \quad \beta_1 = 10^8 \cdot 1,74, \quad \beta_2 = 10^8 \cdot 1,35;$$

endvidere var $h = 30^{\text{cm}}$, $M = 1800$ kg. cm. pr. 1^{cm} . Bredde. Resultaterne ere:

	σ_{e_1}	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7	σ_{e_2}
beregnet:	10,6	10,2	7,9	4,6	0,3	— 4,3	— 8,0	— 11,0	— 11,5,
Föppl:	10,1		7,5	5,0	1,0	— 4,1	— 8,0	— 10,6	— 11,1.

Beregningen er naturligvis kun anført som Exempel paa, hvorledes man skal tage fat paa en saadan Opgave, hvor det gælder at undersøge Overensstemmelsen mellem Theori og Experiment, og for at antyde, hvorledes man en Gang i Fremtiden kan komme til at regne, naar man har faaet bestemt nogle tilstrækkelig paalidelige Værdier af Materialkonstanterne til en Gang for alle at beregne Tabeller. For ren Bøjning faar Beregningen næppe nogensinde synderlig Betydning, da de her omhandlede Materialer ikke egne sig og derfor kun sjældent bruges til at modstaa en saadan Paavirkning; derimod vilde det have betydelig — ogsaa praktisk — Interesse, om man kunde naa saa vidt i Kendskab til Materialkonstanterne, at man kunde beregne Tabeller for Behandlingen af en Kombination af Tryk og Bøjning, saaledes som man har det i Hvælvinger. For et specielt Tilfælde heraf — naar der ingen Trækspændinger optræder — skulle vi senere se, at det meget let lader sig gøre, men i det almindelige Tilfælde af excentrisk Tryk bliver Metoden for kompliceret, saa længe Materialkonstanterne ikke ere bedre kendte end nu.

§ 54. Støbjern. Anvendelsen af dette Materiale er meget stærkt i den sidste Snes Aar og er nu i Hovedsagen begrænset til enkelte Konstruktionsdele, der kun skulle modstaa Tryk, og som overhovedet ingen Rolle spille som Bærende Element. I den Tid som har gaaet af komplicerede

former er af Vigtighed. Der anvendes nu ofte Støbestaal, hvor Støbejærnet tidligere var eneherkende.

Styrken overfor de forskellige Slags Paavirkninger afhænger i høj Grad af den kemiske Sammensætning, navnlig af Indholdet af Silicium, fordi dette har særlig stor Indflydelse paa, om det tilstedeværende Kulstof skal optræde som Grafit eller kemisk bundet. Vi skulle ikke komme nærmere ind herpaa, men forudsætte i det følgende den almindeligt til Konstruktionsejemed (Søjler, Maskingods, Rør o. l.) anvendte Kvalitet, af hvilken man sædvanligvis forlanger, at »Jærnet skal være blødt (graat), saa at et Hammerslag mod en retvinklet Kant af det støbte Stykke frembringer et Indtryk, uden at Kanten springer af« *).

Træk og Tryk. Brudgrænsen for Træk (B_t) varierer mellem 1000 og 2500 og foreskrives*) gerne at skulle være mindst 1200 kg./cm.² for et afdrejet Prøvestykke (uden Støbeskal). Brudgrænsen for Tryk (B_c) kan antages at variere mellem 4000 og 14000 kg./cm.² som yderste Grænser, som Middelværdi kan regnes 6—8000. *Tetmajer***) angiver følgende Middelværdier (kg./cm.²):

	B_t	B_c
mørkegraat, grovkornet Støbejærn	1000	5000,
graat	1400	6500,
lysegraat, finkornet	1600	8000,

hvorefter Forholdet $B_t : B_c$ almindelig kan regnes til $\frac{1}{5}$. Naar man har Brug for en Værdi af Elasticitetskoefficienten, kan som Middelværdi regnes 1000000 kg./cm.², men forøvrigt er den, som bekendt, ikke konstant.

I Fig. 135, Pl. 15, er vist Arbejdslinier for Træk og Tryk efter Maalinger af *Bach****); ingen af Maalingerne er fortsat til Brud. Man ser, at Arbejdslinien navnlig for Træk, men ogsaa for Tryk, krummer sig lige fra Begyndelsespunktet; derimod ser det ikke ud, som om Træk- og Tryk-Arbejdslinierne havde fælles Tangent i Begyndelsespunktet, hvilket dog sandsynligvis hidrører fra, at de to Slags Maalinger ikke ere foretagne paa det samme

*) *Vorschriften für Lieferungen von Eisen und Stahl*, aufgestellt vom Verein deutscher Eisenhüttenleute, Düsseldorf 1893.

**) *Die Baumechanik*, Zürich, 1889, S. 82.

***) *Zeitschr. d. Vereins deutscher Ingenieure*, 1897, S. 241.

Prøvestykke. *Bach* har senere offentliggjort*) nogle Resultater, der netop ere fundne ved samme Prøvestykke, og her ere Tangenterne i Begyndelsespunktet temmelig nær ved at falde sammen. Beregner man Konstanterne i den parabolske Arbejds-linies Ligning efter disse nyeste Maalinger, faas:

$$\text{for Træk: } \sigma = 10^3 (9,348 \varepsilon - 2714,5 \varepsilon^2),$$

$$\text{- Tryk: } \sigma = 10^3 (9,033 \varepsilon - 418,4 \varepsilon^2),$$

hvorefter man for denne Støbejernsprøve nøjagtigt nok kan sætte:

$$\text{for Træk: } \sigma = 10^3 (9,2 \varepsilon - 2370 \varepsilon^2),$$

$$\text{- Tryk: } \sigma = 10^3 (9,2 \varepsilon - 530 \varepsilon^2),$$

gældende mellem Spændingerne $+409$ og -1432 kg./cm.².

Hvorvidt disse Tal kunne anvendes for Støbejern i Almindelighed, maa afgøres ved langt flere Forsøg.

Af de omtalte Maalinger vil man ogsaa se, at Elasticitetsgrænsen oprindelig laa omtrent nede ved Nul, men allerede ved første Paavirkning hævedes betydeligt; de blivende Forlængelser vare nemlig (angivne i $\frac{1}{600}$ cm., for en Maalelængde af 50 cm.):

svarende til Spændingerne (kg./cm.²):

	20	102	204	306	409
ved 1ste Forsøg	0,00	0,105	0,565	1,385	2,820.
- 2det -	0,00	0,01	0,02	0,035	0,10

Bøjning. I Fig. 136, Pl. 15, er vist Arbejdslinien for en Bjælke af Støbejern med rektangulært Tværsnit, 30×90 mm., og 1,0 m Fritliggende, belastet med en Enkeltkraft paa Midten: Nedbøjningerne i Midtpunktet ere afsatte som Abscisser, Belastningen som Ordinater**). Man ser her maaske endnu tydeligere end af Fig. 135, at Hooke's Lov ikke gælder. Som Resultat af Bøjningsforsøg angives forøvrigt her, ligesom for

*) *Zeitschr. d. Vereins deutscher Ingenieure*, 1898, S. 35. *Bach* (Schüle) angiver følgende Ligninger for Arbejdslinierne:

$$\text{for Træk: } \varepsilon = \frac{1}{1\,338\,000} \cdot \sigma^{1,063},$$

$$\text{for Tryk: } \varepsilon = \frac{1}{1217000} \cdot \sigma^{1,058}.$$

**) Maalt af *Bach*, *Zeitschr. d. Vereins deutscher Ing.*, 1888, S. 193, o. f.

medeligt Jærn, en *Brudmodulus*, B_b , (Spændingen, beregnet efter Formlen $\sigma = \frac{Me}{I}$), og den maa naturligvis ogsaa her være afhængig af Tværsnitsformen. Grunden til, at Brudmodulus for Bøjning ikke er den samme som Brudgrænsen for Træk, maa navnlig søges i, at Arbejdslinien krummer sig, saa at de i Nærheden af den neutrale Axe liggende Fibre faa større Spændinger og altsaa blive bedre udnyttede, end hvis Hooke's Lov gjaldt. Man kan derfor paa Forhaand slutte, at Brudmodulus maa være størst for saadanne Tværnit som en Cirkel, et Kvadrat, der bøjer sig ned i Diagonalretningen o. l., fordi her findes forholdsvis flest Fibre, der blive bedre udnyttede, end Formlen $M = \sigma \cdot W$ lader formode, og at den maa være mindst for I-formede Tværnit o. l. Man kunde være tilbøjelig til at slutte, at ogsaa Haardheden maatte have en kendelig Indflydelse paa Størrelsen af Brudmodulus ligesom for smedeligt Jærn, men dette synes dog ikke at være Tilfældet. *Bach* *) finder saaledes for cirkulært Tværnit:

for alm. blødt Støbejærn, med $B_t = 1369 \text{ kg./cm.}^2$: $B_b : B_t = 2,12$,
 — haardt — — — $B_t = 1848$ — : $B_b : B_t = 2,24$.

Det maa ogsaa erindres, at selv for meget blødt Støbejærn er der ikke Tale om en saadan Deformation af Tværnittet, førend Brud indtræder, som for blødt smedeligt Jærn.

Efter talrige Forsøg af *Bach* **), *Considère* ***) og forskellige andre †) kan Forholdet $B_b : B_t$ for bearbejdet Støbejærn (d. v. s. uden Støbeskal) regnes til:

for cirkulært eller H -formet Tværnit
 eller et Kvadrat med en Diagonal i
 Kraftplanen 2,1—2,3, mindst 2,0,
 for rektangulært eller kvadratisk Tvær-
 nit 1,7—1,8, — 1,7,
 for symmetr. eller usymmetr. I-formet
 eller for $\perp$ -formet Tværnit . . . 1,4—1,6, — 1,4,

*) *Elasticität und Festigkeit*, 2te Aufl., 1894. S. 111—12.

**) *Zeitschr. d. Vereins deutsch. Ing.*, 1888 og 89, refereret i *Elasticität und Festigkeit*, 1894, S. 110—15.

***) *Annales des ponts et chaussées*, 1885, I, S. 667—74.

†) *Lanza: Applied mechanics*, 7th. ed., New-York, 1896, S. 384.

Naar derimod *Støbeskallen findes paa Prøvestykket*, faar man langt mindre Resultater; for de tre Grupper, hvori Tværsnitsformerne ovenfor ere inddelte, kan da regnes:

$$1,84, \quad 1,4-1,6, \quad 1,1-1,3.$$

Til disse Tal maa man tage Hensyn ved Fastsættelsen af den tilladelige Fiberpaavirkning, som vi skulle se nedenfor. — Som Leveringsbetingelse for Støbejern foreskrives ofte en Minimumsværdi af B_b ; saaledes forlanges det i de tyske Normalbetingelser for Levering af Jærnkonstruktioner, »at en ubearbejdet Stang med kvadratisk Tværnsnit, $30^{m.m.}$ Sidelinie, hvilende paa to Understøtninger i $1,0^{m.}$ Afstand, skal kunne taale en Belastning paa Midten, der voxer jævnt op til 450 kg. uden at brydes«. Der forlanges altsaa en Brudmodulus:

$$B_b = \frac{M}{W} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 450 \cdot 100}{\frac{1}{6} \cdot 3^3} = 2500 \text{ kg./cm.}^2.$$

For kvadratisk Tværnsnit og med Støbeskallen siddende paa kan man gennemsnitlig regne $B_b : B_t = 1,5$, saa den nævnte Fordring svarer i Virkeligheden til

$$B_t = \frac{2500}{1,5} = 1666 \text{ kg./cm.}^2,$$

medens de samme Betingelser kun foreskrive en direkte Træk-Brudgrænse af 1200 kg./cm.². Man bør aabenbart enten forlange en Træk-Brudgrænse af ca. 1600 kg./cm.², eller at den nævnte Stang kun skal kunne taale en Belastning af $\frac{1200}{1666} \cdot 450 = 325$ kg. til Bøjning.

Forskydning. Der er ikke foretaget ret mange Forsøg til Bestemmelse af Støbejerns Modstandsevne mod denne Paavirkning. *Tetmajer* angiver *), at Forholdet mellem Brudbelastningen til Forskydning, B_f , og til Træk, B_t , kan regnes til $\frac{2}{3}$, men efter Forsøg af *Bach* **) synes det at være sikkert at regne $B_f : B_t = 1$.

Vridning. *Bauschinger* og *Bach* ***) have udført en hel Del Vridningsforsøg med forskellige Former af Tværnsnittet.

*) *Die Baumechanik*, Zürich, 1889, S. 187.

**) *Elasticität und Festigkeit*, 2te Aufl., 1894, S. 222—24.

***) *ibid.*, S. 178 o. f.

Vi skulle kun anføre følgende Resultater (B_v betegner Brudmodulus for Vridning, beregnet ved de under Forudsætning af Hooke's Lov udledede Formler):

Cirkulært Tværsnit . . .	$B_v : B_t = 1,02,$
Cirkelring	— = 0,82—0,86,
Ellipse	— = 1,0 —1,25,
Ellipsering	— = 0,8 —1,0,
Rektangel	— = 1,4 —1,6.

I- og L-formede Tværsnit (med Højde h , Bredde af Flangerne b og Tykkelse af Krop eller Flanger δ) have omtrent samme Modstandsevne mod Vridning som et Rektangel med Siderne δ og $[h + 2(b - \delta)]$.

Støbeskallen formindsker ogsaa Styrken overfor Vridning.

Af *Varighedsforsøg* med Støbejern er der ikke udført ret mange, saa man har ikke stor Erfaring angaaende Modstandsevnen mod ofte gentagne Paavirkninger. Her skal dog nævnes nogle Forsøg af *Bauschinger* *) og i *Watertown Arsenal* **).

Bauschinger lod Paavirkningen variere dels mellem Nul og en højere Grænse (Træk), dels mellem lige store Træk og Tryk (Bøjning). Hvis man overhovedet tør udlede noget bestemt Resultat af Forsøgene, maa det blive, at *Udsvingsstyrken* (U) er omtrent halv saa stor som *Ligevægtstyrken* (L), *Svingningsstyrken* (S) omtrent en Trediedel af denne.

Ved Forsøg til Bestemmelse af U (med Rundstænger, for hvilke $L = 2260$ kg./cm.²) indtraadte Brud altid efter flere eller færre Gentagelser, naar største Paavirkning var > 1150 kg./cm.². En Stang taalte ca. 12800000 Variationer mellem 0 og 1150 kg. uden at brydes, hvorefter der ved roligt Træk fandtes $L > 2410$ kg./cm.², saa Styrken er i alt Fald ikke aftaget ved de mange Paavirkninger; der er følgelig lige saa lidt her som for smedeligt Jærn Tale om nogen »Udmattelse« af Materialet. Efter ca. 7400000 Variationer fandtes »Elasticitetsgrænsen« hævet op til 790 kg./cm.², efter de 12800000 Variationer til 1080 kg./cm.²; der er derfor den største Sandsynlighed for, at Paavirkninger paa ca. 1100 kg./cm.² kunde have været taalte i det uendelige. — Paa den anden Side maa man være meget

*) *Mittheilungen*, Heft 25, S. 18, udgivet af Föppl efter Bauschingers Død.

**) *Report of tests at Watertown Arsenal*, 1889—92.

forsigtig med at benytte saadanne Angivelser, hvilket tilstrækkelig tydeligt fremgaar af Forsøgene med en anden Stang af samme Materiale; den brødes nemlig allerede efter 980000 Variationer mellem 0 og 863 kg. paa Grund af en Fejl i Støbningen. Overhovedet fandtes ved alle de Stænger, der brødes under Forsøgene, Fejl i Brudfladerne, ogsaa rigtignok ved den ovenfor omtalte Stang, der tilsidst blev prøvet med roligt Træk. — At »Elasticitetsgrænsen«, som ovenfor omtalt, hævedes ved de varierende Paavirkninger, fandtes ogsaa i andre Tilfælde; saaledes for en Stang af en anden Støbning ($L = \text{ca. } 2000 \text{ kg./cm.}^2$) var den efter 5400000 Variationer mellem 0 og 840 kg./cm.² hævet op til 646 kg./cm.²; denne Stang taalte ca. 13000000 Variationer uden at brydes, hvorefter Forsøget indstilledes. Men for enkelte af Stængerne kunde der ikke paavises nogen »Elasticitetsgrænse« *).

Ved Forsøgene til Bestemmelse af Svingningsstyrken — med et Materiale, for hvilket $L = 2260 \text{ kg./cm.}^2$ — indtraadte Brud altid, naar Paavirkningen var $> \pm 900 \text{ kg./cm.}^2$. Der prøvedes to Stænger netop med Variationer mellem $\pm 900 \text{ kg.}$, og de taalte 8—9000000 Svingninger uden at brydes, hvorefter Forsøgene indstilledes. Elasticitetsmaalinger foretoges ikke her.

Ved Forsøgene i Watertown anvendtes et Materiale, for hvilket $L = 2200 \text{ kg./cm.}^2$; Paavirkningerne skiftede mellem lige store positive og negative Værdier (Bøjning). To Stænger, for hvilke Paavirkningen svingede mellem $+1750$ og -1400 kg./cm.^2 , brødes efter 4700 og 26400 Omdrejninger, en 3die, som paavirkedes med $+700 \text{ kg./cm.}^2$, brødes ikke ved ca. 20000000 Omdrejninger, hvorefter den prøvedes med roligt Træk; der fandtes den oprindelige Brudgrænse. Endelig

*) Formodentlig mener Bauschinger dog, som han plejer, »Proportionalitetsgrænse« overalt, hvor der her er skrevet Elasticitetsgrænse. Ifølge Bauschingers sædvanlige Sprogbrug kan man gaa ud fra, at hvor han angiver en »Elasticitetsgrænse«, dér er der indenfor den ikke optraadt blivende Formforandringer af nogen Betydning, og tillige er der Proportionalitet; og hvor han angiver, at der ingen »Elasticitetsgrænse« findes, kan man gaa ud fra, at der ikke har været Proportionalitet mellem Spændinger og Formforandringer, men derimod ikke fra, at der er optraadt blivende Formforandringer. Det er derfor det sandsynligste, at der fandtes en Elasticitetsgrænse (indenfor hvilken ingen blivende Formforandringer optraadte) ogsaa for de Stænger, hvor Bauschinger ikke har fundet den.

arbejdedes der med en 4de Stang, der paavirkedes med $\approx 1050 \text{ kg./cm.}^2$, og den brødes efter 47283500 Omdrejninger. Svingsstyrken ligger altsaa formodentlig ved 8—900 kg./cm.^2 .

Endelig skal det lige nævnes, at *Outerbridge* har paavist, at hyppigt gentagne Stød, Slag eller Rystelser (f. Ex. Rysten i en Tromle) forøger Styrken*). Af 83 Forsøg viste 10 en Afagen, Resten en Tiltagen (af indtil 40 %) i Brudbelastningen (Bøjning); ogsaa Nedbøjningen voxede (indtil 55 %) og dermed Evnen til at modstaa Stød. *Harrison* fandt, at Bøjningsforsøg ganske vist næsten altid viste en Tilvæxt, men direkte Trækforsøg lige saa ofte en Afagen i Styrke. Dette vil *Outerbridge* forklare derved, at de Stykker, der skulle sammenlignes, udstøbes efter hinanden, hvorved Udstøbningstemperaturen bliver forskellig, og det varmest støbte er altid stærkest. Sagen trænger dog aabenbart endnu til nærmere Undersøgelse.

Tilladelig Paavirkning. Man indfører altid en større Sikkerhedskoefficient her end for smedeligt Jærn, navnlig fordi Støbejærn er et langt mindre paalideligt Materiale. Der findes meget ofte *Støbefejl*, utætte Steder, hele Luftblærer o. s. v., og ligeledes *Støbespændinger*, hidrørende fra uensformig Afkøling. Overfor Stød er Støbejærn overmaade lidt modstandsdygtigt; man ser i Fig. 135 og 136, at Formforandringerne ere meget smaa Størrelser. Sikkerhedskoefficienten kan for permanente Konstruktioner sættes til 6—10, eftersom Konstruktionen er mere eller mindre udsat for Rystelser.

Der tillades almindeligt:

overfor direkte Træk	150 kg./cm.^2
— — Tryk	600—900 —
— Træk i bøjede Konstruktionsdele .	200—300 —

Overfor sidstnævnte Paavirkningsmaade bør man tage Hensyn til Tværsnitsformen og altsaa regne:

for cirkulært Tværnit	$1,84 \cdot 150 = \text{ca. } 275 \text{ kg./cm.}^2$
- rektangulært —	$1,5 \cdot 150 = - 225 -$
- I o. I. —	$1,2 \cdot 150 = - 180 -$,

idet Støbeskallen i Almindelighed faar Lov at blive.

*) Se *Baumaterialienkunde*, Aarg. II., S. 181.

Overfor Vridning kan man paa lignende Maade tage Hensyn til de meddelte Forsøgsresultater.

Forøvrigt undgaar man saa vidt muligt at anvende Støbejern, hvor det skulde paavirkes til direkte Træk, og helst ogsaa, hvor det skulde modstaa Bøjning.

*Berlins Byggepoliti**) tillader 250 kg./cm.² for Træk, og kun 500 kg./cm.² for Tryk.

*De franske officielle Forskrifter***) af Aug. 1891 tillade 150 kg./cm.² for Træk, 250 kg. til Bøjning, 600 kg. for Tryk.

Ved hammerbart Støbejern ere det almindelige Støbejerns værste Fejl — den ringe Modstandsevne mod Træk og mod Stød — til Dels ophævede, men Produktet er dog saa uens. at man ikke kan stole derpaa uden specielle Undersøgelser: hvert enkelt Tilfælde. Som Exempel paa hvad der kan opnaas, skal anføres nogle Undersøgelser af *Stanford****). For en Række paa 42 Enkeltforsøg fandt han:

	Middeltal.	Max.	Min.
Brudgrænse (Træk) . . .	3500	4800	2700 kg./cm. ²
Forlængelse (pr. 5 ^{cm}) . .	6,6	10,3	2,8 %
Kontraktion	6,2	9,8	1,3 %.

Andre Forsøgsrækker gav lignende Resultater. Naar Støbeskallen borttoges, fandtes baade mindre Styrke og Sejghed. — Ikke nær saa gunstige ere følgende Resultater †) (Middeltal af 10 Prøver):

forzinket: Brudgr. 2250 kg./cm.², Forlængelse (pr. 20^{cm}) 0,54 %
 uforzinket: — 2330 — , — — 0,76 %.

§ 54. Naturlige Sten, brændte Sten. Disse Materialer anvendes navnlig overfor Tryk, temmelig ofte dog ogsaa overfor den Art af Bøjning, der hidrører fra excentrisk Tryk. Det har derfor praktisk Betydning at faa nærmere Oplysninger

*) Foreskrevet 1887 (for Bach's Forsøg). Se *Des Ingenieurs Taschenbuch (Hütte)*, 1892, I, S. 310.

**) Citeret i § 48.

***) *Trans. Am. S. C. E.*, 1895, II S. 1 (Paper Nr. 754). Ogsaa refereret af *J. B. Johnson (Materials of construction, S. 115)*.

†) *Mittheilungen aus den kgl. techn. Versuchsanstalten zu Berlin*, 1892, S. 68

ikke blot om deres Styrke, men ogsaa om deres Elasticitetsforhold.

1. *Naturlige Sten.* I § 52 er allerede nævnt de Værdier af Konstanterne for en parabolisk Form af Arbejdslinien, der afledes af Föppl's Maalinger for en Granit og en Sandsten.

Fig. 137, Pl. 16, er afsat nogle Arbejdslinier for *Granit* (kun de *elastiske* Formforandringer); den fuldt optrukne er givet af Föppl, — det er den, der er regnet med i § 52, — Træk- og Trykmaalingerne ere her udførte paa samme Prøvestykke, Træk- og Tryk-Kurverne synes at gaa kontinuerligt over i hinanden. De punkterede Kurver i Fig. 137 ere maalte af *Bach* og paa forskellige Prøvestykker; man ser, at de afvige overordentlig meget fra Föppl's. I Fig. 138, Pl. 16, er afsat den maalte Arbejdslinie for den *Sandsten* (Föppl), hvormed der er regnet i § 52; det er ligeledes her kun de *elastiske* Formforandringer, der ere viste i Figuren. For *Marmor* har *Bach**) fundet en fra de i Fig. 137 og 138 viste afvigende Form af Arbejdslinien for Tryk, idet den vender Konkaviteten mod σ -Aksen, hvorimod Arbejdslinien for Træk vender Konkaviteten mod ε -Aksen; hele Kurven minder om én kontinuerlig Parabel. For dette Materiale kan den Schüle'ske Form af Arbejdslinien derfor absolut ikke anvendes.

Lignende Elasticitetsmaalinger, hvor Prøvestykket først ved gentagne Paavirkninger bragtes i en i alt Fald tilnærmelsesvis »konstant Tilstand«, ere udførte af *Beare***), dog kun for Tryk. Medens *Bach's* og *Föppl's* Maalinger holde sig til de temmelig smaa Spændinger, man har mest Brug for i Praxis, begynder *Beare's* først med betydelig større Spændinger; den væsentligste Oplysning, man faar af disse Experimenter, er derfor, at Arbejdslinien vedbliver at være en svagt krummet Kurve helt eller omtrent op til Brudgrænsen. Dette stemmer meget godt med *Bauschinger's****) Resultater for Tryk — hvor forøvrigt den »konstante Tilstand« ikke var tilvejebragt; — derimod fandt *Bauschinger* som Regel, at Træk-Arbejdslinien for Granit og Sandsten krummede sig temmelig stærkt, hvorimod den for Kalksten var omtrent retlinet, helt op til Bruddet indtraadte. Baade

*) *Elasticität und Festigkeit*, 3te Aufl., 1898, S. 60 o. f.

**) *Min. of Proc. Inst. C. E.* Vol. CVII, S. 341 (1891—92).

**) *Mittheilungen*, Heft 10 og 18.

Beare og *Bauschinger* fandt ofte et Vendepunkt i Tryk-Arbejds-linien. Forøvrigt ere Resultaterne af disse Elasticitetsmaalinger overordentlig variable.

Det samme gælder i mindst lige saa høj Grad *Styrken* overfor de forskellige Slags Paavirkninger. Man kunde være fristet til at antage, at der maatte bestaa et nogenlunde konstant Forhold mellem Brudgrænserne for Træk, Tryk, Forskydning og Bøjning (B_t , B_c , B_f og B_b), men det er temmelig langt fra at være Tilfældet. Da der i Almindelighed kun anstilles Trykforsøg, og det dog kan have Betydning herved at kunne faa et Begreb, selv om det kun bliver meget ubestemt, om *Styrken* overfor de andre Paavirkninger, skal her anføres, hvad der i saa Henseende kan udledes af *Bauschingers**) Forsøg.

	$B_t : B_c$	$B_f : B_c$	$B_b : B_c$
<i>Granit</i> , af 6—7 Forsøg fandtes:			
som Middeltal	0,029	0,071	0,096
- Maximum	0,035	0,097	0,167
- Minimum	0,022	0,034	0,062
<i>Kalksten</i> , 6—10 Forsøg:			
som Middeltal	0,054	0,084	0,130
- Maximum	0,072	0,132	0,264
- Minimum	0,040	0,053	0,071
<i>Sandsten</i> , 15—16 Forsøg:			
som Middeltal	0,031	0,072	0,069
- Maximum	0,053	0,120	0,118
- Minimum	0,014	0,048	0,033

Af denne Oversigt fremgaar det temmelig tydeligt, at man ikke godt kan tale om noget konstant Forhold overfor de

*) *Mittheilungen*, Heft 4 og 10. Der er i Almindelighed kun benyttet Tallene for de Materialer, der have været undersøgte for alle fire Slags Paavirkninger. Lignende Resultater faas med de i Heft 18 meddelte Forsøg.

orskellige Slags Paavirkninger*); men det maa dog bemærkes, at det er højst forskellige Arter af Granit o. s. v., der her ere ammenstillede, og ligeledes, at der ikke er taget Hensyn til Lagdelingens forskellige Stilling i Forhold til Kraftretningen; let viste sig nemlig, at de herfra hidrørende Differenser ikke vare større end de fra andre Aarsager stammende. Hvis det derimod gjaldt om at sammenligne Sten fra samme Brud, kunde man naturligvis ikke se bort herfra. — For at give et Begreb om Styrkeforholdene i Almindelighed anføres følgende Resultater**) (Tallene angive Brudgrænsen for Tryk i kg./cm.²):

	Antal Arter prøvet	Middel- tal	Min.	Max.
Granit	59	1834	1103	2576
Porfyr	28	2120	1301	2583
Basalt	19	3111	1664	4442
Kalksten	24	1000	235	1826
Sandsten	48	761	357	2063

Vi skulle nu anføre nogle mere detaillerede Forsøgsresultater for saadanne Stenarter, som der kan være Tale om at anvende her til Lands.

Følgende Tal***) give Tryk-Brudgrænsen i kg./cm.² for *Granit* fra skandinaviske Brud. Tallene ere Middeltal, Maximum og Minimum af 10 Forsøg og gælde for lufttørret Tilstand; i vandmættet Tilstand er Brudgrænsen højst 150—200 kg./cm.² lavere.

*) Det synes derfor temmelig uberettiget, naar »Hütte« (1892, I, S. 308) og ligeledes *L. Debo* (*Die Festigkeit der Baumaterialien* etc., Hannover 1891) angiver følgende »Tilnærmelse«;

$$B_f : B_c = \frac{1}{28}, B_f : B_c = \frac{1}{18}, B_b : B_c = \frac{1}{8}.$$

**) Fundne ved Materialprøveanstalten i Berlin; *Tekn. Forenings Tidsskr.* 1892—93, S. 51. Lignende Forsøgsrækker foretagne af *Bauschinger* og *Beare* findes paa de ovenfor citerede Steder, af *Tetmajer* i hans *Mittheilungen*, Heft 1.

***) Se *Tekn. Forenings Tidsskr.*, 1892—93, S. 52.

	Farve	Middel- tal	Max.	Min.
<i>Granit fra Hammeren paa Born-</i> <i>holm</i>	brunlig-rød	2470	2763	2234
- - Lysekil-Eggen, Sverrig	rødlig-brun	1951	2074	1739
- - Halmstad, -	brun-graa	2016	2319	1851
- - Carlskrona, -	graa	2014	2141	1918
- - Drammen, Norge	graa	1938	2141	1806
- - Frederiksstad, -	brun-graa	1774	1907	1673
- - Wilhelmsberg ved Drammensfjord, -		1249	1395	1132

Efterfølgende Tal*) give Oplysninger om nogle danske
Kalksten:

	Middel- tal	Max.	Min.
<i>Faxe</i> kalk, Koralsten, til udv. Bygningsarbejde	367	519	249
- - til slebet og poleret Ar- bejde	687	1023	336
- - til Trappesten, Dæksten o. l.	841	1082	716
<i>Kridtsten</i> (Limsten) fra Stevns	33,7**) — c. 73,0***)		

I efterfølgende Tabel meddeles Resultaterne af en Del
Forsøg med forskellige Stenarter, anstillede under Bygningen
af Kjøbenhavns Frihavn†); Tallene angive Tryk-Brudgrænsen
i kg./cm.².

*) Se Tekn. Forenings Tidsskr. 1892—93, S. 52.

**) Angivet af Toussieng (Tekn. Forenings Tidsskr., 1882—83, S. 139).

***) Angivet af Ing. N. P. Nielsen (Tekn. Forenings Tidsskr., 1892—93, S. 55).

†) Velvilligst meddelte af Havnebygmester H. C. V. Møller. Forsøgene
anstillede af Ing. N. P. Nielsen, med Klæberstenen dog af Steins Labo-
ratorium.

	Antal Forsøg	Middel- tal	Max.	Min.
Granit fra Mölle	4	1053	1674	661
Ølandsten (Kalksten) fra Borgholm	6	673	1139	452
- - - Grönhögen	9	658	1047	446
- - - Sandviken	5	665	1045	482
- - - særlig udsøgte til Underlagssten for Jærnbjælker	5	729	991	605
»Petit Granit« (belgisk Kalksten)	5	911	1180	602
Kløbersten (norsk Serpentin)	10	477	582	415

Som Resultat af en Del ved det *Chalmerske Institut* i Gøteborg udførte Prøver med svenske og norske Stenarter anføres*) endelig (alt i kg./cm.²):

	Antal Arter prøvet	Middel- tal	Max.	Min.
Granit	9	1311	2220	634
Kalksten	13	830	1313	392
Sandsten	4	580	949	175

Tilladelig Paavirkning. Der er her kun Tale om den tilladelige Fiberpaavirkning for Stenene for sig, anvendte som Søjler, Underlagssten o. l. For Styrken af Murværk har nemlig ogsaa Mørtlens Styrke Betydning, og hertil komme vi først i den følgende §.

Bauschinger har i sine sidste Leveaar anstillet nogle Varighedsforsøg (Bøjning) med forskellige Stenarter**), men Forsøgene ere lovlige faa til deraf at drage nogen bestemt Slutning, særlig da Stenenes Mangel paa Homogenitet herved gør sig

*) »Hålfasthetsprof å svenska materialier«, utg. af Järnkontoret, Stockholm, 1897, S. 69–70.

**) Mittheilungen aus dem mech.-techn. Laboratorium, München, Heft 25 (offentliggjort af Föppl).

gældende paa samme Maade som Støbefejl for Støbejern. Forsøgene tyde paa, at Svingningsstyrken er omtrent $\frac{1}{4}$ af Ligevægtsstyrken.

Forøvrigt regner man almindeligt med en Sikkerhedskoefficient af mindst 10, ofte mere, indtil 20, og gaar vel beredvarende ud fra den mindste fundne eller antagne Brudgrænse end fra Middelværdien. Hvis man ikke har anstillet Forsøg med den specielle Stenart, man vil anvende, kan man foreløbig regne:

for Granit	30—50 kg./cm. ²
» Sandsten	15—30 —
» Kalksten (tæt)	15—30 —

2. *Brændte Sten.* Man kender ikke stort til Elasticitetsforholdene for brændte Sten. For at give et svagt Begreb derom skal anføres nogle faa Forsøg, der anstilledes af det af den østrigske Ingeniør- og Arkitektforening i 1890 nedsatte Udvalg til Undersøgelse af forskellige Hvælvingskonstruktioner. Resultaterne*), om hvilke det i Beretningen bemærkes, at de kun ere Tilnærmelser, findes i hosstaaende Tabel (kg. cm.²). Stenene vare maskinformede og vistnok haardbrændte. Det synes, som om E og B_c saa nogenlunde følges ad i Størrelse.

For Tryk	
E	B_c
162000	266
120000	139
86000	173
45000	99
142000	235

Bauschinger har anstillet Forsøg**) over *Styrken* overfor de forskellige Paavirkningsmaader, men da det her endnu mere end for de naturlige Sten kun er Modstandsevnen mod Tryk, der spiller en Rolle, skulle vi kun anføre, at man ved at tage Middeltal af Bauschingers Resultater kommer til følgende Forhold:

$$B_c : B_t : B_b : B_f = 1 : 0,05 : 0,3 : 0,2,$$

hvilket selvfølgelig kun maa betragtes som en raa Tilnærmelse.

Forøvrigt skulle vi indskrænke os til at anføre Tryk-Forsøg med Produkter, der kunne finde Anvendelse her til Lands.

*) Bericht des Gewölbe-Ausschusses, Wien 1895, S. 42. (Særtryk af Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch.-Vereins, 1895, Nr. 20—34.)

**) Mittheilungen, Heft 1, 4, 18.

Følgende Forsøg *) ere anstillede under Bygningen af Kjøbenhavns Frihavn med Sten fra Teglværker i Kjøbenhavns Omegn. Tallene angive Brudbelastningen for Tryk i kg./cm.² som Middeltal af 10 Forsøg:

	Tørre Sten			Vandmættede Sten		
	Middel	Max.	Min.	Middel	Max.	Min.
Røde, maskinformede	146,0	175	116	109,5	140	76
do. haandformede	148,4	187	126	116,4	171	71
Flammede	128,3	183	68	70,6	111	49
Gule, haardbrændte	196,1	226	150	192,3	236	147
Klinker	254,8	314	170	256,5	318	208

En anden Række Forsøg sammesteds fra giver Oplysninger om, hvad der kan opnaas af haardbrændte Sten og Klinker. Alle her undersøgte Sten vare vandmættede. Gruppen I af haardbrændte Kilesten omfatter de 10 tilsyneladende svagest brændte, Gruppen II de 10 tilsyneladende haardest brændte. Alle Tal angive kg./cm.².

	Middel	Max.	Min.
Haardbrændte Kilesten, I	286,6	504,0	190,7
II	408,2	564,7	224,1
Klinker	524,0	715,2	388,4

En Del Forsøg med svenske Materialer findes f. Ex. i »Hålfasthetsprof å svenska materialier« (utgifna af Järnkontoret).

Den tilladelige Paavirkning for *Murværk* af brændte Sten behandles i næste Paragraf.

§ 55. Mørtel, Beton, Murværk.

1. *Mørtel*. I de sidste Par Aar har man faaet et noget nærmere Kendskab til *Cementmørtels* Elasticitetsforhold, navnlig

*) Velvilligst meddelte af Havnebygmester H. C. V. Møller, Forsøgene udførte af Ing. N. P. Nielsen.

gennem *Bach's* nøjagtige Maalinger. Hvad de blivende Formforandringer angaar, er Forholdet her ganske som i § 50 beskrevet: Elasticitetsgrænsen ligger til at begynde med ved Nul, men ved gentagne Paavirkninger hæves den op til Paavirkningen; jo større denne er, des flere Gentagelser kræves der for at faa Elasticitetsgrænsen hævet, og der findes sandsynligvis en højere Grænse, ud over hvilken man ikke kan faa den hævet. *Bach* har kun udført Maalinger for *Tryk*; de fleste fortsættes kun op til en Spænding af 40 kg./cm.², ganske enkelte dog højere op.

I Fig. 139, Pl. 15, er vist den af *Bach* *) fundne Arbejdslinie for ren Cement, 3 Maaneder gammel; den fuldt optrukne Kurve svarer til de elastiske Forkortelser, de punkterede til de blivende og totale. I Fig. 140, Pl. 15, er vist Tryk-Arbejdslinierne (op til 40 kg./cm.²) for ren Cement og for Mørtel af Blandingerne 1:1½, 1:3 og 1:4½, alle 3 Maaneder gamle. Sandet var Donausand (kalkholdigt), Blandingen udførtes efter Rumfang med *rigelig* Vandtilsætning. Disse Linier svare kun til de elastiske Formforandringer.

Beregner man Konstanterne for en parabolisk Arbejdslinie, faas (mellem Spændingerne 0 og 40 kg./cm.²):

for ren Cement	$\sigma_2 = 10^5 (2,085\epsilon - 1200\epsilon^2),$
- Mørtel 1:1½	$\sigma_2 = 10^5 (2,78\epsilon - 2440\epsilon^2),$
- — 1:3	$\sigma_2 = 10^5 (2,195\epsilon - 1657\epsilon^2),$
- — 1:4½	$\sigma_3 = 10^5 (1,55\epsilon - 1015\epsilon^2).$

Koefficienten til ϵ ($10^5 \cdot 2,085 \dots$) betyder Elasticitetskoefficienten for Spændingen Nul; i Fig. 141, Pl. 15, ere disse Elasticitetskoefficienter afsatte som Ordinater, Sandmængderne som Abscisser, for at tydeliggøre Variationen. Herved er Spørgsmaalet om Sandtilsætningens Indflydelse paa Elasticiteten bragt et godt Skridt nærmere til sin Løsning; tidligere Maalinger af *Hartig* havde ladet formode, at Sandtilsætning altid forhøjer Elasticitetskoefficienten.

De ældre Experimenter over Cementmørtels Elasticitet have i Sammenligning med *Bach's* kun Værdi, for saa vidt som de give et Begreb om Gennemsnitsstørrelsen af Elasticitets-

*) De her meddelte Elasticitetsmaalinger findes i *Zeitschrift des Vereins deutscher Ing.*, 1896, S. 1381. De *Schüle'ske* Ligninger findes i *Z. d. V. d. Ing.*, 1897, S. 241.

coefficienten. *Hartig* *) har for Mørtel af 1 Cement + 3 Normal-sand fundet, at E (for Tryk) voxer nogenlunde jævnt med Prøvestykkets Alder (fra 366600 kg./cm.² for 50 Dage gammel Mørtel til 464800 for 400 Dage gammel Mørtel). Det af den østrigske Ingeniør- og Arkitektforening nedsatte Hvælvings-Udvalg fandt**) for Mørtel af 1 Cement + 3 Donausand følgende Resultater (for Tryk):

Antal Forsøg	Alder Maaneder	E_c i kg./cm. ²
		Middeltal
3	$3\frac{2}{3}$	385000
3	$3\frac{2}{3}$ — 4	237000
3	c. 4	333000
2	$3\frac{1}{3}$	364000
2	c. 3	328000

Endelig skal nævnes nogle Forsøg ved det *Chalmerske Institut* ***) i Göteborg med 28 Dage gammel Cementmørtel; Middelfresultaterne (for Tryk) ere:

Blanding	E_c (kg./cm. ²)	B_c
1 : 1	304000	276
1 : 2	351000	267
1 : 3	236000	146
1 : 4	234000	102
1 : 5	279000	79

Sandets Beskaffenhed er ikke oplyst, heller ikke ses det, om E er beregnet af de totale eller de elastiske Forkortelser.

*) Se *Ingeniøren*, 1896, S. 40. Hartigs Resultater ere mindre paalidelige end Bach's, fordi Forkortelserne af Prøvestykket maales paa en temmelig lille Længde (vistnok 6 cm.), medens Bach anvendte en Maalelængde af 75 cm.

**) *Bericht des Gewölbe-Ausschusses*, S. 41. Refereret i *Ingeniøren*, 1896, S. 40.

***) *Hållfasthetsprof på svenska materialier*, utg. af Järnkontoret, Stockholm 1897, S. 78.

Angaaende Forholdene ved *Træk* ere Erfaringerne mindre talrige. Det østrigske Hvælvings-Udvalg foretog ogsaa Forsøg med *Træk*; det konstateredes herved, at blivende Forlængelser indtraf allerede ved ganske smaa Spændinger, men saa vidt det kan ses, bleve Prøvestykkerne lige saa lidt her som ved Tryk-Maalingerne bragte i »konstant Tilstand«. Som Hovedresultat udtales det, at de totale Forlængelser omtrent fandtes proportionale med Belastningerne; de i Beretningen optegnede Arbejdslinier forløbe temmelig uregelmæssigt, saa man faar næppe andet ud af disse Forsøg end et Begreb om Gennemsnitsværdien af Elasticitetskoefficienten. Der angives* for Mørtel 1 : 3 (Donausand):

Antal Forsøg	Alder Maaneder	E_t 1 kg./cm. ² Middeltal
3	11	359000
3	11	246000
3	11	314000
4	5	400000
3	5	437000

Forsøg i det *Chalmerske Institut***) i Göteborg have givet som Middelresultater (Alder 28 Dage):

Blanding	E_t (kg./cm. ²)
1 : 1	261000
1 : 2	265000
1 : 3	170000
1 : 4	196000
1 : 5	200000

Endelig skal nævnes nogle danske Forsøg***), hvis Resul-

*) Samme Sted som ovenfor citeret.

**) *Hållfasthetsprof å svenska materialier*, utg. af Järnkontoret, Stockholm 1897, S. 78.

***) Udførte af Premierlieutenant Grut og Ingeniør N. P. Nielsen; offentliggjorte i »Ingeniøren«, 1896, S. 41.

ater ere fremstillede i Fig. 142, Pl. 16. Prøvelegemerne vare kvadratiske Prismer med 50 cm.² Tværsnitsareal, Blandingen 1 Cement + 3 Bakkegrus, ca. 2 Maaneder gammel, Maale-mængden 97cm.³. Punkterne paa det i Fig. 142 fuldt optrukne Stykke af Kurven ere bestemte som Middeltal af 4 Forsøg, paa det punkterede Stykke kun af 2 Forsøg. Der maalttes kun de totale Forlængelser. Beregner man Konstanterne for en parabolisk Arbejdslinie (med de totale Forlængelser), faar man, gældende mellem Spændingerne 0 og 14 kg./cm.²:

$$\sigma_1 = 10^5 (2,474 \varepsilon - 10000 \varepsilon^3).$$

Vi komme dernæst til *Styrken* af Cementmørtel. Ved de ovenfor refererede Forsøg i det *Chalmerske Institut* faar man allerede et Begreb om Styrkens Aftagen med voxende Sand-mængde, men forøvrigt synes dog Tallene for de 3 sidste Blandinger (1 : 3—1 : 5) temmelig lave. Angaaende Styrken overfor forskellige Slags Paavirkninger ere vel de mest omfattende Forsøg anstillede af *Bauschinger**). Af hans Tal udledes de i følgende Tabel angivne Forhold, af hvilke hvert fremtræder som Middeltal af Forsøg med 10 forskellige Cementmærker; Prøvestykkerne hærdede i Luften og havde for Trykprøverne Tærningsform med 144cm.² Sideflade, for alle de andre Prøver rektangulært Tværnit, 6 . 12cm.; Sandet var gult, rent Kvantssand.

Blanding	.	Alder i Uger					
		1	2	4	8	16	103—113
1 : 3	$B_t : B_c =$	0,116	0,116	0,109	0,101	0,096	0,117
	$B_f : B_c =$	0,145	0,137	0,128	0,129	0,122	0,146
	$B_b : B_c =$	0,30	0,28	0,27	0,26	0,24	0,39
1 : 5	$B_t : B_c =$	0,122	0,127	0,123	0,116	0,107	0,118
	$B_f : B_c =$	0,153	0,151	0,148	0,140	0,130	0,148
	$B_b : B_c =$	0,35	0,31	0,30	0,27	0,24	0,37

Man ser, at alle Forholdene aftage mere eller mindre regelmæssigt i Begyndelsen — op til 16 Uger —, men efter 2

*) *Mittheilungen*, Heft 8.

Aars Forløb er de igen stegne betydeligt. Da Træk-Prøvestykkerne vare prismatiske, gælde de anførte Tal for $B_i : B_c$ ikke umiddelbart for de sædvanlige 8-Tal-Prøvestykker (se § 51).

Nyere Undersøgelser af *R. Feret* *) have i Hovedsagen givet følgende Resultat: Forholdet $B_b : B_i$ er omtrent konstant, lig 1,9—2,0; ligeledes er Forholdet $B_f : B_c$ konstant, lig 0,65; derimod er der intet konstant Forhold mellem B_i og B_b paa den ene Side og B_c og B_f paa den anden. *Feret's* her nævnte Resultater gælde for Mørtel med rigelig Vandtilsætning.

Hvad Angivelsen af den absolute Styrke angaar, skulle vi indskrænke os til danske Cementmærker. For saadanne giver følgende Tabel **) et Begreb om Styrken mod Tryk (i kg./cm.²):

	Blanding 1 : 3 efter	Hærdet i	1 Uge	4 Uger	3 Mdr.	6 Mdr.	1 Aar	2 Aar
Portland- cement	Vægt	Luft	178	236	267	282	306	354
	»	Vand	174	250	315	374	428	456
	Rumf.	Luft	165	213	236	255	279	322
	»	Vand	155	218	281	330	386	410
Slagge- cement	Vægt	Luft	137	183	203	213	218	224
	»	Vand	132	200	268	300	328	345
	Rumf.	Luft	75	100	94	100	104	103
	»	Vand	85	118	154	183	197	207

Af Tabellen fremgaar det tydeligt, at Hærdning i Vand fører til større Styrke overfor Tryk end Hærdning i Luft, og

*) *Feret's* Resultater ere tagne fra Referater i *Thonindustriezeitung*, 1898, S. 561 o. f. og *Centralblatt der Bauverwaltung*, 1898, S. 196.

**) Oplysningerne ere hentede fra »Beretning om Undersøgelse af indenlandsk Cement ved den polytekniske Læreanstalt«, 1892, 93 og 94. Af de sammesteds meddelte Undersøgelser over svensk og tysk Cement er intet medtaget her, da saadanne Middeltal, som her nævnes, kun egne sig til at give et almindeligt Begreb om Styrken, ikke til Sammenligninger; og der er kun anført Middeltal (nemlig for Portlandcement Gennemsnitstal af Resultaterne for »Cimbria«, »Dania« og »Aalborg«), da de i 1891 og 92 udtagne Prøver dog muligvis ikke i et og alt svare til, hvad der præsteres nu.

særlig Grad gælder dette for Slaggecementen; heraf indses Vigtigheden af i Praxis at holde Betonen fugtig i den første Tid efter Støbningen.

Følgende Sammenstilling giver et Begreb om Styrken overfor Træk (kg./cm.²):

	Blanding 1 : 3 efter	Hærdet i	1 Uge	4 Uger	3 Mdr.	6 Mdr.	1 Aar	2 Aar
Portland- cement	Vægt	Luft	21	27	33	40	47	52
	»	Vand	19	26	32	35	37	38
	Rumf.	Luft	19	26	30	37	42	48
	»	Vand	17	23	27	31	33	34
Slagge- cement	Vægt	Luft	18	21	22	24	24	24
	»	Vand	16	26	33	37	38	38
	Rumf.	Luft	15	14	13	13	12	11
	»	Vand	17	18	21	23	24	24

Her synes Portlandcementens Hærdning i Luft at have givet en Del bedre Resultater end i Vand, derimod er det tydeligt, at Slaggecementen daarligt taaler at undvære Vand under Hærdningen. For Portlandcementen faar man en Variation af Forholdet $B_t : B_c$ som fremstillet i Fig. 143, Pl. 16; de tegnede Kurver referere sig til Blanding efter Rumfang, men Blanding efter Vægt giver næsten akkurat samme Variation; der er altsaa absolut intet konstant Forhold mellem B_t og B_c . — Blandingen 1:3 efter Maal var ensbetydende med en Blanding efter Vægt paa 1:3,17—1:3,58 for Portlandcementen, derimod med 1:4,31 for Slaggecementen, altsaa betydelig magrere for den sidste.

De her anførte Styrketal for Cementmørtel referere sig til Forsøg, der ere udførte efter »Normerne«^{*)}; Mørtlen er da fremstillet med mindre Vandtilsætning end almindeligt i Praxis

*) »Bestemmelser for ensartet Levering og Undersøgelse af Portlandcement«, vedtagne af Teknisk Forening i Maj 1889, se Tekn. Forenings Tidsskrift 1889—90, S. 147.

og langt stærkere komprimeret, end man nogensinde faar den i Virkeligheden. Disse Tal kunne derfor ikke direkte give nogen Oplysning om, hvilken Styrke man kan vente af Mørtlen i en Bygningskonstruktion; *man tør næppe paa nogen Maade regne med mere end ca. $\frac{2}{3}$ af Styrken ovenfor.* Efter Normerne forlanges som Minimum 16 kg./cm.² som Brudgrænse for Træk, 160 kg./cm.² for Tryk, 28 Dage efter Støbningen (Prøvestykkerne skulle opbevares 1 Dag i Luften, Resten af Tiden under Vand).

Den Styrke, der opnaas, afhænger nemlig i temmelig høj Grad af den benyttede Vandmængde, som det fremgaar af følgende Forsøg*) med Mørtel af 1 Cement + 3 almindeligt Mursand (kg./cm.²):

Alder	10% Vand		15% Vand	
	Træk	Tryk	Træk	Tryk
7 Dage	20	202	10	55
28 "	26	285	18	100
90 "	29	355	23	150
180 "	32	380	23	170

men saa tør Mørtel som den theoretisk mest fordelagtige fordrer meget stærk Kompression for virkelig at blive god, og at en saadan virkelig bliver gennemført paa Byggepladsen, kan man kun sjældent stole paa.

Endvidere afhænger Styrken i høj Grad af Sandets Finhed: dette Forhold er navnlig omhyggelig undersøgt af *Feret***), der finder, at den tætteste og stærkeste Mørtel faas ved en passende Blanding af fint og grovt Sand uden Indblanding af middelfint. Af hans nyere Resultater har navnlig det Betydning, at de billigere (magrere) Mørtelblandinger ofte kunne være ligesaa tætte og stærke som de dyrere, eller endog tættere. Hvis det anvendte Sand indeholder mindst $\frac{1}{3}$ af sin Vægt som meget fine Korn, aftager Tætheden ved Forøgelsen

*) »Der Portland-Cement und seine Anwendungen im Bauwesen«, Berlin 1892, S. 24.

**) *Annales des ponts et chaussées*, 1892, II, S. 5. Refereret i »*Ingeniøren*« 1894, S. 197.

af Bindemidlet (Cementmængden) ud over en vis Grænse. Af alle de Mørtler, der kunne faas med Sand af den nævnte Sammensætning, er den tættest, i hvilken den virkelige Mængde af fine Korn, incl. Bindemidlet, er halv saa stor som Mængden af grovt og mellemfint Sand tilsammen.

Ogsaa de enkelte Sandkorns Beskaffenhed har Indflydelse; skarpt Sand — Bakkesand — giver størst Styrke *).

Adhæsionen af Cementmørtel 1 : 3 til Jærn angives**) efter Forsøg af Bauschinger almindeligvis at være 40—47 kg./cm.². Johnson ***) refererer nogle Forsøg med 25 m./m. Rundjærn, hvorefter et Maximum af Adhæsion (pr. cm.²) findes, naar Længden af den indstøbte Del af Jærnstangen er ca. 4 Gange Diameteren; dette Maximum er dog kun for Mørtel 1 : 2 omtrent 20 kg./cm.² for 1 : 4 ca. 9 kg./cm.². Dette Forhold har Betydning for Monierkonstruktioner.

Vi skulle dernæst anføre Resultaterne af nogle Tryk-Forsøg med forskellige andre Slags Mørtel †), prøvede i Tærningsform (kg./cm.²): (Se Tabellen øverst næste Side.)

Den tilladelige Fiberpaavirkning for Mørtel, der indgaar i Murværk, komme vi ind paa nedenfor.

2. *Beton*. De nøjagtigste Undersøgelser over Elasticiteten af Beton ere ligesom for Cementmørtels Vedkommende udførte af Bach ††), dog kun for Tryk. Af disse Maalinger fremgaar det først og fremmest, at Sandet og Skærverne have saa stor Indflydelse, at man aldeles ikke fra Forsøg med en Slags Beton kan slutte til en anden Slags, med mindre Sand og Skærver ere af ganske samme Beskaffenhed. Til den Beton, hvor-

*) Se f. Ex. »Ingeniøren« 1894, S. 5.

**) *Der Portland-Cement und seine Anwendungen*. S. 289.

***) *Materials of construction*, S. 600.

†) Forsøgene med Bastardmørtlen meddeles i »2den Beretning om Undersøgelse af indenlandsk Cement ved den polytekniske Læreanstalt«, 1893; med Kalkmørtlen i »Beretning om Undersøgelse af indenlandsk Bygningskalk ved den polytekniske Læreanstalt«, 1889—90 (Saltholmskalken er her nævnt rent eksempelvis, de andre 8 undersøgte Sorter afvige ikke stort derfra); med Sandcementen i »Hållfasthetsprof å svenska materialier«, utg. af Järnkontoret, S. 76; Forholdet mellem Cement og Sand er i de 7 anførte Prøver: 1 : 3, 1 : 7, 1 : 11, 1 : 23, 1 : 27, 1 : 26, 1 : 25.

††) *Zeitschr. d. Vereins deutsch. Ing.* 1895, S. 489 og 1896 S. 1381, de Schüleske Ligninger findes i *Z. d. V. d. I.* 1897, S. 241.

	Blanding	7 Dage	28 Dage	3 Mdr.	6 Mdr.	1 Aar
Bastardmørtel af Portland - Cementmørtel	1 Cm. + 0 Km.	151	260	265	257	
(Cm.) 1 : 3 efter Vægt	1 - + $\frac{1}{2}$ -	97	158	166	178	
og Kalkmørtel (Km.)	1 - + 1 -	43	97	105	108	
1 : 4 efter Rumfang	1 - + 2 -	19	39	40	41	
	1 - + 3 -	13	24	25	33	
	0 - + 1 -	0,8	7	12	13	
Kalkmørtel af Salt- holmskalk og alm. Mursand (blandet efter Rumfang)	1 K + 3 S		9	19	27	
	1 - + 4 -		9	17	23	
	1 - + 5 -		8	17	22	
	1 - + 6 -		7	15	20	
Maskin-(Kalk-)mørtel	c. 1 K + 5 S		9	17	23	
Sandcementmørtel af	1 SC (1 : 0) + 3 S	170	213	240		
Sandcement +	1 - (1 : 3) + 1 -		109			
Strandsand	1 - do. + 2 -	60	84	95	96	124
	1 - do. + 5 -		47			
	1 - do. + 6 -	25	29	35	43	38
	1 - (1 : 8) + 2 -	28	32	34	49	64
	1 - (1 : 12) + 1 -	9	25	52	43	

med *Bach* eksperimenterede, anvendtes enten Donausand (kalkholdigt, betegnes ved DS) eller Eggingersand (navnlig dannet af Kvarts, betegnes ES), og enten Singel (Donaukies, betegnes DK) eller Kalkstensskærver (KS). Betonen blandedes for Haanden og med saa rigeligt Vand, at den ved Stampningen viste sig plastisk; Støbningen af Prøvestykkerne udførtes i det hele som ved Betonarbejder i Praxis. — Cementen var Portland-Cement, for hvilken Normprøverne gav:

	7 Dage	28 Dage
Træk	25,6	30,4
Tryk	286	376

Bach bestemte stadig baade de blivende og de elastiske Forkortelser; Arbejdsliniernes Udseende er ganske som i Fig. 139 og 140, Pl. 15, vist for Cementmørtel, Prøvestykkerne vare (ligesom for Mørtlen) Cylindre med 25^{cm.} Diameter, 1^{m.} Højde, 75^{cm.} Maalelængde. I nedenstaaende Tabel er anført Konstanterne α og β i Ligningen for den paraboliske Arbejdslinie, gældende mellem Spændingerne 0 og 40 kg./cm.²:

$$\sigma_2 = 10^5 (\alpha \varepsilon - \beta \varepsilon^2),$$

for Beton af Donausand og Donaukies; endvidere er anført Brudgrænsen for det Prøvestykke, paa hvilket Elasticitetsmaalingerne ere foretagne (for hvilket $h = 4d$):

Blanding $C + DS + DK$	Alder	α kg./cm. ²	β kg./cm. ²	B_c ($h = 4d$) kg./cm. ²
1 : 2½ : 5	86 Dage	2,113	1643	105
1 : 3 : 6	105 -	2,018	1430	119
1 : 4 : 8	108 -	1,580	746	95
1 : 5 : 10	142 -	1,575	1160	79

Forøvrigt ere Hovedresultaterne af *Bach's* Forsøg med Beton sammenstillede i Tabellen øverst paa næste Side. E_c betegner Elasticitetskoefficienten for Tryk, beregnet som Retningskoefficient for Korden fra Begyndelsespunktet til det første maalte Punkt af Arbejdslinien, hvilket ligger ved ca. 8 kg./cm.²; B_c er Brudgrænsen for Tryk, funden ved andre Prøvestykker (med $d = h = 25^{\text{cm.}}$) end dem, paa hvilke Elasticitetsmaalingerne foretoges; baade E_c og B_c ere Middeltal af 3 Forsøg. Prøvestykkernes Alder var 3—4½ Maaned.

Forsøg over Betons Styrke og Elasticitet foretoges ogsaa af den østrigske Ingeniør- og Arkitektforenings Hvælvingsudvalg*). Resultaterne ere sammenstillede i nedenstaaende Tabel (nederst næste Side), hvor B_t betegner Brudgrænsen for Træk, B_c' Brudgrænsen for Tryk, funden ved Tærninger med ca. 10^{cm.} Side-

*) *Bericht des Gewölbe-Ausschusses*, Wien 1895, S. 41.

Blanding	E_c kg./cm. ²	B_c kg./cm. ²
1 C + 3 DS	232000	172
1 - + 4 $\frac{1}{2}$ -	159000	128
1 - + 1 $\frac{1}{2}$ ES + 3 KS		267
1 - + 1 $\frac{1}{2}$ - + 3 DK		229
1 - + 2 - + 4 KS		238
1 - + 2 - + 4 DK		204
1 - + 2 $\frac{1}{2}$ DS + 5 DK	221000	136
1 - + 2 $\frac{1}{2}$ - + 5 KS		173
1 - + 2 $\frac{1}{2}$ ES + 5 -	329000	
1 - + 3 DS + 6 DK	211000	123
1 - + 3 ES + 6 KS		216
1 - + 3 DS + 6 KS	271000	
1 - + 3 $\frac{1}{2}$ DS + 7 DK	175000	115
1 - + 3 $\frac{1}{2}$ - + 7 KS	252000	189
1 - + 4 - + 8 DK	162000	96
1 - + 4 ES + 8 KS		164
1 - + 4 DS + 8 KS	233000	
1 - + 4 $\frac{1}{2}$ DS + 9 DK	166000	114
1 - + 4 $\frac{1}{2}$ ES + 9 KS	218000	181
1 - + 5 DS + 10 DK	156000	88
1 - + 5 ES + 10 KS	239000	129

inie, B_c'' den Tryk-Brudgrænse, der fandtes ved de Prismes, med hvilke Elasticitetsmaalingerne foretoges, og hvis Dimensioner vare 9.9.25^{cm.} (Maalelængde 15^{cm.}); Sandet var Donausand, Skærverne, saa vidt det kan ses, af Kalksten; B og E ere angivne i kg./cm.².

Blanding	Trykprover				Trækprover		
	Alder	E_c	B_c''	B_c'	Alder	E_t	B_t
1:3:5	3 Mdr.	74100	(48)	107	6 $\frac{1}{2}$ Mdr.	98000	9.1
1:2:3	3 -	307000	264	256	6 $\frac{1}{2}$ -	280000	24.9
1:1:1	3 -	264000	201	152	6 $\frac{1}{2}$ -	250000	18.1

Styrken af Beton angives ofte*) at være omtrent den samme som af Mørtlen deri, — naar Skærverne da ikke ere

*) Saaledes i »Der Portland-Cement und seine Anwendungen im Bauwesen«, Berlin 1892, S. 90.

af et svagere Materiale som f. Ex. svagt brændte Mursten o. l. — Efter en Del Forsøg i det *Chalmerske Institut* i Göteborg *) synes det, som man for Beton af Sammensætningerne 1 : 3 : 5, 1 : 4 : 6 og 1 : 5 : 7 kan antage, at Tryk-Brudgrænsen er ca. $\frac{2}{3}$ af den for Mørtlen (1 : 3, 1 : 4, 1 : 5), og højere tør man vel i Reglen ikke regne. Den tilladelige Fiberpaavirkning omtales nedenfor.

3. *Murværk*. Angaaende Elasticiteten af Murværk foreligger der kun faa Forsøg. *Bauschinger* har til forskellig Tid foretaget enkelte saadanne Maalinger, af hvilke her skal nævnes nogle fra 1888 **), der anstilledes paa Foranledning af *Leibbrand*. Prøvestykkerne vare dannede af to Prismar af broget Sandsten, 12 . 12 . 14^{cm}, med en 2^{cm} tyk Fuge imellem af Portland-Cementmørtel 1 : 2; deres hele Højde var 30^{cm}, Maalelængden ved Elasticitetsforsøgene (Tryk) 16^{cm}. Tillige foretoges der Tryk-Elasticitetsmaalinger med Prismar af Stenen alene og af Mørtlen alene, og baade Murværket og Mørtlen prøvedes dels 4 Uger, dels 8 Uger gammel. Det viste sig, at Arbejdslinien for Murværket saa nær fulgte den for Stenen alene, at man meget godt ganske kunde se bort fra Mørtelfugen, og det uagtet der var en ganske betydelig Forskel paa Stenenes og Mørtlens Elasticitet. For Murværk af hugne Sten kan man derfor sandsynligvis nøjagtigt nok regne med den for Stenene alene bestemte Elasticitetskoefficient (Arbejdslinie), hvad jo ogsaa er naturligt nok, da Fugernes Tykkelse her kun betyder lidt i Forhold til Stenenes. — Derimod spille Fugerne en større Rolle i Murværk af brændte Sten, og det synes, som om man her ligefrem kan regne sig til Elasticitetskoefficienten for Murværket, naar man kender Elasticitetskoefficienterne for Murstenene og Mørtlen. Til Illustration heraf skulle vi anføre nogle Forsøg i *Watertown Arsenal* ***) med 21 Maaneder

*) »Hållfasthetsprof å svenska materialier«, S. 78—79.

**) Se *Zeitschr. für Arch.- u. Ing.-wesen*, 1896. S. 50; ogsaa *Leibbrand: Gewölbte Brücken (Fortschritte der Ingenieurwissenschaften, 2te Gruppe, 7. Heft)* Leipzig 1897. S. 4—5.

***) »Report of tests at Watertown arsenal« 1885, S. 1138 o. f. og 1886, S. 1691 o. f. E_s findes 1885, S. 1159, Nr. 475—77; Maalingerne for E_c findes 1886, S. 1693—94; de her benyttede Murpiller 1886, S. 1708—09 og 1717—18. De absolute Talværdier have i Virkeligheden ingen Interesse, da Materialerne ere temmelig forskellige fra vore; Mørtlen har saaledes kun en Brudgrænse (i Tærningform) af 10—11 kg./cm.², hvorimod Stenenes Brudgrænse (i Prismar med $h > 2b$) er ca. 750 kg./cm.².

gamle murede Piller af haardt brændte Sten; Pillernes Tvær-
 snit varierede mellem 20.20^{cm}. og 40.40^{cm}, Højden mellem
 0,6^m. og 3,8^m.; Mørtlen var 1 Rosendale Cement + 2 Sand,
 Fugerne 6,4—7^m m. tykke. Naar vi holde os til de 1,22
 høje Piller, for hvilke Maalingerne siges at være mest paa-
 lidelige, findes der 18 Fuger à ca. $\frac{2}{3}$ cm., altsaa udgøres $\frac{1}{10}$ af
 Højden af Fugerne. Naar Elasticitetskoefficienten for Stenene
 kaldes E_s , for Cementmørtlen E_c og for Murværket E_m , skal
 man derfor have:

$$\frac{1}{E_m} = \frac{0,9}{E_s} + \frac{0,1}{E_c}.$$

Der er nu just ikke Proportionalitet mellem Spændinger
 og Formforandringer, men naar man beregner Gennemsnits-
 værdier af E for de lavere Spændinger, findes følgende Tal
 (i kg./cm.²):

E_s	E_c	E_m
264000	9200	80000
350000	11000	45000
323000	11600	85000
		76000
Middel: 312000	10600	71500

og naar man af Middelværdierne af E_s og E_c beregner E_m
 efter Formlen ovenfor, kommer man til: $E_m = 81000$. —
 Skønt dette Resultat, at man saaledes med tilstrækkelig Nøj-
 agtighed kan regne sig til E_m , synes overmaade naturligt, er
 det dog ikke nogen logisk Nødvendighed; man ved nemlig
 ikke paa Forhaand, om Forkortelsen pr. Længdeenhed af en
 tynd Mørtelfuge er den samme som af et Mørtelprisme med
 større Højde, idet nemlig Udvidelsen paa tværs er delvis hindret
 i Fugen.

Større Betydning end disse Elasticitetsmaalinger for Mur-
 værk have Undersøgelser angaaende Styrken. En Konstruktion,
 der som Murværk bestaar af to i Almindelighed ulige stærke
 Materialer, kan naturligvis ikke taale mere end det svageste

disse, men hvis det er Mørtlen, der er svagest, maa det indres, at Brudgrænsen for Tryk voxer meget stærkt med stigende Højde af Prøvestykket, som vist i § 51. Undersøgelserne i denne § kunne dog ikke umiddelbart overføres paa Mørtelfuger, saa der behøves særlige Forsøg med Murværk. Vi skulle nu meddele noget om saadanne Forsøg.

De ovenfor omtalte Undersøgelser, som *Leibbrand* lod anstille i München (*Bauschinger*), fortsattes lige til Brud og gav følgende Værdier af Brudgrænsen:

Stenene alene (Sandsten)	631—653	kg./cm. ² ,	
Mørtelprismerne (1 C + 2 S.), 4 Uger ...	217—250	—	
do. , 8 » ...	240	—	
Murværket (2 ^{cm.} Fuge) , 4 » ...	340—389	—	
— , 8 » ...	381—435	—	

Murværket er altsaa i Besiddelse af betydelig større Styrke end Mørtlen, naar den prøves paa almindelig Maade i Tærning- eller Prismeform; dette ses endnu tydeligere af følgende Forsøgsrække*), der anstilledes under Bygningen af Kjøbenhavns Frihavn, og hvor der anvendtes langt svagere Mørtel end ovenfor. To halve Mursten (Klinker) sammenmuredes med en ca. 1^{cm.} tyk Mørtelfuge af højst forskellig Beskaffenhed (angaaende Mørtlens Styrke, prøvet i Tærningform, vil man finde tilstrækkelige Oplysninger i Tabellen S. 300), og Prøverne foretoges ca. 1½ Maaned senere. I Tabellen (øverst næste Side) betyder C ren Cement, S Sand, SC Sandcement, Km. Kalkmørtel (Maskinmørtel, omtrent 1 K + 5 S); Brudgrænsen er angivet i kg./cm.²; hvor Tallet ersat i Parenthes, knustes Stenene før Mørtlen.

Nogle Oplysninger om Fugetykkelsens Indflydelse faas af følgende Forsøg af *Tourtay***). Han eksperimenterede dels med 3 Slags Kalksten af forskellig Styrke, dels med Mursten. Mørtlen var enten Cementmørtel eller hydraulisk Kalk, begge omtrent i Forholdet 1:3 efter Vægt, Fugetykkelsen for Cementmørtlen 5, 10 eller 15^{m.m.}, for Kalkmørtlen 10^{m.m.}

Prøvestykkerne vare Tærninger med 10^{cm.} Sidelinie, for Murklodsernes Vedkommende dannede af to saadanne halve

*) Velvilligst meddelt af Havnebygmester H. C. V. Möller, Prøverne udførte af Ing. N. P. Nielsen.

**) *Annales des ponts et chaussées*, 1885, II, S. 582.

	Blanding	Antal Forsøg	Brudgrænse		Middel-Brud- grænse for	
			Max.	Min.	Sten	Fuge
Bastardmørtel	1 C + 1 Km	6	(297)	(183)	245	
	1 C + 5 -	10	(354)	(183)	281	
	1 C + $7\frac{1}{2}$ -	9	(331)	(197)	265	
	1 C + 10 -	10	309	189		241
Ren Sandcement	SC (1 : 6)	9	312	140		216
	- (1 : 12)	7	191	80		135
Maskinblandet Sandcement- mørtel	1 SC (1 : 3) + 1 S	10	283	183		230
	1 - (1 : 3) + 2 S	8	214	134		181
	1 - (1 : 8) + $2\frac{1}{2}$ S	5	180	117		132
	1 - (1 : 8) + $2\frac{1}{2}$ S	7	191	114		160
Haandblandet Sandcementmørtel	1 SC (1 : 3) + 1 S	10	272	166		217
	1 SC (1 : 3) + 2 S	8	243	143		201
Bastardmørtel af Sandcement og Kalkmørtel	1 SC (1 : 3) + 3 Km.	9	338	194		257
	1 SC (1 : 3) + 5 Km.	10	214	97		141

Tærninger med en Mørtelfuge, deres Alder 21 Dage. Brudgrænsen var for Cementmørtlen 73 kg./cm.², for Kalkmørtlen 20 kg./cm.². Brudbelastningen fremtræder i følgende Tabel som Middeltal af 3 Forsøg og er udtrykt i kg./cm.².

		Stenen alene	Murværk med			Kalkfuge 10 m./m.
			Fuge af Cementmørtel			
			5 m./m.	10 m./m.	15 m./m.	
Kalksten	II	> 650	479	399	409	435
-	III	> 480	300	275	266	276
Mursten		71	45	41	34	

Den Prøvemaskine, hvormed Forsøgene udførtes, var ikke kraftig nok til at knuse alle Prøvestykkerne; Tegnet > i Ta-

ellen betyder, at Brudgrænsen ligger højere end det angivne Tal. Af disse Forsøg ses, at Brudgrænsen, som rimeligt er, aftager med voxende Fugetykkelse; endvidere at Styrken kun ringe Grad afhænger af Mørtlens absolute Styrke i Tærningorm; skønt Kalkmørtlens Styrke ikke en Gang er $\frac{1}{3}$ af Cementmørtlens, have dog Murklodserne med Kalkfuger mindst lige saa høj Brudgrænse som de med 10^{m.m.} Cementfuger.

Vi skulle endnu meddele de Resultater angaaende Brudgrænsen, som fandtes ved de ovenfor nævnte amerikanske Forsøg (i *Watertown*), da de paa Grund af Prøvestykkernes Størrelse — hele Murpiller i Stedet for blot en Murklods med én Fuge — give et væsentligt Bidrag til Belysning af Spørgsmaalet om Styrken af Murværk. Mørtlens Styrke var, som ovenfor nævnt, kun 10—11 kg. cm.², Stenenes Brudgrænse var som Middeltal 750 kg./cm.², og varierede mellem 500 og 1100 kg./cm.², naar de prøvedes i Form af Prismen med Grundflade $5,5 \times 8^{\text{cm.}}$ og med Højde 19^{cm.}. Der fandtes (i kg./cm.², som Middeltal af to Forsøg) for 21 Maaneder gamle Murpiller:

Murpillens Tværsnit		20 ^{cm.} , 20 ^{cm.}	30 ^{cm.} , 30 ^{cm.}
Murpillens Højde	0,6 m.	193	168
	1,2 -	130	128
	1,8 -	168	117
	2,4 -	110	108
	3,0 -	117	95
	3,8 -		109

Der ses af disse Tal en kendelig Aftagen af Styrken med voxende Højde af Pillen, altsaa et lignende Forhold for Murværk, som vi senere skulle komme nærmere ind paa for Træ og Jærn (Søjler).

Skønt vi hidtil have talt alene om Styrken overfor Tryk, kan der dog blive Spørgsmaal om Styrken af Murværk ogsaa overfor andre Paavirkninger, navnlig Forskydning langs Fugerne (f. Ex. i Pillerne for en hvælvet Bro o. l.) og Træk vinkelret paa Fugerne (i en Hvælving eller en excentrisk paavirket Pille). Det vil i Almindelighed være Størrelsen af

Mørtlens Adhæsion til Stenene, der sætter en Grænse for, hvad Murværket kan taale af den Slags Paavirkninger. Der foreligger kun faa Forsøgsresultater, der give Oplysning herom. *Bauschinger* har været inde paa Spørgsmaalet ved nogle af sine første Forsøg *) (1873); for ren Portland-Cementmørtel eller Cementmørtel med 1, $1\frac{1}{2}$, 2 eller 3 Sand, 6—8 Uger gammel, fandt han Modstanden mod Træk vinkelret paa Mørtelfugen varierende mellem 1,3 og 5,3 kg./cm.², mod Forskydning langs Fugen mellem 3,9 og 10,7 kg./cm.² (ved en enkelt Prøve dog 19,5); der er tilsyneladende ikke nogen væsentlig Forskel paa de nævnte forskellige Mørtelblandinger, derimod gav en omhyggelig Afbørstning af Stenene inden Formuringen afgjort noget større Styrke end ellers (for Træk er den laveste Værdi i saa Fald 2,1, for Forskydning 4,7 kg./cm.²). Bruddet foregik i Almindelighed derved, at Mørtlen løsnede sig fra Stenene, saa det var Adhæsionen, der maalttes. For almindelig Kalkmørtel fandtes Modstanden mod Træk lig 0,5 kg./cm.² ved et enkelt Forsøg; det var ligeledes her Adhæsionen, der maalttes.

*Johnson**)* angiver Adhæsionen af Cementmørtel til Overfladen af Mursten for 3—6 Maaneder gamle Prøver til 2—4 kg./cm.² for Mørtelblandingerne 1 : 3 — 1 : 0.

Den tilladelige Fiberpaavirkning for Murværk. Grundene til, at man maa indføre en Sikkerhedskoefficient, ere her for saa vidt ganske de samme som de i § 48 nævnte, hvor Talen var om Jærn; men her skal Sikkerhedskoefficienten dække over langt mere. Her er det navnlig det utilstrækkelige Kendskab til det anvendte Materiale og Mangler ved Arbejdets Udførelse, der træde i Forgrunden. Af de anførte Forsøgsresultater fremgaar det tilstrækkeligt, hvor variable Materialkonstanterne her ere, og det er noksom bekendt, hvor meget Fugernes Fyldning, Betons Komprimering ved Stampning o. s. fr. som oftest lader tilbage at ønske. I Almindelighed — d. v. s. naar man ikke kan anstille Forsøg med det anvendte Materiale, men maa nøjes med Erfaringer fra andre lignende Tilfælde, og naar man ikke kan kontrollere Arbejdets Udførelse særlig nøjagtigt — maa man derfor dække sig ved Brug af

*) *Mittheilungen*, Heft 1, Mitth. I og II. Tallene ere navnlig tagne fra Mitth. II, Tab. III og VI.

**) *Materials of construction*, S. 600—01.

en rigelig stor Sikkerhedsgrad; men i specielle Tilfælde, hvor man er i det heldige Tilfælde at kunne undersøge sit Byggemateriale omhyggeligt og vil ofre noget paa Arbeidets Udførelse, kan det derimod være overmaade forsvarligt at tillade større Paavirkninger; ved de spinklere Dimensioner, man derved kommer til, faar man ofte rigelig Dækning for Udgifterne til Forsøg m. m. Fra den nyeste Tid, hvor Materialundersøgelserne ere komne mere og mere i Brug, vil man derfor finde ikke faa Exempler paa ualmindelig høje Fiberpaavirkninger, saaledes*) ved flere af de af *Leibbrand* byggede hvælvede Broer i *Württemberg*; i Broen over *Donau* ved *Munderkingen* — Betonhvælvinger — er der f. Ex. regnet 38 kg./cm.², ved nogle hvælvede Broer af Brudstensmurværk (broget Sandsten) i *Murghal* ved *Baiersbronn* endogsaa 56 kg./cm.², hvilket svarer til $\frac{1}{6}$ af den ved Forsøgene (de ovenfor refererede *Leibbrand-Bauschinger'ske*) med Murklodser fundne Brudbelastning.

Den sædvanlig anvendte Sikkerhedskoefficient er 10—20, og herved faar man følgende tilladelige Paavirkninger for Tryk:

	kg/cm. ²	$\pi/\square$
Cementmørtel, 1 : 3 i Monierkonstruktioner	30	400
Beton, 1 : 3 : 6, Granitskærver	15—25	200—350
do. 1 : 4 : 8, do.	10—20	135—270
do. 1 : 4 : 8, Murstensskærver	7—11	100—150
Murværk af Granitkvadere i Cementmørtel	30—40	400—550
do. af kløvede Granitsten i Cementmørtel	15—25	200—350
do. af Kalk- eller Sandsten, do.	15—25	200—350
do. af Klinker i Cementmørtel	12—15	160—200
do. af alm. Mursten i do.	10—12	130—160
do. af do. i Kalkmørtel	7	95

For Cementmørtel og god Beton kan man tillade 1—3 kg./cm.² til Træk, for Murværk kan man paa Grund af den ringe Adhæsion mellem Mørtel og Sten slet ikke regne Trækspændinger som tilladelige.

*) Se *Zeitschr. für Arch. u. Ing.-wesen*, 1896. S. 50.

§ 56. Monierbjælkers Beregning. Som bekendt bestaar Byggematerialet »Monier« af en Betonstøbning (sædvanlig af Cementmørtel 1:3) med et eller to indlagte Jærnnnet. Vi kunne her ikke komme ind paa Beregningen af alle de forskellige specielle Former, hvori Kombinationen af Jærn og Cementmørtel efterhaanden er bleven udført — *Melan, Møller* o. fl., — og forudsætte derfor her alene den oprindelige Konstruktion, hvor Jærnnettet dannes af Rundjærn og lægges tæt ude ved Overfladen. Endvidere tænke vi her kun paa Bjælker, der ere paavirkede til ren Bøjning. Der anvendes i saa Fald kun ét Jærnnet, som lægges i den strakte Side og bestaar af 5—20 ^{m.m.} Rundjærnsstænger paalangs i 5—10 ^{cm.} Afstand — *Bærestængerne* — og 3—10 ^{m.m.} *Fordelingsstænger* paa tværs, i 5—15 ^{cm.} Afstand; de sidste indgaa ikke i Beregningen.

Hvorledes Beregningen principielt skal gennemføres, fremgaar tilstrækkeligt af § 52. Tværsnittet forudsættes plant ogsaa efter Bøjningen, Fibrenes Forlængelser og Forkortelser altsaa proportionale med Afstandene fra den neutrale Axe. Naar man saa kender Arbejdslinien for Cementmørtlen og Jærnets Elasticitetskoefficient, kunne ogsaa Spændingerne i de forskellige Punkter udtrykkes som Funktioner af Afstandene fra den neutrale Axe, og dernæst findes Axens Beliggenhed og Spændingernes absolute Størrelser ved de to Ligevægtsbetingelser mellem de indre Kræfter i et Tværsnit og de ydre Kræfter paa den ene Side af Tværsnittet: Summen af Kræfternes Projektioner paa og Momenter med Hensyn til Bjælkens Axe lig Nul.

Som vi have set i § 52, blive disse Beregninger dog saa komplicerede, — og her gælder dette endnu mere, fordi Jærnet kommer til, — at Methoden ikke bliver praktisk anvendelig, saa længe man ikke kender Cementmørtlens Arbejdslinie godt nok til en Gang for alle at beregne en Tabel til Bestemmelse af den neutrale Axes Beliggenhed. Indtil dette en Gang bliver muligt, ville vi derfor nøjes med følgende Tilnærmelse*): Cementmørtlens Arbejdslinie for Tryk antages retlinet, med Elasticitetskoefficient $E_c = 250000 \text{ kg./cm.}^2$, for Træk regnes med samme rette Linie op til Spændingen $s_0 = 8 \text{ kg./cm.}^2$.

*) Se »Ingeniøren«, 1897, S. 1.

og for højere Spændinger benyttes en anden ret Linie, for hvilken $E_c' = 70000 \text{ kg./cm.}^2$. Normalspændingerne i Tværnittet blive da fremstillede som Ordinater til en brækket Linie, som vist i Fig. 144, Pl. 16. Ved at indlægge den saaledes definerede Arbejdslinie i Fig. 140, Pl. 15, og 142, Pl. 16, vil man se, at de herved bestemte Spændinger ikke afvige meget fra Virkeligheden, for Trækspændingernes Vedkommende dog kun saa længe de ikke komme op over 15—16 kg./cm.².

Der indføres følgende Betegnelser (sammenlign Fig. 144):

E_c = Cementmørtlens Elasticitetskoefficient for Tryk og ligeledes for Træk op til Spændingen s_0 ($= 8 \text{ kg./cm.}^2$),

E_c' = Cementmørtlens Elasticitetskoefficient for Træk for større Spændinger end s_0 ,

E_i = Jærnets Elasticitetskoefficient,

h = Bjælkens Højde i cm.; Bredden er 1^{cm},

$F = \varphi \cdot h$ = Jærntværsnittet pr. 1^{cm} Bredde,

$a = \alpha \cdot h$ = Afstanden fra Jærntværsnittets Midtpunkt til Bjælkens Underkant,

x = $n \cdot h$ = den neutrale Axes Afstand fra Bjælkens Overkant.

s = største Trykspænding i Cementmørtlen,

t = største Trækspænding i —

r = Spændingen i Jærnet.

Betegnes endvidere Forlængelsen pr. Længdeenhed i de forskellige Punkter ved ϵ_s , ϵ_t , ϵ_{s_0} og ϵ_r , har man, da Tværnittet antages at holde sig plant:

$$\epsilon_s = k \cdot x, \quad \epsilon_{s_0} = k \cdot x_0, \quad \epsilon_t = k(h - x), \quad \epsilon_r = k(h - x - a),$$

og dernæst:

$$s = E_c \cdot \epsilon_s, \quad s_0 = E_c \cdot \epsilon_{s_0}, \quad r = E_i \cdot \epsilon_r,$$

$$t = E_c \cdot \epsilon_{s_0} + E_c' (\epsilon_t - \epsilon_{s_0}) = k [E_c x_0 + E_c' (h - x - x_0)],$$

hvoraf endelig:

$$\frac{s}{E_c x} = \frac{s_0}{E_c \cdot x_0} = \frac{t}{E_c x_0 + E_c' (h - x - x_0)} = \frac{r}{E_i (h - x - a)}.$$

Idet nu Summen af de indre Normalkræfter i Tværnittet

skal være Nul, faar man til Bestemmelse af den neutrale Axe:

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot s = \frac{1}{2} x_0 \cdot s_0 + \frac{s_0 + t}{2} (h - x - x_0) + F \cdot r,$$

og naar t , r og x_0 elimineres ved Relationerne ovenfor:

$$x^3 \left[\left(1 - \frac{E_c'}{E_c} \right) \frac{(s + s_0)^2}{2s} \right] + x \left[\frac{E_c'}{E_c} sh - \left(1 - \frac{E_c'}{E_c} \right) s_0 h + \frac{E_t}{E_c} F \cdot s \right] - \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{E_c'}{E_c} sh^2 + \frac{E_t}{E_c} Fs (h - a) \right] = 0. \quad (9)$$

Indføres heri Talværdierne:

$$E_c = 250000, \quad E_c' = 70000, \quad E_t = 2000000,$$

altsaa
$$\frac{E_c'}{E_c} = 0,28, \quad \frac{E_t}{E_c} = 8,$$

og endvidere

$$x = nh, \quad F = \varphi h, \quad a = ah,$$

faar man:

$$0,36 \left(1 + \frac{s_0}{s} \right)^2 n^3 + (0,28 - 0,72 \frac{s_0}{s} + 8\varphi) \cdot n - [0,14 + 8\varphi (1 - a)] = 0. \quad (9a)$$

Naar n er beregnet herved, skal Spændingernes Størrelse findes af Momentligningen; denne lyder, idet de ydre Kræfters Moment pr. 1 cm. Bredde betegnes ved M :

$$M = \frac{1}{3} sx^2 + \frac{1}{3} s_0 x_0^2 + s_0 (h - x - x_0) \left[x_0 + \frac{1}{2} (h - x - x_0) \right] + \frac{1}{2} (t - s_0) (h - x - x_0) \left[x_0 + \frac{2}{3} (h - x - x_0) \right] + F \cdot r (h - x - a). \quad (10)$$

Heri indføres:

$$x = nh, \quad x_0 = nh \cdot \frac{s_0}{s}, \quad h - x - x_0 = h \left(1 - n - n \frac{s_0}{s} \right),$$

$$t = s_0 + \frac{E_c'}{E_c} s \frac{h - x - x_0}{x} = 0,72 s_0 + 0,28 \cdot \frac{1 - n}{n} \cdot s, \quad (11)$$

$$r = \frac{E_t}{E_c} s \frac{h - x - a}{x} = \frac{8s}{n} (1 - n - \alpha), \quad (12),$$

hvorved Ligning (10) bliver:

$$\begin{aligned} M = sh^2 & \left[\frac{1}{3} n^2 \left(1 + \frac{s_0^3}{s^3} \right) \right. \\ & + \frac{s_0}{s} \left(1 - n - n \frac{s_0}{s} \right) \left(n \frac{s_0}{s} + \frac{1}{2} (1 - n - n \frac{s_0}{s}) \right) \\ & + 0,14 \left(\frac{1-n}{n} - \frac{s_0}{s} \right) \left(1 - n - n \frac{s_0}{s} \right) \left(n \frac{s_0}{s} + \frac{2}{3} (1 - n - n \frac{s_0}{s}) \right) \\ & \left. + \frac{8\varphi}{n} (1 - n - \alpha)^2 \right]. \quad (10a). \end{aligned}$$

Alle de første Led indenfor Parenthesen ere foruden af n kun afhængige af Forholdet $\frac{s_0}{s}$, derimod uafhængige af φ og α , hvorfor Ligningen kan skrives:

$$M = sh^2 [S + 8 \frac{\varphi}{n} (1 - n - \alpha)^2] \quad (10b).$$

Af (9a) og (10b) skulle n og s bestemmes, men Ligningerne indeholde desuden Størrelserne φ og α . Disse Størrelser kunne for Monierkonstruktioner overhovedet (ogsaa Hvælvinger) antages at ligge mellem Grænserne

$$0,02 > \varphi > 0,$$

$$0,2 > \alpha > 0,05.$$

$s =$	30		25		20		15	
	n	S	n	S	n	S	n	S
$\varphi = 0$	0,422	0,133	0,435	0,137	0,451	0,143	0,473	0,152
$\varphi = 0,005$	0,450	0,130	0,461	0,134	0,476	0,141	0,495	0,150
$\varphi = 0,01$	0,475	0,129	0,484	0,133	0,498	0,140	0,513	0,149
$\varphi = 0,015$	0,496	0,129	0,504	0,134	0,516	0,140	0,529	0,149
$\varphi = 0,02$	0,514	0,130	0,521	0,135	0,531	0,141	0,543	0,149

Idet nu α 's Indflydelse paa n er temmelig forsvindende, er foranstaaende Tabel beregnet, idet α er holdt konstant ($\alpha = \frac{1}{8}$, en omtrentlig Middelværdi).

Af (9a) ses, at α vil have størst Indflydelse paa n , naar φ har sin største Værdi; et Begreb om, hvor stor denne Virkning højst kan blive, faar man derfor ved følgende Værdier af n , der ere beregnede for $\varphi = 0,02$:

$s =$	30	15
$\alpha = 0,2$	0,499	0,531
$\alpha = 0,05$	0,528	0,555

naar man sammenligner med Tallene i sidste Linie af Tabellen ovenfor, ses disse Værdier højst at afvige 0,014 fra Tabellens Middelværdier.

Vi skulle nedenfor vise, hvorledes φ bestemmes. Naar q og den tilladelige Trykpaavirkning (s) for Betonen kendes, bestemmer man Bjælkens (Betonens) Dimensioner ved i Tabellen at finde det tilsvarende n og S og indføre disse Værdier i (10b), af hvilken Ligning h saa kan beregnes; og derefter findes r og t af (11) og 12).

For Bjælker, der kun paavirkes til ren Bøjning, behøver man dog ikke at gøre sig saa megen Ulejlighed. Man regner her sædvanligvis det tilladelige $s = 30^*)$; og af Tabellen ses, at man i saa Fald altid nøjagtigt nok kan sætte $S = 0,130$, hvorved (10b) bliver til:

$$M = sh^3 [0,130 + 8 \frac{\varphi}{n} (1 - n - \alpha)^2]; \quad (10c)$$

heri indføres det af Tabellen fundne n . — Vil man nøjes med noget mindre Nøjagtighed, hvilket man rolig kan bekvemme sig til ved Bestemmelsen af Betontykkelsen, kan man for sidste Led i Parenthesen i (10c) indføre en Middelværdi. Regnes $0,02 > \varphi > 0,008$ og $0,2 > \alpha > 0,05$, kommer dette Led til at

*) Tabellen skal senere benyttes, naar der foruden den rene Bøjning ogsaa haves en direkte Sammentrykning; dette er Grunden til, at de lavere Værdier af s ere medtagne.

gge mellem Grænserne 0,015 og 0,059; Middeltallet herimellem : 0,037, hvorved faas:

$$M = \frac{1}{8} sh^2, \quad (10d),$$

hvor s sættes = 30 kg./cm.². Denne Ligning er den samme som den, man vilde faa, hvis man saa bort fra Jærnet, forudsatte Hooke's Lov gældende og altsaa regnede den neutrale Axe liggende i Midten.

t og r skulle jo findes af (11) og (12); vil man ogsaa her søges med en Tilnærmelse, kan man indføre den omtrentlige Værdi $n = \frac{1}{2}$, hvorved faas ($s_0 = 8$):

$$t = 5,8 + 0,28 \cdot s, \quad (11a).$$

$$r = 8s(1 - 2\alpha). \quad (12a).$$

For $s = 30$ og Middelværdien $\alpha = \frac{1}{8}$ faas: $t = 14,2$, $r = 180$; naar altsaa Jærndlæget holder sig indenfor de sædvanlige Grænser, kan man ikke faa Jærnet nær saa stærkt paaavirket som tilladeligt, og man kan ikke undgaa at faa en Trækspænding i Cementmørtlen paa c. 14 kg./cm.². Dette er, som det ogsaa fremgaar af forrige §, naturligvis langt mere, end man ellers tillader; Grunden til, at man her tør gaa saa højt op, maa søges i, at Sikkerheden ikke er udtømt, selv om Cementmørtlen ogsaa skulde revne paa Træksiden. For det første kan man nok gaa ud fra, at t først naar Brudgrænsen, naar Momentet er voxet til mindst det dobbelte — t voxer jo ikke proportionalt med Momentet —; og dernæst er Bjælken endnu stabil, naar Betonen er revnet, idet Jærnet da optager Trækspændingerne.

Ved den sidste Betragtning faar man et Middel til at bestemme Dimensionerne af Jærnnettet. Hvis man nemlig antager, at Betonen er revnet paa Træksiden, og for Simpelteds Skyld, at den er revnet helt op til den neutrale Axe, saa har man en Bjælke, i hvilken Trykspændingerne optages af Betonen over den neutrale Axe, Trækspændingerne alene af Jærnet; selvfølgelig ligger den neutrale Axe ikke paa samme Sted nu som ovenfor, hvor Betonen regnedes med til at optage Trækspændingerne. Jærntværsnittets Størrelse bør nu bestemmes saaledes, at Tryk-Brudgrænsen for Betonen og Træk-Brudgrænsen for Jærnet naas samtidig.

Kaldes største Trykspænding i Betonen s' , Trækspændingen i Jærnet r' og den neutrale Axes Afstand fra Bjælkens Overkant x' , har man nu til Bestemmelse af x' , at Summen af Normalkræfterne i Tværsnittet skal være Nul, altsaa:

$$\frac{1}{2} s' \cdot x' = F \cdot r' = \varphi h \cdot r',$$

$$\text{hvor } \frac{s'}{E_c x'} = \frac{r'}{E_i (h - x' - a)}, \quad r' = 8s' \cdot \frac{h - x' - a}{x'}; \quad (13)$$

ved Indsættelse af r' 's Værdi faas:

$$x'^3 + 16\varphi h x' - 16\varphi h^2 (1 - \alpha) = 0,$$

$$x' = 8\varphi h \left[\sqrt{1 + \frac{1 - \alpha}{4\varphi}} - 1 \right]. \quad (14)$$

Naar man vil have, at s' og r' skulle forholde sig til hinanden ligesom de respektive Brudgrænser, for hvilket Forhold der foreløbig indføres Betegnelsen $\frac{1}{m}$, har man:

$$\frac{s'}{r'} = \frac{x'}{8(h - x' - a)} = \frac{1}{m},$$

$$\text{hvoraf } x' = \frac{8(1 - \alpha)}{8 + m} \cdot h; \quad (15)$$

og naar endelig de to Udtryk, (14) og (15), for x' sættes lig hinanden, findes ved Kvadrering og videre Udregning:

$$\varphi = \frac{4(1 - \alpha)}{m(m + 8)}. \quad (16)$$

Brudgrænsen for Jærnet maa her regnes lig Flydegrænsen, altsaa f. Ex. 2400 kg./cm.², for Betonen kan regnes 160—200 kg./cm.²; sætter man f. Ex. $m = 14,3$, faas:

$$\varphi = \frac{1 - \alpha}{80}. \quad (16a)$$

Ved Benyttelsen af denne Ligning maa det erindres, at det altid er fordelagtigst at lægge Jærnet saa tæt som muligt ned til Underkanten af Bjælken; jo mindre α er, des større

spænding faar Jærnet, des mere Nytte gør det altsaa; man elger altsaa α saa lille som muligt. Endvidere maa det indres, at Ligning (16) kun gaar ud paa at skaffe samme sikkerhed for Beton og Jærn, men at man intet faar at vide n, hvor stor Sikkerheden er. Vil man finde de absolute størrelser af Spændingerne s' og r' , maa man benytte Momentligningen, som, naar Betonen er revnet paa Træksiden, kommer til at lyde:

$$M = \frac{1}{2} s' \cdot x'^2 + F \cdot r' (h - x' - a); \quad (17).$$

heraf kan r' elimineres ved (13), og naar dernæst x' beregnes af (14) og indsættes, kan s' findes.

Dimensionsbestemmelsen af en Monierbjælke udføres nu saaledes: man vælger α , finder φ af (16 a) og endelig h af (10 c) eller (10 d). Inden man slaar en Værdi af α fast, maa man naturligvis danne sig et foreløbigt Skøn over baade Bjælkens Styrke og Jærnstængernes Diameter.

Exempel. En Monierplade understøttes langs sine to Sider og skal bære en Belastning af 1000 kg. pr. m.², incl. Egenvægten; Afstanden mellem Understøtningerne er 2,0 m.; bestem Dimensionerne.

Største Moment er pr. 1 m. Bredde $\frac{1}{8} \cdot 1000 \cdot 2^2 = 500$ kg. m., altsaa pr. 1 cm. Bredde $M = 500$ kg. cm.

Af (10 d) findes med $s = 30$:

$$h = \sqrt{\frac{6M}{s}} = \sqrt{\frac{M}{5}} = 10 \text{ cm.}$$

Naar man vil have ca. 1 cm. Beton udenfor Jærnet, kan man sætte $a = \text{ca. } 1,5 \text{ cm.}$, altsaa $\alpha = 0,15$, hvorefter (16 a) giver

$$\varphi = \frac{0,85}{80} = 0,0106,$$

altsaa $F = 0,106 \text{ cm.}^2$. Et Stk. 10 m. Rundjærn har et Areal paa $0,785 \text{ cm.}^2$; man kan følgelig give Bærestængerne 10 m. Diameter naar man lægger dem i ca. 7,5 cm. Afstand.

Man kan nu, efterat α og φ ere bestemte, gennemføre en nøjagtigere Beregning af h ved (10 c). For $\varphi = 0,0106$ findes af Tabellen ved Interpolation $n = 0,478$, hvorved:

$$8 \frac{\varphi}{n} (1 - n - a)^2 = 0,025,$$

og altsaa

$$h = \sqrt{\frac{500}{0,155 \cdot 30}} = 10,4 \text{ cm.}$$

Af (11) findes endvidere $t = 14,6 \text{ kg./cm.}^2$, og af (12) $r = 187 \text{ kg./cm.}^2$.

For at finde, hvilken Sikkerhed man har, naar Betonen paa Træksiden er revnet, benyttes (14), der giver

$$x' = 8 \cdot 0,0106 \cdot 10,4 \cdot \left[1 + \frac{0,85}{0,0424} - 1 \right] = 3,17 \text{ cm.}$$

der næst findes af (13):

$$r' = 8 \cdot s' \cdot \frac{10,4 - 3,17 - 1,5}{3,17} = 14,5 \cdot s',$$

og endelig af (17):

$$M = \frac{1}{2} s' \cdot 3,17^2 + 0,0106 \cdot 10,4 \cdot 14,5 s' \cdot 5,73 = 12,5 \cdot s',$$

$$s' = \frac{500}{12,5} = 40 \text{ kg./cm.}^2, \quad r' = 580 \text{ kg./cm.}^2.$$

Der haves altsaa en Sikkerhed af ca. 5, selv efterat Betonen paa Træksiden er revnet.

IV. Træ.

§ 57. Træ indtager en særlig Stilling mellem Byggematerialerne ved sin udpræget fibrede Struktur, hvorefter følger en højst forskellig Styrke overfor Paavirkninger af forskellig Art og i forskellig Retning i Forhold til Fibrene. Endvidere er Træ og Træ ofte højst forskellige Ting, dels som Følge af dets Oprindelse — Naaletræer, Løvtræer — dels som Følge af dets øjeblikkelige Tilstand, navnlig dets Fugtighedsgrad. Det skal lige nævnes, at Stykker fra Midten af Stammen almindeligvis ere betydelig svagere end fra det faste Ved i nogen Afstand fra Midten; dette gælder dog ikke Eg. Endvidere at frisk fældet Træ kan vise indtil 75 % mindre Styrke end tørret, at Maximum af Styrke findes for 3—4 % Fugtighed, hvilket dog ingen praktisk Betydning har, da Træet i Anven-

elserne altid indeholder langt mere Fugtighed (lufttørret Træ er 12—15 %), og endelig at Genoptagelse af Fugtighed svækker akkurat lige saa meget som den oprindelig i Træet værende, medens dog længere Tids Nedsænkning i Vand ikke evirker nogen yderligere Forringelse af Styrken *). Sommerfeldet Træ er svagere end vinterfeldet; ved Lagring i længere Tid voxer Styrken, og Tilvæksten er stærkest for sommerfeldet Træ, saa der efter nogen Tids Forløb ikke er stor Forskel; tyrkens Tiltagen ved Lagringen udstrækker sig sandsynligvis ikke over længere Tid end et Aar **). — Styrken voxer endvidere med Vægtfylden; baade *Bauschinger* og *Johnson* finde en lineær Relation som Udtryk herfor, *Bauschinger* angiver Brudgrænsen for Tryk = B_c , Vægtfylden ved 15 % Fugtighed = δ) for Naaletræ:

$$B_c = 1000\delta - 100 \text{ kg./cm.}^2.$$

Efter disse mere almindelige Bemærkninger skulle vi i det følgende indskrænke os til saadanne Angivelser, der gælde for lufttørret Træ, som det anvendes til Bygningskonstruktioner.

1. *Elasticitetsforhold.* Blivende Formforandringer indtræde allerede for temmelig smaa Paavirkninger, dog i mindre Grad for Tryk end for Træk ***); *Elasticitetsgrænsen* ligger altsaa temmelig lavt, maaske ved Nul, men der foreligger forøvrigt meget faa Undersøgelser herover.

Elasticitetsmaalinger ere udførte af forskellige Experimentatorer. I Fig. 145, Pl. 16, er vist en Arbejdslinie for Træk og Tryk parallelt med Fibrene for Lærketræ, som den er maalt af *Tetmajer* †); Maalingen er ikke fortsat længere end til omtrent den halve Brudgrænse. I Hovedsagen ses Arbejdslinien at være omtrent retlinet; naar man har de enkelte Af-

*) Resultater af meget udstrakte Undersøgelser af Tommer i Nordamerika (U. S. timber investigations, se *Johnson: Materials of construction*, S. 672—77). Den sidste Slutning er dog kun støttet paa Forsøg med Træ, der har ligget højst 6 Maaneder i Vand.

**) *Bauschinger: Mittheilungen*, Heft 16. Se ogsaa *Wijkander: Untersuchung der Festigkeitseigenschaften schwedischer Holzarten*, Göteborg 1897, S. 175.

***) Små. de af *Bauschinger, Mittheilungen*, Heft 9, S. 3—4, 7 og 8—9, anførte Maalinger. Ogsaa *Wijkander: Untersuchung der Festigkeitseigenschaften schwedischer Holzarten*, Göteborg, 1897, S. 6—7.

†) *Mittheilungen*, Heft 2, S. 21 og 24.

læsninger af Forlængelserne forelagt, findes der dog som oftest en mere eller mindre skarpt markeret *Proportionalitetsgrænse*, men Angivelserne af dens Beliggenhed variere stærkt. For Træk finder *Wijkander**) den i Almindelighed mellem $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{3}$ af Brudgrænsen, hvorimod *Bauschinger***) angiver, at den falder meget nær sammen med Brudgrænsen; efter *Tetmajer****) er den højst variabel, snart omtrent lig Brudgrænsen, snart omtrent Nul, meget sjældent tydelig fremtrædende; gennemsnitlig angiver *Tetmajer* 0,52 af Brudgrænsen. En lignende Uenighed hersker overfor Proportionalitetsgrænsen for Tryk. — Grunden til disse forskellige Angivelser maa søges i, at Træ overhovedet ikke kan siges at følge Hooke's Lov nøjagtigt, lige saa lidt som det følger nogen anden bestemt Lov; der er langt flere Uregelmæssigheder i Differenserne mellem de aflæste Formforandringer end f. Ex. for smedeligt Jærn, og det bliver derfor i højere Grad en Smagssag, hvor man vil placere Proportionalitetsgrænsen; Resultaterne af Forsøgene paavirkes stærkt af tilfældige smaa Knaster, vekslede Bredde af Aarringene og deraf følgende Uhomogenitet o. s. v. I Fig. 145 ses i Træk-Arbejdslinien en paafaldende Uregelmæssighed ved det første observerede Punkt; dette er meget ofte Tilfældet ved de smaa Belastninger. I Fig. 146, Pl. 16, ses tre Arbejdslinier for Bøjning, saaledes som *Tetmajer*†) har maalt dem for Lærketræ. Noget af den samme Uregelbundenhed viser sig her; den ene Arbejdslinie (Kærnetræ) er omtrent retlinet lige op til Brudgrænsen, — Maalingerne ere fortsatte helt op til denne —, de to andre, som begge gælde for det tætte Sidetræ, krumme sig i forskellig Grad. Men ikke desto mindre træder Proportionalitetsgrænsen almindeligt i et bestemt frem ved Bøjning; som Middeltal af en lang Række Forsøg angiver *Wijkander*††), at den udgør 0,58 af Brudgrænsen for Løvtræer, 0,64 for Naaletræer; efter *Bauschinger* og *Tetmajer*†††) ligger

*) *Untersuchung der Festigkeitseigenschaften etc.*, S. 8.

**) *Mittheilungen*, Heft 9, S. 6.

***) *Mittheilungen*, Heft 2, S. 10.

†) *Mittheilungen*, Heft 2, S. 28—33.

††) *Untersuchung der Festigkeitseigenschaften etc.*, S. 174.

†††) Sm. Winkler: *Die hölzernen Balkenbrücken*, 2te Aufl., Wien, 1887, S. 17. Winkler giver en meget udførlig Oversigt, ogsaa over de af forskellige Experimentatorer fundne Værdier af Elasticitetskoefficient, Brudgrænse etc.

en mellem 0,36 og 0,53, gennemsnitligt ved 0,44 af Brudrænsen (Brudmodulus for Bøjning). Ogsaa *Elasticitetskoefficienten* synes temmelig variabel, naar man gennemser en Række enkelte Forsøgsresultater; de Middeltal, der angives, ligge dog paa faa Undtagelser nær mellem 100000 og 130000 kg./cm.². Vi skulle anføre de af *Wijkander**) og *Tetmajer***) angivne Middelværdier; Tallene er tons pr. cm.²:

	Wijkander			Tetmajer		
	E_t Træk	E_c Tryk	E_b Bøjning	E_t Træk	E_c Tryk	E_b Bøjning
Bøg	134	129	121	180	169	
Eg	115	104	101	108	103	99
Ask			93			
Elm			77			
Birk	116	113	114			
El	110	105	104			
Lind			61			
Fyr	129	121	112	120	119	86
Lærk			67	131	114	105
Rødgran	117	111	106	129	111	86
Ædelgran				113	100	86

Som man ser, afvige *Elasticitetskoefficienterne* for de forskellige Slags Paavirkninger ikke meget fra hinanden; en Undtagelse herfra danne dog *Tetmajers* Værdier af E_b , der ere betydelig lavere end E_c og E_t . For de Træsorter, der anvendes mest — *Eg* og *Fyr*, — kan man altid regne $E = 110000$ kg./cm.².

2. *Styrkeforhold*. Alle Erfaringer vise, at Tryk- og Bøjningsforsøg ere bedst egnede til at give et Begreb om Styrken af Træ, og det er tillige de Arter af Paavirkning, som Træ sædvanlig udsættes for i Konstruktionerne. Trykforsøgene have været udførte med kvadratiske Prismer af forskellig Højde, Tærninger eller Cylindre, og Resultaterne kunne ikke umiddelbart sammenlignes, idet Formen af Prøvestykket, som sæd-

*) *Untersuchung der Festigkeitseigenschaften etc.*, S. 176.

**) *Mittheilungen*, Heft 2, Tab. I (S. 48).

vanligt, har nogen Indflydelse. *Wijkander**) har sammenlignet kvadratiske Prismer af forskellig Højde og angiver som Gennemsnit, naar Styrken for $h = 1,5 b$ sættes $= 1$;

$h : b =$	3	2	1,5	1,0
Naaletræer:		0,96	1,0	1,07
Løvtræer:	0,95	0,98	1,0	1,03.

Endvidere finder han, at Grundfladens absolute Størrelse ikke har nogen kendelig Indflydelse; der sammenlignedes dog kun to Størrelser af Grundfladen ($b = 8-10^{\text{cm}}$ og $b = 6-7^{\text{cm}}$). — Bruddets Udseende er naturligvis afhængigt af Prøvestykkets Form. Fig. 147, Pl. 17, viser (efter *Tetmajer*) to typiske Maader for Tærninger; de enkelte Fibre ses at være stukkede og bøjede, saa der danner sig en Vulst, men de to Brudstykker kunne saa forøvrigt beholde deres indbyrdes Stilling, eller de kunne glide paa hinanden (Fig. 147 b); naar $h > b$, er det sidste det almindeligste. Hvor der findes Knaster, udgaar Bruddet som oftest fra dem; undertiden kan der presses Kiler ud til Siden, ligesom vi have set for Sten (Fig. 129, 130). — Styrken overfor Træk er langt større end ovenfor Tryk, 2—3 Gange saa stor. Ved Bøjning skulde man derfor antage, at Bruddet altid maatte foregaa paa den Maade, at der først dannede sig en Vulst, som ovenfor beskrevet, paa den trykkede Side, hvorefter det endelige Brud maatte indtræde paa Træksiden. Efter *Wijkander* kan denne Stukning paa Tryksiden dog langt fra altid observeres, saa det meget ofte ser ud, som om Bruddet virkelig indtraadte først paa Træksiden; dette maa formodentlig forklares ved, at Formforandringerne for Tryk i Nærheden af Brudgrænsen kunne voxe hurtigt, hvorved den neutrale Axe flytter sig bort fra Midten.

Vi skulle nu anføre nogle Resultater angaaende Styrken overfor Tryk. *Tetmajer***) og *Wijkander****) angive som Middeltal for Brudgrænsen B_c for Tryk parallelt med Fibrene (i kg./cm.²):

*) *Untersuchung der Festigkeitseigenschaften etc.*, S. 172—73.

**) *Mittheilungen*, Heft 2, Tab. I, S. 48.

***) *Untersuchung der Festigkeitseigenschaften etc.*, S. 176.

	Wijkander	Tetmajer
Bøg	482	320
Eg	419	343
Ask	418	
Elm	431	
Birk	431	
El	378	
Lind	322	
Fyr	414	246
Lærk	357	321
Rødgran	369	276
Ædelgran		283

Wijkanders Tal ere fundne for kvadratiske Prismer med $h: b = 1,5$, *Tetmajers* for Tærninger, saa de skulle egentlig reduceres efter ovenstaaende Forhold for umiddelbart at kunne sammenlignes. Denne Reduktion har dog aabenbart ingen Betydning i Sammenligning med den store Forskel, der findes mellem de to Rækker Tal; Forskellen vilde forøvrigt derved blive større. Ved de svenske Forsøg varierede Fugtighedsgraden mellem 10 og 14 %, ved *Tetmajers* var Træet fugtigere, for Eg 24—25 %, for Fyr 21—22 %, kun for Gran 14—16 %; herved forklares tildels den mindre Styrke, som *Tetmajer* har fundet. *Bauschingers* Resultater*) ere langt højere end *Tetmajers*; som Middeltal af en længere Forsøgsrække fandt han:

for Lærk 485 kg./cm.²

- Fyr 407 —

- Rødgran 398 —;

Fugtighedsgraden var her ca. 15 %, Prøvestykkerne vare Prismer med $h = 1,5b$. — For Eg angiver »Hütte« endog 660 kg./cm.².

For dansk Naaletræ kan anføres følgende Resultater**), der ere fundne ved cylindriske Prøvestykker af 10^{cm}. Højde, 6^{cm}. Diameter:

*) *Mittheilungen*, Heft 16, Tab. II, »Schelbe« g.

**) C. V. Meldahl: *Nogle Undersøgelser over dansk og fremmed Naaletræs Styrke*, Kjøbenhavn, 1893, Tab. 3, 14, 15, 17.

Rødgran (Splint) . . .	371 kg./cm. ²	
" (Kærne) . . .	301	—
Ædelgran	366	—
Bjergfyr	323	—

Vi skulle dernæst se paa Styrken overfor andre Paavirkninger. Af saadanne ere foruden Træk og Bøjning navnlig Forskydning paalangs ad Fibrene og Tryk vinkelret paa Fibrene af praktisk Betydning. Idet Brudgrænserne betegnes: for Træk B_t , for Tryk B_c (begge paalangs ad Fibrene), for Bøjning B_b (beregnet efter Formlen $\frac{Me}{I}$), for Forskydning paalangs B_f , angives af *Wijkander* og *Tetmajer*:

	Wijkander			Tetmajer		
	$B_t : B_c$	$B_b : B_c$	$B_f : B_c$	$B_t : B_c$	$B_b : B_c$	$B_f : B_c$
Bøg	2,88	1,93	0,31	4,19	2,09	0,27
Eg	2,64	1,79	0,25	2,81	1,75	0,22
Ask		1,75	0,29			
Elm		1,42	0,31			
Birk	2,80	1,77	0,25			
El	2,33	1,70	0,27			
Lind		2,00				
Fyr	2,48	1,60	0,21	2,93	1,66	0,25
Lærk		1,25	0,26	2,21	1,66	0,22
Rødgran	2,21	1,64	0,22	2,18	1,58	0,24
Ædelgran				1,88	1,55	0,22

De anførte Værdier af $B_f : B_c$ for Naaletræ ere en Del større, end hvad man finder andet Steds. Saaledes faar man af en lang Række amerikanske Forsøg*) med forskellige Slags Fyr $B_f : B_c = 0,15$, medens Værdierne for Eg, Ask og Elm stemme godt med dem i Tabellen. Ligeledes har *Bauschinger* gennemsnitlig fundet $B_f : B_c = 0,16$ for Naaletræ.

Der er ikke nogen væsentlig Forskel paa, om Forskydningen paalangs ad Fibrene foregaar radialt eller tangentielt til Aarringene; de anførte Tal ere Middeltal for begge Ret-

*) *Johnson: Materials of construction*, S. 670.

inger. Derimod spiller det en betydelig Rolle, om Kraften virker parallelt med Fibrene eller vinkelret paa disse (Brudladen i begge Tilfælde paalangs). De anførte Tal gælde, naar Kraften, som sædvanligt i de praktiske Anvendelser, virker parallelt med Fibrene; naar den derimod er rettet vinkelret paa disse, angiver *Wijkander* *), at Brudgrænsen gennemsnitlig kun bliver:

for Løvtræer 0,47
- Naaletræer 0,32

af Tallene i Tabellen ovenfor.

Hvad Styrken mod Tryk vinkelret paa Fibrene angaar, saa foreligger der ikke ret mange Undersøgelser heraf. Efter- som Trykket virker vinkelret paa Aarringene eller tangentielt til dem, finder *Wijkander* **), at Brudgrænsen gennemsnitlig er:

for Fyr . . . 0,097 eller 0,093
- Gran . . 0,19 - 0,21 (Min.: 0,09—0,10)
- Lærk . . 0,12 - 0,16

af Brudgrænsen for Tryk paalangs. — Af de af *Johnson* ***) anførte Resultater udledes følgende Forhold:

for Fyr . . . 0,097
- Eg 0,13.

For de almindeligst anvendte Træsorter — Fyr og Eg — kan man herefter gennemsnitlig regne Brudgrænsen til:

	Eg	Fyr
For Tryk parallelt med Fibrene	450	400
• Træk ,	1200	1000
• Bøjning	750	660
• Forskydning parallelt med Fibrene		
a. Kraften $\neq$ Fibrene	100	60
b. . . . $\perp$.	50	20
• Tryk vinkelret paa Fibrene	58	40

*) *Untersuchung der Festigkeitseigenschaften etc.*, S. 169.

**) *ibid.*, S. 166.

***) *Materials of construction*, S. 670.

3. *Tidens Indflydelse.* Der tænkes her ikke paa Forandringer i Træets Kvalitet i Tidens Løb, men paa Virkningen af en langvarig Paavirkning. Efter nogle amerikanske Forsøg at dømme synes det nemlig, som om Træ ikke i Længden kan modstaa stort mere end Halvdelen af den Brudbelastning, man finder ved de sædvanlige Forsøg. Dette paavistes allerede i 1840 af *Haupt*, og i 1880 bekræftedes det ved Forsøg af *Thurston**). Ved disse sidste anvendtes der sinaa Bjælker af Fyr med kvadratisk Tværsnit (Sidelinie 2,5^{cm.}) og ca. 1^{m.} Længde. Efterat Brudmodulus for Bøjning var bestemt paa sædvanlig Maade, belastedes 3 Bjælker med 95 %, 3 med 80 % og endelig 3 med 60 % heraf. De 3 første brødes i Løbet af to Dage, de 3 næste efter 3½ Dage, 5 Dage og lidt over en Maaned, og de 3 sidste efter 8½, 12 og 15 Maaneders Forløb. Nedbøjningerne maalttes fra Tid til anden og fandtes at voxe hele Tiden. Materialet af de brækkede Stænger undersøgtes senere og fandtes at være ubeskadiget.

Fænomenet er ganske analogt med det i § 44, Slutningen, meddelte om smedeligt Jærn (*Vicat's*, *Thurston's* og *Considères* Forsøg). De her refererede Forsøg ere temmelig faa til at tillade nogen bestemt Slutning angaaende Beliggenheden af den »virkelige« Brudgrænse — den Belastning, som kan taales i det uendelige — men det maa dog antages, at den »virkelige« Brudgrænse ligger betydelig lavere end den sædvanlig bestemte.

4. *Den tilladelige Paavirkning* sættes lig $\frac{1}{n}$ af Brudbelastningen, hvor Sikkerhedskoefficienten n i Almindelighed tages lig 6 — 10, den mindste Værdi for interimistiske Konstruktioner eller ved absolut rolig (stødfri) Belastning.

Til at modstaa direkte Træk anvendes Træ sjældent; det er nemlig vanskeligt at faa Trækket overført dertil paa Grund af den ringe Modstandsevne mod Forskydning paalangs. Overfor Tryk og Bøjning anvendes Træ derimod særdeles ofte; man kan regne som tilladeligt:

for Tryk	40—70 kg./cm. ²	=	550—950 $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$
- Bøjning.	60—100	—	= 800—1350 —

*) *Thurston*: Materials of engineering, Part I. New - York 1893, S. 114 o. f.

for Forskydning paalangs, Eg: $10 \text{ kg./cm.}^2 = 130 \text{ } \mathfrak{W}/\square''$
 - — — — — Fyr: $6 \text{ — — — } = 80 \text{ —}$

De laveste Værdier ere de hyppigst anvendte.

Ved den angivne Paavirkning til Tryk er det forudsat, at der ikke er Tale om stor Længde i Forhold til Tværsnitsdimensionerne — Søjler —; dette Tilfælde komme vi senere tilbage til. Hvor et trykket Stykke Tømmer støtter mod Siden af et andet Stykke Tømmer, maa man tage Hensyn til den ringe Modstandsevne overfor Tryk vinkelret paa Fibrene; dog kan man her meget godt regne med en mindre Sikkerhedskoefficient end ovenfor angivet, fordi Trykket sædvanligvis kun træffer paa en lille Flade af et længere Stykke Tømmer, og i saa Fald indtræder Brud naturligvis ikke saa let som for et kort Stykke, der trykkes paa hele sin Sideflade. Der foreligger ingen Forsøg, som direkte tage Sigte paa dette Forhold.

Foruden til den angivne Paavirkning til Træk og Tryk i bøjede Legemer maa man ved Dimensionsbestemmelse af Bjælker ogsaa tage Hensyn til Forskydningsspændingen paalangs. I § 38, Slutningen, er vist et Exempel herpaa. Vi skulle her udlede et almindeligt Kendetegn paa, om Forskydningen er farligst.

For en Bjælke med rektangulært Tværnit, Bredde b og Højde h , Længde l , bestemmes Dimensionerne ved

$$r = \frac{6M}{bh^2} \text{ eller } f = \frac{3}{2} \frac{Q}{b \cdot h},$$

hvor r betegner den tilladelige Paavirkning til Træk eller Tryk ved Bøjning, f den tilladelige Forskydningspaavirkning, M Momentet, Q Transversalkraften. Naar b forudsættes given, levere de to Formler samme Værdi af h , hvis

$$\frac{6M}{bhr} = \frac{3Q}{2bf},$$

$$\text{altsaa naar} \quad \frac{h}{l} = \frac{f}{r} \cdot \frac{4M}{Ql}, \quad (18)$$

og hvis $\frac{h}{l}$ er større end denne Værdi, skal man regne med

Forskydningen. For Fyr kan man sætte $\frac{f}{r} = \frac{1}{16} - \frac{1}{12}$, for

Eg $\frac{f}{r} = \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$.

For en Bjælke, der er simpelt understøttet i begge Ender og ensformig belastet med p pr. Længdeenhed, haves $M = \frac{1}{8}pl^2$, $Q = \frac{1}{2}pl$, $\frac{4M}{Ql} = 1$. En saadan Bjælke af Fyr skal alt-

saa beregnes for Forskydning, naar $\frac{h}{l} > \frac{1}{16} - \frac{1}{12}$, hvilket forøvrigt sjældent indtræffer.

Ved en Træbjælkes Understøtninger virke Reaktionerne som Tryk vinkelret paa Fibrene; man maa da sørge for at Trykket pr. Arealenhed ikke bliver for stort.

FJERDE AFSNIT.

Sammensatte Paavirkninger af lige Bjælker.

§ 58. Naar en Bjælke er paavirket af ganske vilkaarlige Kræfter, skulle Spændingerne i de forskellige Snit bestemmes ved det samme almindelige Princip, som er anvendt i de tidligere undersøgte specielle Tilfælde: de indre Kræfter i Snittet skulle holde Ligevægt mod de ydre Kræfter paa den ene Side af Snittet. Inden vi give os til at opskrive Ligevægtsbetingelserne, vil det være bekvemmest at se lidt nærmere paa de ydre Kræfter og erstatte dem med resulterende Enkeltkræfter og Kraftpar.

Alle de ydre Kræfter kunne tænkes forskudte i deres Retningslinier hen til Skæringspunkterne med det betragtede Normalsnit i Bjælken og dér opløste i en Komposant i Normalnittet og en vinkelret derpaa; alle Komposanterne i Snittet kunne dernæst sammensættes til en Enkeltkraft T , ligeledes alle Komposanter vinkelrette paa Snittet til en Enkeltkraft N . Kraften N flyttes hen til Snittets Tyngdepunkt, hvorved man faar en central Normalkraft N , der virker til direkte Strækning eller Sammentrykning, og et Kraftpar M , hvis Plan er vinkelret paa Snittet, og som bevirker en Bøjning. Kraften T flyttes ligeledes til Tyngdepunktet, hvorved faas en central Kraft T , der bevirker en ren Forskydning, og et Kraftpar M_v , der fremkalder Vridning. — Reduktionen af Kræfterne kan naturligvis udføres paa forskellige andre Maader, men Slut-

ningsresultatet bliver det samme. Man kan f. Ex. flytte alle Kræfterne parallelt med sig selv, til de skære Bjælkens Axe i det Punkt, hvor den korteste Afstand mellem Kraft og Axe træffer denne. Derved indkommer der en Række Kraftpar, som kunne opløses i Komposanter vinkelret paa Normalsnittet og i dette; de sidstes Resultant er det vridende Moment M_v ; dette er altsaa lig Summen af Kræfternes Momenter med Hensyn til Bjælkens Axe. Alle Kræfterne, der nu skære Axen, kunne opløses i to Komposanter, i og vinkelret paa Axen: Summen af Komposanterne i Axen er lig den centrale Normal-kraft N , og Kræfterne vinkelret paa Axen give som tidligere et bøjende Moment M og en forskydende Kraft T .

Ganske i Almindelighed er et vilkaarligt Snit i Bjælken altsaa paavirket baade til Træk eller Tryk, Forskydning, Vridning og Bøjning. Tidligere have vi undersøgt hver af disse Paavirkninger for sig, her skulle vi nu se, hvorledes man kan sammensætte de enkelte Virkninger. I mange praktisk forekommende Tilfælde ere Forholdene dog ikke slet saa komplicerede som ovenfor beskrevet; saaledes falder ved de fleste Bygningskonstruktioner — men ikke ved Maskinkonstruktionerne — det vridende Moment M_v bort. Vi skulle derfor begynde med at betragte flere simplere Tilfælde, som have stor praktisk Betydning, og først Paavirkning ved Normalspændinger alene, altsaa Kombinationer af Træk eller Tryk og Bøjning; som sædvanligt er Bøjningen rigtignok næsten altid ledsaget af en Forskydning, men herfra se vi foreløbig bort ligesom tidligere ved den første Behandling af Bjælker.

I. Paavirkning ved Normalspændinger alene, uden Hensyn til Nedbøjningerne.

§ 59. Bøjning og Træk eller Tryk. Hvis Bjælken, som vi tidligere have antaget, har en Symmetriplan, hvori alle ydre Kræfter virke, er Bøjningsspændingen i de yderste Fibre udtrykt ved:

$$\sigma_1 = + \frac{Me_1}{I} = + \frac{M}{W_1} \text{ og } \sigma_2 = - \frac{Me_2}{I} = - \frac{M}{W_2},$$

eller naar vi benytte Fællesbetegnelsen e for Afstandene e_1 og e_2 , uden at de derfor behøve at være lige store:

$$\sigma = \pm \frac{Me}{I} = \pm \frac{M}{W}.$$

Naar der desuden virker en central Normalkraft N og Bjælkens Tværsnit er F , faas herfra en Spænding i alle Punkter:

$$\sigma = \frac{N}{F},$$

hvor σ har samme Fortegn som N , og N regnes positiv for Træk, negativ for Tryk. De angivne Spændinger virke i samme Retning og kunne derfor uden videre adderes; naar M og N virke samtidigt, faas derfor den største Spænding i de yderste Fibre:

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W}. \quad (1).$$

Dette Tilfælde er altsaa simpelt nok. Men nu hænder det ikke sjældent, at Kraftplanen ikke er en Symmetriplan for Bjælken; vi skulle se, hvorledes man saa maa bære sig ad.

Vi betragte en Bjælke med vilkaarligt Tværsnit, paavirket af en excentrisk Normalkraft N med Angrebepunkt K (Fig. 148, Pl. 17), eller hvad der er det samme, af en central Normalkraft N og et bøjende Moment $M = N \cdot f$, idet f er K 's Afstand fra Tyngdepunktet O . Tværnittet forudsættes at være plant ogsaa efter Bøjningen. Ved Bøjningen drejes Tværnittets Plan en vis Vinkel og skærer da den Plan, hvori det oprindelig laa, i en ret Linie nn , den *neutrale Axe* (kaldes ogsaa *Nullinien*); Fibrene i denne beholde deres Længde uforandret, Spændingen er altsaa ogsaa Nul her. I hvilke som helst andre Punkter af Tværnittet foregaar der en Forlængelse eller Forkortelse af Fibrene og fremkaldes altsaa Træk- eller Trykspændinger; da Formforandringen er forudsat proportional med Afstanden fra den neutrale Axe, maa dette ogsaa gælde Spændingen, idet vi gaa ud fra Hooke's Lov. Vi lægge nu i Tværnittet et skævvinklet Koordinatsystem med Tyngdepunktet O som Begyndelsespunkt, v -Aksen gennem Kraftangrebepunktet K og u -Aksen $\neq nn$ og opskrive Ligevægtsbe-

tingelserne. De elementære indre Kræfter ere $\sigma \cdot dF$, hvor man kan sætte $\sigma = \sigma_0 + b \cdot v'$, idet σ_0 betegner Spændingen i u' -Aksen. Man faar, idet $\int v' dF = 0$ og $\int u' dF = 0$:

$$N = \int \sigma dF = \int \sigma_0 dF + b \int v' dF = \sigma_0 \cdot F. \quad (2).$$

$$N \cdot f = M = \int \sigma \cdot v' dF = \sigma_0 \int v' dF + b \int v'^2 dF = b \cdot I_{u'}. \quad (3).$$

$$0 = \int \sigma \cdot u' dF = \sigma_0 \int u' dF + b \int u' \cdot v' dF = b \cdot Z_{u'v'}. \quad (4).$$

F betegner Tværnittets Areal, $I_{u'}$ og $Z_{u'v'}$ dets Inertimoment om u' -Aksen og Centrifugalmoment med Hensyn til u' - og v' -Aksene i skævvinklede Koordinater.

Af (2) findes:

$$\sigma_0 = \frac{N}{F} \text{ og af (3): } b = \frac{M}{I_{u'}},$$

altsaa:
$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv'}{I_{u'}}. \quad (5).$$

Spændingen σ_0 i Tyngdepunktet er uafhængig af Momentet.

Af (4) faas u' -Aksens Retning bestemt; Betingelsen $Z_{u'v'} = 0$ udtrykker nemlig, at *Koordinataxerne ere konjugerede Diametre i Tyngdepunktets Inertiellipse*. Endelig kan Beliggenheden af den neutrale Axe nn findes ved (5), idet $v' = v'_0$ skal give $\sigma = 0$; altsaa er:

$$v'_0 = -\frac{N \cdot I_{u'}}{F \cdot M} = -\frac{I_{u'}}{F \cdot f} = -\frac{i_{u'}^2}{f}, \quad (6).$$

hvor $i_{u'}$ er Inertiradius om u' -Aksen i skævvinklede Koordinater.

Inden vi gaa videre i den almindelige Udvikling, ville vi betragte et specielt simpelt Tilfælde, nemlig at v' -Aksen, *Kraftlinien*, falder i den ene af Tværnittets Hovedaxer; u' -Aksen er da ifølge (4) den anden Hovedaxe, og $I_{u'}$ bliver til Inertimomentet I om denne (i retvinklede Koordinater). Hvis endvidere $f = \infty$, d. v. s. at Tværnittet kun er paavirket af et bøjende Moment M , faas $v'_0 = 0$, saa den neutrale Axe falder i u' -Aksen, og Spændingen i det vilkaarlige Punkt er:

$$\sigma = \frac{Mv}{I};$$

dette er ganske den samme Formel, som gælder, naar Kraftplanen er en Symmetriplan for Bjælken, hvorefter ses, at den tidligere udviklede Bøjningstheori gælder uafhængigt af Forudsætningen om Symmetri, naar blot Kraftplanen indeholder den ene Hovedaxe for Tværnittene. Af (5) faas ogsaa, naar der foruden Momentet virker en Normalkraft N :

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} + \frac{Mc}{I} = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W},$$

ganske analogt med (1), saa man ogsaa her ligefrem kan addere den ensformig fordelte Spænding fra Normalkraften til Bøjningsspændingen.

Da Normalspændingerne saaledes uden videre kunne adderes, kan man ogsaa behandle Virkningen af flere samtidigt optrædende bøjende Momenter paa den Maade, og da Kraftpar kunne opløses og sammensættes ligesom Kræfter, kan man alene herved finde Spændingerne fra et ikke i en Hovedaxe virkende Moment M . I Fig. 149, Pl. 17, virker der et Moment M i Kraftlinien OK ; M opløses i Komposanterne $M_1 = M \sin \beta$ efter Axen 2 og $M_2 = M \cos \beta$ efter Axen 1, og for et vilkaarligt Punkt i Afstandene x og y fra Axerne bliver Spændingen:

$$\sigma = \frac{M_1 y}{I_1} + \frac{M_2 x}{I_2}.$$

Det, der i Praxis interesserer mest, er den største Spænding; hvis den optræder i Punktet x_1, y_1 , haves:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_1 y_1}{I_1} + \frac{M_2 x_1}{I_2}. \quad (7).$$

Virker der ogsaa en Normalkraft, har man blot at tilføje Ledet $\frac{N}{F}$.

Denne Formel er ret bekvem til Dimensionsbestemmelse, naar Tværsnitsformen er en saadan, at man strax kan se, i hvilket Punkt største Spænding vil optræde; men dette er ikke altid saa let. Ved mange almindelig forekommende Tværnit, f. Ex. Vinkeljærn, $\perp$ -Profiler, naa x og y altid deres Maximums-værdier i forskellige Punkter; ved andre, som Z -Profiler, kan man undertiden angive det farligste Punkt, undertiden ikke.

Ved Benyttelsen af (7) maa man nemlig erindre ogsaa at tage Hensyn til Fortegnet for de Spændinger, der adderes. Af Tværsnitsformer, for hvilke (7) er bekvem at anvende, bliver der egentlig kun tilbage Rektangler eller saadanne, der kunne indskrives i Rektangler, f. Ex. I- og C-Profil; for disse findes $\sigma_{\max.}$ altid i en af Vinkelspidserne af det omskrevne Rektangel, idet x og y her samtidig antage deres største Værdier; naar Modstandsmomenterne for de to Hovedaxer kaldes W_1 og W_2 , kan (7) i saa Fald skrives:

$$\sigma_{\max.} = \frac{M_1}{W_1} + \frac{M_2}{W_2}. \quad (7 a).$$

Til Dimensionsbestemmelse anvendes (7 a) paa den Maade, at man efter bedste Skøn vælger et Profil og beregner største Spænding for dette; hvis den fundne Spænding har en passende Størrelse, kan Profilet bruges, ellers maa man forsøge et nyt.

Exempel. Man skal bestemme et I-Profil (tysk Normal-Profil), der kan taale et bøjende Moment paa 1200 kg. m., virkende under en Vinkel paa 30° med Kroppens Midtlinie; tilladelig Paavirkning = 800 kg./cm.².

Man finder:

$$\begin{aligned} M_1 &= 1200 \cdot \cos 30^\circ = 1040 \text{ kg. m.}, \\ M_2 &= 1200 \cdot \sin 30^\circ = 600 \text{ kg. m.} \end{aligned}$$

Der forsøges med Profil Nr. 26, for hvilket $W_1 = 446 \text{ cm}^3$, $W_2 = 60 \text{ cm}^3$; altsaa bliver $\sigma_{\max.} = \frac{104000}{446} + \frac{60000}{60} = 1233$, hvilket er for meget. Efter muligvis endnu et Par Forsøg prøves Nr. 32 med $W_1 = 789$, $W_2 = 100$, altsaa $\sigma = 132 + 600 = 732$, hvorimod Nr. 30 giver $\sigma = 864$. Der skal altsaa bruges Profil Nr. 32.

Betydelig hurtigere kommer man til et Resultat ved følgende af Land*) angivne Omskrivning af (7 a). Idet $W_2 : W_1 = c$, faas:

$$\sigma_{\max.} = \frac{M_1 + cM_2}{W_1}. \quad (7 b).$$

For de tyske Normal- I-Profilers varierer c for Nr. 8—50 mellem 5,6 og 8,9, for C-Profilene Nr. 3—30 mellem ca. 1,5

*) Zeitschr. d. Vereins deutscher Ing. 1895, S. 293.

og 6,7. For Γ -Jærn kan imidlertid nøjagtigt nok ved det første Forsøg sættes $c = 7$, for $\square$ -Jærn $c = 5$.

For Exemplet ovenfor faar man paa den Maade, at det nødvendige Modstandsmoment W_1 skal være:

$$W_1 = \frac{(1040 + 7 \cdot 600) 100}{800} = 655 \text{ cm}^3.$$

Dette vilde føre til Nr. 30, for hvilket $W_1 = 659$; men for Nr. 30 er nøjagtigt: $c = 7,8$, og ved Benyttelse af denne Værdi i (7 b) findes $W_1 = 715$, saa man maa tage det næste Profil, Nr. 32, for hvilket $W_1 = 789$. Nogen ny Gennemregning for dette Profil behøves ikke, da c varierer langsomt.

Opg. 30. Et $\square$ -Jærn af 2,5^m. Længde er simpelt understøttet i begge Ender og bærer en ensformig Belastning paa 400 kg. pr. m., virkende under en Vinkel paa 45° med Kroppen. Bestem Profilnummeret (tilladelig Paa-virkning = 700 kg./cm.²).

Opg. 31. Hvilket Profil skal anvendes, naar der foruden Bøjningen (i forrige Opg.) virker et centralt Træk paa 8°?

Vi gaa nu videre i den almindelige Undersøgelse. Ved Ligning (5) er Spændingen i et vilkaarligt Punkt givet, og ved (4) og (6) er Retningen og Beliggenheden af den neutrale Axe bestemt. Vi saa ovenfor, at u' -Aksen og Kraftlinien OK (Fig. 150, Pl. 17) ere konjugerede Diametre i Tyngdepunktets Inertiellipse, og fra § 12 vides, at i_u er Længden af Halvdiametren paa OK . Af Ligning (6): $v_u' \cdot f' = -i_u^2$ følger da, at den neutrale Axe *nn* er Kraftangrebspunktet K 's Antipolar, d. v. s. den med K 's Polar med Hensyn til Centrum symmetriske Linie. Naar man kender Inertiellipsen, kan man altsaa konstruere den neutrale Axe. Imidlertid kan der angives simplere Konstruktioner, saa vi skulle kun endnu benytte Inertiellipsen til at udlede en Relation, hvorved man kan beregne den neutrale Axes Retning.

Inertiellipsens Halvaxer ere i_2 (paa 1ste Hovedaxe) og i_1 (paa 2den Hovedaxe). Naar Kraftliniens og u' -Aksens Vinkler med 1ste Hovedaxe kaldes φ og ψ , haves, da disse Linier ere konjugerede Diametre, Relationen:

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi = -\frac{i_1^2}{i_2^2} = -\frac{I_1}{I_2}. \quad (8).$$

Ved virkelige Konstruktioner af den neutrale Axe og Spændingerne er det ligesom i § 12 ved Behandlingen af

Inertimomenterne simplest at benytte retvinklede Koordinater (u og v). u -Aksen lade vi falde sammen med u' -Aksen ovenfor, men v -Aksen lægges vinkelret derpaa (Fig. 151, Pl. 17); de vinkelret maalte Afstande betegnes $f, v_0 \dots$, de skævt maalte, som ovenfor, $f', v_0' \dots$. Man har da:

$$I_{u'} = I_u \cdot \operatorname{cosec}^2 \beta,$$

$$i_{u'} = i_u \cdot \operatorname{cosec} \beta,$$

$$f' = f \operatorname{cosec} \beta, \text{ o. s. v.}$$

og ved Indsættelse heraf i (5) og (6) faas:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{I_u \operatorname{cosec} \beta} = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{I'}, \quad (5 a)$$

$$v_0 = -\frac{i_u^2}{f}, \quad (6 a)$$

idet der er indført den kortere Betegnelse $I' = I_u \operatorname{cosec}^2 \beta$. β er Vinklen mellem Kraftlinien og den neutrale Axe.

Naar man nu kender Tværsnittets Inertimomenter og Centrifugalmoment med Hensyn til et Par vilkaarlige retvinklede Axer (x, y) gennem Tyngdepunktet, findes alle nødvendige Størrelser til Beregning af Spændingerne ved følgende simple Konstruktion *) (Fig. 152, Pl. 17). Man tegner den i § 12 omtalte Hjelpecirkel til Konstruktion af Inertimomenterne med Centrum M paa y -Aksen og med Diameter $I_x + I_y$, og afsætter Punktet T ved $OR = I_x$, $RT = Z_{xy}$. Kraftlinien er OK ; gennem dens Skæringspunkt med Cirklen trækkes Korden TN , hvorved u -Aksen ON er bestemt. OK og ON ere nemlig ifølge § 12 konjugerede Axer: Centrifugalmomentet med Hensyn til dem er Nul. Inertimomentet I_u om ON findes ifølge § 12 som den vinkelrette Afstand fra T til Tangenten i N , men af Figuren ses let, at man direkte kan maale Størrelsen $I' = I_u \operatorname{cosec}^2 \beta = TN$, saa man har ikke Brug for I_u . Afstanden e fra u -Aksen ud til Tværsnittets yderste Fibre maales paa Tegningen. Nu kender man alle de i 5 a indgaaende Størrelser og kan altsaa beregne Spændingerne. Sidste Led i 5 a skifter naturligvis Fortegn med x , første Led har altid samme Fortegn. Der kan

*) R. Lind: Die Formeln der Spannungvertheilung und des Kernes etc. Berlin 1892.

Alvølgelig let angives en grafisk Konstruktion af selve den centrale Axe (ved 6 a) og af Spændingerne, men den Slags Konstruktioner virke snarere som en Bebyrdelse af Hukommelsen end som en Lettelse i de enkelte Tilfælde, hvor man har Brug derfor.

Hvis man kender Tværnittets Hovedaxer, gaar man ved Konstruktionen ud fra dem (Fig. 153, Pl. 17). Punktet T ligger paa Axen 2, da Centrifugalmomentet er Nul, men forøvrigt gaar man frem som ovenfor. Imidlertid kan der ved Hjælp af (8) angives en simplere Konstruktion *) for dette specielle Tilfælde (Fig. 154, Pl. 17). Paa Axen 1 afsættes $OS = OS$, paa Axen 2: $I_1 = OT$; en vinkelret i S paa Axen 1 skærer Kraftlinien OK i B , og Stykket $SB = a$ afsættes ud af B en vinkelret paa Axen 2 i T , altsaa $TC = a$; OC er da u -Aksen. Thi:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{a}{I_2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\cot TOC = -\frac{I_1}{a},$$

altsaa:
$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi = -\frac{I_1}{I_2}.$$

Naar man paa den Maade har fundet u -Aksen, konstruerer man Størrelsen I' i (5 a) ved at afsætte $TA = I_2$ og nedfælde den vinkelrette AN paa u -Aksen; da er $I' = TN$. Rigtigheden heraf indses ved Sammenligning med Fig. 153. — Da Kraftlinie og u -Axe ere konjugerede Diametre i Inertiellipsen, kunne de ombyttes, hvilket ogsaa fremgaar af Konstruktionerne i Fig. 152 og 153; det samme gælder derfor i Fig. 154, saa man kan ligesaa godt begynde med at oprejse en vinkelret paa OT i T og afsætte det her af Kraftlinien afskaarne Stykke paa en vinkelret paa OS i S . Man maa kun erindre at trække disse vinkelrette ud fra S og T i samme Omløbsretning.

Exempel. I Fig. 155, Pl. 17, er undersøgt et Z-Profil, dannet af en Kropplade, $300 \cdot 10^{\text{m.m.}}$, og af to Vinkeljærn, $120 \cdot 80 \cdot 10^{\text{m.m.}}$. Ved Deling i Rektangler findes for Axerne x og y :

$$I_x = 8900^{\text{cm.}^4}, \quad I_y = 1320^{\text{cm.}^4}, \quad Z_{xy} = 2410^{\text{cm.}^4}.$$

Paa y -Aksen er fra Tyngdepunktet O afsat:

*) Müller-Breslau: Die graphische Statik der Baukonstruktionen, Bd. I, Leipzig 1887, S. 59.

$$OR = I_x, \quad RY = I_y, \quad RT = Z_{xy},$$

efter Maalestokken $1^{\text{cm.}} \sim 2000^{\text{cm.}^4}$, og Hjælpecirklen er tegnet.

Man skal nu finde største Fiberpaavirkning fra et Moment paa 2800 kg. m., virkende i Kraftlinien OK . Den neutrale Axe er ON ; man maaler:

$$TN = I' = 4440^{\text{cm.}^4},$$

og Afstanden e ud til de yderste Fibre bliver $13^{\text{cm.}}$ (Profilen er tegnet op i Maalestokken 1:5). Fiberpaavirkningen er altsaa ifølge (5 a), idet $N = 0$:

$$\sigma_{\text{max.}} = \frac{280000 \cdot 13}{4440} = 820 \text{ kg./cm.}^2.$$

Hvis ON var Kraftlinien, vilde den neutrale Axe blive OK , og man vilde have $I' = TK = 1400^{\text{cm.}^4}$, $e = 6,5^{\text{cm.}}$, idet de yderste Fibre nu vilde findes ved B . Hvis største Spænding ikke maatte overskride 820 kg./cm.², kunde der da kun taales et Moment paa

$$\frac{820 \cdot 1400}{6,5} = 176600 \text{ kg. cm.}$$

Hvis endelig den neutrale Axe drejede sig fra OK hen mod T , vilde de stærkest paavirkede Fibre snart findes paa Rundingen ved C . Man ser, at det ved et Z -Profil er temmelig vanskeligt paa Forhaand at afgøre, hvor de stærkest paavirkede Fibre findes. — For alle Normalprofiler ere Hovedaxernes Stilling og Hovedinertimomenterne beregnede en Gang for alle*), saa for dem kan man altid anvende Konstruktionen i Fig. 154

*) Det bemærkes, at de i »Hütte« angivne Inertimomenter for Normalprofilerne ere beregnede uden Hensyn til Afrundingerne; dette spiller i Almindelighed ingen væsentlig Rolle, men for Z -Jærnene kan det, som Meyerhof (Z. d. V. d. I. 1891, S. 695) har paavist, føre til betydelige Fejl (Meyerhof angiver indtil 44 % Fejl i de beregnede Spændinger. Der anføres derfor de af Meyerhof beregnede, forbedrede Hovedinertimomenter samt $tg\varphi$ (φ er Vinklen mellem Z -Jærnets Krop og Axen ?

Profil-Nr.	I_1	I_2	$tg\varphi$	Profil-Nr.	I_1	I_2	$tg\varphi$
6	67,2	7,6	0,779	14	767,6	56,4	0,385
8	142,2	14,8	0,588	16	1183,5	79,6	0,357
10	269,8	24,5	0,493	18	1759,5	110,1	0,329
12	469,4	37,9	0,433	20	2508,4	146,8	0,313

De i Fig. 152 og 154 angivne Konstruktioner og de dertil hørende Beregninger kunne kun bruges til at undersøge, hvor store Spændingerne i et forelagt Profil blive. Hvis Opgaven derimod er en Dimensionsbestemmelse, er der ikke andet at gøre end at prøve sig frem, — altsaa vælge et Profil efter bedste Skøn, og hvis Spændingen bliver for stor, gøre Beregningen om. En mere direkte Løsning af Opgaver, der gaa ud paa Dimensionsbestemmelse, kan faas ved Hjælp af *Kærnen* eller *W-Fladen*, som vi skulle se i næste Paragraf, men der er rigtig nok kun vundet noget herved, hvis Kærne eller W-Flade foreligge tegnede for de Profiler, der kan være Tale om at benytte. For de tyske Normalprofiler er dette i det mindste endnu ikke Tilfældet, saa foreløbig er man henvist til at prøve sig frem.

Den her udviklede Beregning gælder selvfølgelig kun under Forudsætning af Hooke's Lov. Selv om man imidlertid har med et Materiale, f. Ex. Støbejern, at gøre, der ikke følger denne Lov, regner man i Almindelighed alligevel, som om den gjaldt, og korrigerer saa blot Resultatet ved en Erfaringskoefficient. For Støbejern have vi saaledes i § 53 set, at man regner den tilladelige Paavirkning til Bøjning, r_b , betydelig større end til direkte Træk, r_t . Naar vi nu her have baade en Normalkraft og et bøjende Moment, kunne vi derfor ikke direkte addere de fra hver af disse hidrørende Spændinger, men vi maa (med Betegnelsen $\frac{r_b}{r_t} = \alpha$) sætte:

$$r_b = \alpha \cdot \frac{N}{F} \pm \frac{Me}{I},$$

eller

$$r_t = \frac{N}{F} \pm \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{Me}{I}.$$

Hvis Normalkraften er et Træk, maa man altid bruge disse Formler; er N et Tryk, maa man ogsaa undersøge største Trykspænding.

§ 60. Kærne, W-Flade. Naar Nullinien skærer Tværnittet, have Fibrene paa dens to Sider Spændinger med modsat Fortegn; paa den Side, hvor Kraftangrebepunktet ligger, have Spændingerne samme Fortegn som Normalkraften N . Da Angrebepunkt og Nullinie svare til hinanden som Pol og

Antipolar, vil man indse følgende: naar Angrebepunktet ligger uendelig fjernt, gaar Nullinien gennem Tyngdepunktet (ren Bøjning); efterhaanden som Angrebepunktet rykker nærmere, flytter Nullinien længere og længere bort, og naar Angrebepunktet falder i Tyngdepunktet, ligger Nullinien uendelig fjernt (ren Strækning eller Sammentrykning).

Naar Nullinien ligger helt udenfor Tværnittet, ville Spændingerne i alle Punkter have samme Fortegn, og dette vil endnu netop være Tilfældet, naar Nullinien tangerer Tværnittet. Lader man Nullinien rulle paa Tværnittets Omkreds, vil Angrebepunktet beskrive en lukket Kurve; det af denne indesluttede Areal kaldes Tværnittets *Kærne*. Saa længe Angrebepunktet befinder sig indenfor Kærneomridset, ville Spændingerne i alle Fibre have samme Fortegn.

Bestemmelsen af Kærnen for et givet Tværnit udføres ifølge den givne Definition ved at konstruere Angrebepunkterne svarende til en Række Tangenter til Tværnittets Kontur som Nullinier; ingen af de anvendte Tangenter maa skære Tværnittet, hvilket maa erindres, naar Konturen har en Form som i Fig. 156, Pl. 17. Ifølge bekendte Sætninger om Pol og Polar kan man ogsaa lade Angrebepunktet gennemløbe Tværnittets Omkreds og bestemme de tilsvarende Nullinier, som da ville indhylle Kærnen.

For et af rette Linier begrænset Profil faas Kærnen ved at bestemme Angrebepunktet for hver Side i Omkredsen som Nullinie — hvorved indadgaende Vinkler springes over — og forbinde de saaledes fundne Punkter ved rette Linier; thi naar Nullinien drejer sig fra Stillingen AB til BC (Fig. 157, Pl. 17), vil Angrebepunktet gennemløbe den til B svarende Nullinie b (Antipolar). Eller man kan bestemme de til Omkredsens Vinkelspidser $A, B \dots$ som Angrebepunkter svarende Nullinier $a, b \dots$

Angaaende Konstruktionen af Kærneomridset er der nu intet principielt nyt at tilføje, efterat vi i forrige Paragraf have vist Konstruktionen af Nullinien. Ved den praktiske Udførelse af Konstruktionen, hvor man i én Figur skal finde en hel Række Nullinier eller Angrebepunkter, gaar man bedst frem som vist i Fig. 158, Pl. 17, hvor Nullinien aa svarende til Angrebepunktet A er konstrueret. Man begynder med at konstruere Tværnittets Hovedaxer $O1$ og $O2$ og tegner dernæst

Hjælpecirklen med Centrum paa O_2 og bestemmer T ved $OT = I_1$. Kraftlinien OA trækkes, og ved Korden TN bestemmes Retningen ON af Nullinien. Man mangler nu kun et Punkt af aa , og det bestemmes saaledes: Linien $AA' \neq O_1$ betragtet som Nullinie har ifølge Sætningerne om Pol og Polar sit tilsvarende Angrebepunkt a liggende paa O_2 , og ifølge Ligning (6 a) i forrige Paragraf haves:

$$OA' \cdot Oa = -i_1^2;$$

Oa konstrueres ved en retvinklet Trekant, hvori Højden er i_1 .

Vi skulle nu undersøge Kærnen for nogle specielle Tværsnitsformer.

Rektangel (Fig. 159, Pl. 18). Hovedaxerne ere de to Symmetriaxer; Kærnen er en Rhombe. Kærneradius Oa bestemmes ved:

$$OA \cdot Oa = i_1^2 = \frac{\frac{1}{2}bh^2}{b \cdot h} = \frac{1}{2}h^2,$$

altsaa
$$Oa = \frac{1}{2}h, \quad Oa_1 = \frac{1}{2}b.$$

Hvis b er uendelig stor, bliver Kærnen en rektangulær Strimmel af Højde $\frac{1}{2}h$ (vandret Snit i en Mur).

Cirkel. Da der er Symmetri i alle Retninger, bliver Kærnen en Cirkel. Kaldes den forelagte Cirkels Radius r , bliver Kærneradius $= \frac{i^2}{r} = \frac{1}{4}r$.

I-formet Tværnit (Fig. 160, Pl. 18). Da Kærnen bestemmes ved at finde Kraftangrebepunkterne for det omskrevne Rektangels Sider som Nullinier, bliver Kærnen Form den samme som for et Rektangel. Kærneradiens Størrelse er derimod naturligvis ikke den samme som for Rektanglet; den bestemmes som sædvanligt ved:

$$OA \cdot Oa = i_1^2.$$

Opg. 32. Bestem Kærnen for en Trekant (det bliver en Trekant, ligdannet med den givne).

Opg. 33. Undersøg Kærnen Form for et Vinkeljærn, et $\square$ - eller Z-Jærn.

Naar et vilkaarligt Tværnit (Fig. 161, Pl. 18) er paavirket af en excentrisk Normalkraft N med Angrebepunkt K , haves

Spændingerne bestemte ved Relationen (5) i forrige Paragraf. Specielt ere de største og mindste Spændinger:

$$\sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{Nf e_1}{I_{u'}} \quad \text{og} \quad \sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{Nf e_2}{I_{u'}}.$$

Disse Udtryk kunne skrives simplere ved Anvendelse af Kærnen, — uden at det dog dermed er sagt, at det altid vil være simplere at anvende denne Omskrivning. Idet Kraftlinien og u' -Aksen ere konjugerede Diametre i Tyngdepunktets Inertiellipse, vil en Tangent til Tværsnittets Kontur parallel med u' -Aksen have sin Antipol liggende paa Kraftlinien; altsaa faar man Kærnepunkterne paa OK bestemte som Angrebspunkter svarende til de i Fig. 161 punkterede Tangenter ($\neq u'$ -Aksen som Nullinier. Ifølge Ligning (6) i forrige Paragraf haves da

$$k_1 = \frac{i_{u'}^2}{e_1} = \frac{I_{u'}}{F \cdot e_1}, \quad k_2 = \frac{i_{u'}^2}{e_2} = \frac{I_{u'}}{F \cdot e_2},$$

hvor F betegner Tværsnittets Areal. Naar man indfører Betegnelserne

$$\frac{I_{u'}}{e_1} = W_1' \quad \text{og} \quad \frac{I_{u'}}{e_2} = W_2',$$

altsaa taler om Modstandsmomenter ogsaa i skævvinklede Koordinater, har man følgende:

$$W_1' = k_1 \cdot F, \quad W_2' = k_2 \cdot F; \quad (9)$$

Modstandsmomentet er lig Kærneradius multipliceret med Tværsnitsarealet.

Ved at benytte dette blive Udtrykkene for Spændingerne

$$\sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{Nf}{F \cdot k_1} = \frac{N}{F} \cdot \frac{k_1 + f}{k_1} = \frac{M_1'}{W_1'}, \quad (10)$$

og paa samme Maade:

$$\sigma_2 = \frac{M_2'}{W_2'}, \quad (10)$$

hvor $M_1' = N(k_1 + f)$ og $M_2' = N(k_2 - f)$ betegne Momenterne med Hensyn til Kærnepunkterne paa Kraftlinien, medens $N \cdot f = M$ er Momentet med Hensyn til Tyngdepunktet. — Ved (10) har man faaet Spændingerne fra Kombinationen af

Normalkraft og Moment udtrykte paa samme simple Form om Spændingen fra en ren Bøjning. Da man, naar Talen om en Dimensionsbestemmelse, ikke kender Kærnepunkterne at begynde med, har Formlen ikke stor praktisk Betydning idtagen i ganske specielle Tilfælde (Buekonstruktioner).

Større Betydning har den i (9) udtrykte Sætning, navnlig for det Tilfælde, at Normalkraften er Nul. I saa Fald er største og mindste Spænding:

$$\sigma_1 = + \frac{M}{Fk_1} \text{ og } \sigma_2 = - \frac{M}{Fk_2}. \quad (11).$$

Hvis man skal bestemme Dimensioner af en Bjælke af medeligt Jærn, for hvilket den tilladelige Paavirkning til Træk og Tryk er den samme, har man kun at sørge for, at den numerisk største Spænding ikke overskrider det tilladelige, r . kaldes den mindste Kærneradius i Kraftlinien k ($k = k_1 < k_2$ eller $k = k_2 < k_1$), haves altsaa:

$$F \cdot k = \frac{M}{r},$$

hvilken Formel kan anvendes til Dimensionsbestemmelse, hvis Kærnen for de Tværsnit, som der kan være Tale om at bruge, foreligger tegnet. Naar Kraftliniens Retning er given, kan man hurtigt afgøre, om et bestemt Profil-Nummer kan bruges, idet man med det for Profilet gældende F beregner det nødvendige k og med Passeren undersøger, om k har den nødvendige Størrelse.

Den her omtalte Benyttelse af Kærnen er navnlig fordelagtig, naar man har at gøre med en variabel Kraftlinieretning, saaledes som ved Tagaase, der paavirkes til Bøjning af Tagbeklædningens Egenvægt og muligvis tillige af Sne- og Vindtryk.

Exempel. For et Profil, der skal anvendes som Aas i et Tagværk, skal man bestemme den gunstigste Stilling *). (Det forudsættes altsaa, at man vil anbringe Profilet i denne gunstigste Stilling uden Hensyn til Tagfladens givne Heldning). Aasen undersøges for Bøjning af følgende Belastninger:

*) Den meddelte Løsning er tilligemed flere andre angivet af Lang i *Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover*, 1895, S. 159.

$$\text{Egenvægt} + \text{Snetryk} \dots\dots\dots = P_1.$$

$$\text{Egenvægt} + \text{Vindtryk} \dots\dots\dots = P_2,$$

$$\text{Egenvægt} + \text{Snetryk} + \text{Vindtryk} = P_3.$$

Hvis største Spændinger i alle tre Tilfælde skulle være lige store, maa mindste Kærneradier i de tre Kraftlinieretninger, k_1 , k_2 , k_3 , opfylde Betingelsen:

$$\frac{P_1}{k_1} = \frac{P_2}{k_2} = \frac{P_3}{k_3}.$$

Dette kan i Almindelighed ikke opnaas; man maa nøjes med at skaffe to af Forholdene, som oftest de to første, lige store og sørge for, at det tredie bliver mindre. I Fig. 162a, Pl. 18, er O Profilets Tyngdepunkt, Linierne med Skravering angive den Del af Kærneomridset, som der er Brug for (Formen af Kærnen er sædvanligvis saadan for de almindelig anvendte Profiler, Z , Γ , I -Jærn o. l.). Paa et Stykke Kalkerpapir afsættes som i Fig. 162b P_1 , P_2 og P_3 i de rigtige Retninger, og man forskyder Kalkerpapiret med denne Tegning hen over Fig. 162a, indtil Punkterne P_1 og 2 falde i Kærneradius OA og i de to Kærne-Omridslinier; hvis Punktet 3 da falder indenfor Kærnen er Opgaven løst. Naar man nemlig gennem O trækker Paralleler med P_1 , P_2 og P_3 , faar man Kærneradierne $k_1 = O1'$, $k_2 = O2'$, $k_3 = O3'$, og ved Lighedannethed med Hensyn til A indses, at

$$\frac{P_1}{k_1} = \frac{P_2}{k_2} > \frac{P_3}{k_3}.$$

Hvis Punktet 3 ved den omtalte Forskydning falder udenfor Kærnen, maa man prøve at skaffe f. Ex.

$$\frac{P_1}{k_1} = \frac{P_3}{k_3} > \frac{P_2}{k_2}$$

ved en ny Forskydning.

I Stedet for Kærnen er det af *Land**) foreslaaet at anvende en saakaldt *W-Flade*, som faas ved udad hver Linie gennem Tværnittets Tyngdepunkt, betragtet som Kraftlinie, at afsætte

*) *Zeitschr. f. Arch.- und Ing.-wesen*, 1897, S. 291 o. f. Optaget i *Hütte* 16. Aufl., I, S. 341—42.

Idet tilsvarende Modstandsmoment. Dette er ifølge (9) ligefrem proportionalt med Kærneradius k (lig $F \cdot k$), saa W -Fladen er ligedannet med Kærnen. Hvis denne W -Flade foreligger indtegnet paa de Profiler, der kan være Tale om at bruge, faar man derved en ganske direkte Dimensionsbestemmelse, idet man med Passeren kan finde det Profil, for hvilket W har den netop nødvendige Størrelse.

§ 61. Excentrisk Tryk uden Trækmodstand. Idet vi i denne § altid tænke os, at Normalkraften er et Tryk, ville vi for Nemheds Skyld regne Trykspændinger positive. Undersøgelserne her angaa kun saadanne Materialer, navnlig Murværk, som man slet ikke tør byde Trækspændinger. Vi have i § 55 set, at Mørtels Modstandsevne mod Træk kun er ringe; for god Cementmørtel kan man dog regne 1—3 kg./cm.² som tilladeligt overfor Træk, naar det kun kommer an paa Mørtlen selv, men i Murværk sætter Adhæsionen mellem Sten og Mørtel en endnu lavere Grænse, saaledes at man ofte selv med Cementmørtel ikke tør regne med Træk; for almindelig Luftmørtel gælder dette endnu mere. Hvis nu Spændingen i en eller anden Fuge, beregnet efter de ovenfor udviklede Formler, bliver Træk i den ene Side, og der slet ikke er nogen Modstandsevne herimod, vil Følgen blive, at Fugen aabner sig, og Kraften virker da ikke mere paa hele Snittet. I dette Tilfælde gælde de fundne Formler aabenbart ikke mere.

Vi begynde med at betragte et *Rektangel* (Fig. 163, Pl. 18), der er paavirket af et excentrisk Tryk N i Punktet K paa en Symmetrilinie. Ifølge Formel (1) i § 59 have vi da, idet Rektanglets Modstandsmoment er $\frac{1}{6}bh^2$, de største Spændinger:

$$\sigma = \frac{N}{bh} \pm \frac{Nf}{\frac{1}{6}bh^2} = \frac{N}{bh} \left(1 \pm \frac{6f}{h} \right); \quad (12)$$

øverste Fortegn gælder for Fibrene AA , nederste for BB . Spændingen i B bliver herefter negativ (d. v. s. Træk), hvis $f > \frac{1}{6}h$, hvilket stemmer med, at K i saa Fald ligger udenfor Kærnen. (12) kan altsaa for de her undersøgte Materialer kun bruges, saalænge $f \leq \frac{1}{6}h$, eller med andre Ord naar Trykkets Angrebepunkt falder indenfor den midterste Trediedel af Rektanglets Højde. For $f > \frac{1}{6}h$ maa der udledes en ny Formel.

Vi forudsætte her som sædvanligt, at Tværsnittet vedbliver at være plant, og at Hooke's Lov gælder; Spændingerne ere da fremstillede som Ordinatorer til en ret Linie, men nu er den Del af Tværsnittet, der ligger mellem den foreløbig ubekendte neutrale Axe, nn , og BB upaavirket, idet Fugen tænkes at have aabnet sig helt ind til nn , og det er da alene Trykspændingerne mellem AA og nn , der skulle holde Ligevægt mod den ydre Kraft N . Hertil fordres, at Summen af de indre Kræfter σdF skal være lig N , og at Momentet af Kræfterne σdF skal være lig N 's Moment, hvilket sidste ogsaa kan udtrykkes saaledes, at N maa gaa gennem Tyngdepunktet for den i Fig. 163 skraverede Trekant, der fremstiller Spændingerne. Heraf følger, at nn maa ligge i Afstanden $3m$ fra AA , naar m betegner K 's Afstand fra AA , og endvidere at

$$N = 3m \cdot b \cdot \frac{1}{2} \sigma_1,$$

eller
$$\sigma_1 = \frac{2}{3} \frac{N}{b \cdot m}, \quad (13).$$

hvorved største Spænding σ_1 er bestemt.

Ligning (13) fremstiller med m og σ_1 som variable en Hyperbel med Asymptoten $m = 0$. (12) og (13) give samme Spænding for $m = \frac{1}{3} h$. Naar Angrebepunktet begynder med at ligge i Centrum og efterhaanden vandrer udad, faar man følgende sammenhørende Værdier:

$$m = \frac{1}{2} h, \quad \frac{1}{3} h, \quad \frac{1}{6} h, \quad \frac{1}{12} h, \quad 0.$$

$$\sigma_1 = \frac{N}{bh}, \quad 2 \frac{N}{bh}, \quad 4 \frac{N}{bh}, \quad 8 \frac{N}{bh}, \quad \infty.$$

Naar m er lille, vil altsaa en ubetydelig Variation i Angrebepunktets Beliggenhed kunne bevirke en stor Tilvæxt til Spændingen; dette er Grunden til, at det ved Dimensionering af Murpiller o. l. ikke altid er tilstrækkeligt at sørge for, at σ_1 ikke overskrider den tilladelige Paavirkning, men at man ofte desuden forlanger en vis Sikkerhed mod Væltning af Muren som et Hele.

Endvidere er der her igen ligesom i § 33 en Lejlighed til at se, at det kan være ikke blot unyttigt, men endog ligefrem skadeligt at forøge Dimensionerne, naar Tilvæksten anbringes

maa urette Sted. For et centralt paavirket Rektangel er Fiberpaavirkningen $\frac{N}{bh}$; hvis Angrebepunktet bliver liggende i Afstanden $\frac{1}{2}h$ fra Kanten AA (Fig. 163), medens h faar en Tilvæxt x (Rektanglets Højde bliver altsaa $h + x$, Excentriciteten $f = \frac{1}{2}x$), faas efter (12) Fiberpaavirkningen:

$$\sigma_1 = \frac{N}{b(h+x)} \left(1 + \frac{3x}{h+x} \right),$$

som bliver Maximum for $x = \frac{1}{2}h$, altsaa netop i det Øjeblik da Excentriciteten er bleven $\frac{1}{8}$ af det nye Rektangels Højde. Denne største Værdi af σ bliver:

$$\text{max. } \sigma_1 = \frac{4}{3} \frac{N}{bh}.$$

Lader man x voxé yderligere, hører (12) op at gælde, og da man saa skal beregne Spændingen efter (13), hvor m er konstant, beholder σ_1 den fundne Maximumsstørrelse.

Ligger Trykkets Angrebepunkt ikke i en Symmetrilinie for Rektanglet, eller er det en anden Tværsnitsform, man vil behandle, bliver Opgaven at danne en Formel analog med (13) mindre let. Vanskeligheden ligger navnlig i, at Nulliniens Retning ikke er bekendt, og Følgen heraf er, at man som oftest er henvist til at prøve sig frem. Man kan da gaa den modsatte Vej, forudsætte Nullinien, eller dog dens Retning, bekendt og bestemme det tilsvarende Angrebepunkt; denne Opgave, der altid kan løses, er ganske den samme som den at bestemme Trykcentret for en i Vand nedsænket plan Flade. Hvis det fundne Angrebepunkt falder sammen med det givne, er Opgaven løst, ellers maa man gøre et nyt Forsøg. Opgaver af denne Art ere behandlede ad Beregningens Vej af *Keck*, *Barkhausen* o. a. Her skal kun anføres nogle Resultater for en *Cirkel*, som man kan faa Brug for ved Undersøgelse af cirkulære Bropiller o. l. Hvis Angrebepunktet ligger indenfor Kærnen, haves ligefrem efter Formel (1), § 59:

$$\sigma_1 = \frac{N}{\pi r^3} \left(1 \pm \frac{4f}{r} \right); \quad (14)$$

hvis Angrebepunktet falder udenfor Kærnen, i Afstanden m

fra Periferien, og man ser bort fra Trækspændinger, angiver *Keck**) følgende Tilnærmelsesformel:

$$\sigma_1 = 0,58 \frac{N}{m \sqrt{2rm}}, \quad (15)$$

ved hvilken man i Almindelighed finder en noget for stor Spænding (højest ca. 9 % for stor).

For *Cirkelring*-Tværsnit har *Keck* beregnet Tabeller. Ved Sammenligning med disse finder *Hüppner***), at man kan bruge følgende Tilnærmelsesformler:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= 2 \frac{N}{F} \cdot \frac{R-k}{R-f}, \\ e &= 2R \cdot \frac{R-f}{R-k}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

hvor σ_1 er største Trykspænding, naar der ingen Trækspændinger forekommer, e er Afstanden fra de stærkest trykkede Fibre til den neutrale Axe, F hele Cirkelringens Areal, R ydre Radius, k Kærneradius, f Excentriciteten. Formlerne ere i Virkeligheden dem, der gælde for et Rektangel (13) med $h = 2R$; de stemme godt med Virkeligheden, saalænge $e > R$, ellers ikke. Disse Formler kunne finde Anvendelse ved Beregning af Fabriksskorstene o. l. og kunne ogsaa godt anvendes for ottekantet ydre Begrænsning.

I andre Tilfælde anvender man bedst en grafisk Methode***) (Fig 164, Pl. 18). Tværsnittet og Kraftangrebspunktet K er givet, og foreløbig antage vi desuden Nulliniens Retning bekendt; man skal da kun finde dens Beliggenhed.

Tværsnittet tænkes delt i uendelig smalle Strimler dF , parallelle med Nullinien nn ; Spændingen i Afstanden x fra nn kaldes σ . Man har da følgende Ligevægtsbetingelser:

$$\int \sigma dF = N \text{ og } \int x \cdot \sigma dF = Nf,$$

hvor Integrationen kun skal udstrækkes over den Del af Tvær-

*) *W. Keck: Vorträge über Elasticitätslehre, Hannover 1893, S. 160.*

**) *Zeitschr. für Arch.- und Ing.-wesen, Wochenausgabe, 1898, S. 297.*

***) *Müller-Breslau: Die graphische Statik der Baukonstruktionen, I, 1887, S. 72 o. f. Konstruktionen er først angivet af Mohr.*

nittet, der ligger paa samme Side af nn som K . Den tredie Ligevægtsbetingelse — Momentligningen med Hensyn til en anden Axe — er opfyldt af sig selv, hvis den antagne Retning af Nullinien er rigtig, (sammenlign Ligning (4) i § 59), og dette forudsætte vi foreløbig. Idet Spændingen er proportional med Afstanden fra den neutrale Axe, kan man sætte $\sigma = C \cdot x$, hvorved Ligevægtsbetingelserne blive:

$$C \int x dF = N \text{ og } C \int x^2 dF = Nf.$$

De to Integraler betegne det statiske Moment og Inertimomentet af den nyttige Del af Tværnittet med Hensyn til Nullinien, og med Betegnelserne:

$$S = \int x dF, \quad I = \int x^2 dF$$

faar man da:

$$\sigma = Cx = \frac{Nx}{S} \text{ og } f = \frac{I}{S}.$$

Man tegner nu en Tovpolygon til Arealelementerne dF , betragtede som Kræfter, parallelle med nn . For at udføre dette maa man som sædvanligt inddele i Strimler af endelig (og bedst konstant) Bredde; Strimlernes Højder eller en vis Brøkdel deraf benyttes som Kraftstørrelser, Poldistancen er h . Hvis Nulliniens Beliggenhed var bekendt (nn i Fig. 164), vilde man med Figurens Betegnelser have (a er den Konstant, der bestemmer Arealmaalestokken, altsaa den konstante Grundlinie i de Rektangler, hvis Højder ere benyttede som Kraftstørrelser):

$$S = a \cdot h \cdot s, \quad I = 2a \cdot h \cdot F,$$

hvor F er Arealet mellem Tovpolygonen, Nullinien og den forlængede yderste Side, DB . Ved Indførelse heraf i Udtrykket $f = I : S$ faas:

$$F = \frac{1}{2}fs = \triangle ABC,$$

idet C er det Punkt paa Tovpolygonsiden DB , hvori Trykkets Angrebepunkt K projiceres ved en Linie parallel med nn .

Selv om man nu ikke kender Nulliniens Beliggenhed, kan man dog udføre alle de beskrevne Konstruktioner, saa snart man har valgt dens Retning; Tovpolygonen, Siden DB og

Punktet C ere altsaa bekendte, og man kan derfor bestemme Punktet A af Nullinien ved at trække en Linie CA saaledes, at der dannes en Trekant ABC , hvis Areal er lig F , og det er det samme, som at de to i Fig. 164 skraverede Arealer skulle være lige store. — Linien CA kan saa godt som altid strax trækkes nøjagtigt nok paa Øjemaal, men hvis det ikke lykkes at faa Arealerne lige store ved første Forsøg, kan man gaa frem, som følger: naar CA' er den først trukne Linie, bestemmes Punktet A derved, at

$$\triangle CAA' = Ar. A'AE' - Ar. E'CD;$$

omformes dette nemlig til:

$$Ar. A'AE' - \triangle CAA' = Ar. E'CD,$$

og adderes paa begge Sider $\triangle ECE'$, vil Ligningen netop udtrykke, at de skraverede Arealer ere lige store.

Har man paa denne Maade faaet den neutrale Axe bestemt, findes Spændingerne ved Formlen ovenfor; største Spænding bliver:

$$\sigma_1 = \frac{Ne}{S} = \frac{Ne}{ahs},$$

hvor e , a , h og s ere Længder. Vil man fremstille Spændingerne grafisk (som Ordinater til en ret Linie, se Fig. 164), udføres det lettest ved at bemærke, at $x = s$ giver $\sigma = \frac{N}{ha}$;

a og h kunne vælges, saa deres Produkt bliver et rundt Tal.

Alt det udviklede forudsætter, at Nulliniens Retning er bekendt forud, og det vil ogsaa være saaledes i mange — og de hyppigst forekommende — Tilfælde. Naar Angrebepunktet ligger paa en Symmetrilinie for Tværnittet, vil Nullinien være vinkelret derpaa; Exempler herpaa ere Cirklen, et vandret Snit i en Mur med Modstandspiller o. l. For et Rektangel, hvor Angrebepunktet ligger paa den ene Diagonal, vil Nullinien være parallel med den anden Diagonal (skævt Symmetri).

Kendes Nulliniens Retning ikke forud, maa man prøve sig frem, vælge en Retning — f. Ex. omtrent den, der vilde være den rigtige, hvis hele Tværnittet var virksomt, Ligning (4), § 59 — og gennemføre Konstruktionen med den; og tilsidst maa man saa ved Hjælp af den tredie Ligevægts-

betingelse, som ikke blev benyttet ovenfor, undersøge, om den valgte Retning er rigtig. For at dette skal være Tilfældet, saa Resultanten af Kræfterne σdF gaa gennem K , og det undersøges ved at lade Kræfterne $\sigma dF = CxdF$ virke i en vilkaarlig Retning i Tværnittets Plan, blot ikke parallelt med Nullinien, tegne en Tovpolygon til dem og derved bestemme deres Resultant. Som Kraftstørrelser kan man herved benytte de Stykker, som den først tegnede Tovpolygons Sider afskære paa Linien AB (Fig. 164), da disse Stykker ere proportionale med $x.dF$. Denne 2den Tovpolygon er ikke tegnet i Fig. 164.

Man kan dog paa Forhaand sikre sig, at den antagne Nullinieretning ikke er ganske umulig. Tegner man nemlig en Polygon, der omslutter alle Strimlerne dF 's Tyngdepunkter, altsaa er bestemt ved de yderste af disse, saa vil Angrebepunktet for Resultanten af Spændingerne σdF ligge indenfor denne Polygon, selv om nogle af Strimlerne vise sig at blive spændingsløse, og K skal derfor ogsaa falde indenfor Polygonen.

Da Hooke's Lov ifølge § 54 og 55 egentlig ikke kan siges at gælde for et eneste af de Materialer, for hvilke Undersøgelsen her har Betydning, skulle vi til Slut, navnlig for at faa et Begreb om den begaaede Fejls Størrelse, gennemføre nogle Beregninger med den parabolske Arbejdslinie $\sigma = \alpha \varepsilon - \beta \varepsilon^2$ som Udgangspunkt.

Tværnittet er et Rektangel, Trykkets Angrebepunkt ligger paa en Symmetrilinie; der bruges de samme Betegnelser som i Fig. 163, Pl. 18, kun kaldes her Afstanden fra den neutrale Axe til de yderste Fibre e (den er i Fig. 163 lig $3m$). Idet Formforandringerne ogsaa her antages proportionale med Afstandene fra den neutrale Axe, altsaa $\varepsilon = cy$, har man:

$$\sigma = \alpha cy - \beta c^2 y^2,$$

og Ligevægtsbetingelserne mellem N og de indre Kræfter blive:

$$N = \int \sigma dF = \alpha cb \int_0^e y dy - \beta c^2 b \int_0^e y^2 dy = cbe^2 \left(\frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{3} \beta ce \right),$$

$$\begin{aligned} N(e - m) &= \int y \cdot \sigma dF = \alpha cb \int_0^e y^2 dy - \beta c^2 b \int_0^e y^3 dy \\ &= cbe^3 \left(\frac{1}{3} \alpha - \frac{1}{4} \beta ce \right). \end{aligned}$$

Ved Elimination af N findes:

$$c = \frac{1}{m} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{m}{e} \cdot \frac{2 \left(1 - 3 \frac{m}{e}\right)}{1 - 4 \frac{m}{e}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{2m}{e} \cdot C = \frac{1}{m} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot C_1,$$

og ved Indsættelse heraf i den første Ligning:

$$\frac{N}{bm} \cdot \frac{\beta}{\alpha^2} = C \cdot \frac{e}{m} (1 - \frac{4}{3}C) = C_2,$$

idet man har sat:

$$C = \frac{1 - 3 \frac{m}{e}}{1 - 4 \frac{m}{e}}, \quad C_1 = \frac{2m}{e} C, \quad C_2 = \frac{e}{m} C (1 - \frac{4}{3}C).$$

Størrelserne C_1 og C_2 ere rene Tal, uafhængige af Materialkonstanterne α og β , saa der kan beregnes en Tabel som herstaaende, en Gang for alle.

$\frac{m}{e}$	C_1	C_2
0,333	0,000	0,000
0,334	0,004	0,018
0,335	0,0098	0,042
0,336	0,0156	0,067
0,337	0,0212	0,090
0,338	0,0269	0,111
0,339	0,0323	0,132
0,340	0,0378	0,151
0,341	0,0431	0,170
0,342	0,0486	0,188
0,343	0,0535	0,204

Naar man da kender Trykket N og dets Angrebspunkt (m) samt Materialkonstanterne α og β , kan Størrelsen $\frac{N}{bm} \cdot \frac{\beta}{\alpha^2}$ beregnes og ved at opsøge denne Værdi i Tabellens sidste Kolonne bestemmes den tilsvarende Værdi af $\frac{m}{e}$ og C_1 ; dernæst kan største Trykspænding beregnes af:

$$\max \sigma = \alpha c e - \beta c^2 e^2 = \frac{1}{m} C_1 \frac{\alpha^2}{\beta} (e - \frac{1}{m} C_1 e^2).$$

F. Ex. for den af *Föppl* undersøgte Granit haves (se § 52) $\alpha = 10^6 \cdot 4,6$, $\beta = 10^8 \cdot 4,5$, altsaa $\frac{\alpha^2}{\beta} = 470$. For et vandret snit i en Mur antages:

$$N = 120^m, \quad b = 1^m, \quad m = 0,4^m.$$

Med Enhederne kg og cm findes da $\frac{N}{bm} \cdot \frac{\beta}{\alpha^2} = 0,064$, hvor-
 ifølge Tabellen svarer $\frac{m}{e} = 0,3359$, $e = 119,1^m$; $\frac{1}{m} C_1 = 0,00037$, $\max. \sigma = 0,00037 \cdot 470 \cdot 113,86 = 19,8 \text{ kg./cm.}^2$.
 Efter Formel (13) ovenfor — under Forudsætning af Hooke's Lov — findes $\max. \sigma = 20 \text{ kg./cm.}^2$.

Paa samme Maade findes med N og b uforandrede:

$$\text{for } m = 80^m, \quad 13,33^m.$$

med parabolisk Arbejdslinie, $\max. \sigma = 10,2, \quad 58,4,$

efter (13) $\max. \sigma = 10,0, \quad 60,0.$

Afvielserne mellem de her fundne Resultater og de af (13) følgende ere altsaa højst ubetydelige, hvilket ogsaa er meget naturligt, da Arbejdslinien for Tryk er en meget flad Parabel. Man kan selvfølgelig altid regne med de ved Hooke's Lov udledede Resultater.

Opg. 34. Undersøg Fiberpaavirkningen (baade under Forudsætning af Trækspændinger og uden saadanne) i det nederste, Cirkelring-formede Tvær-snit af en 30^m. høj Skorsten med indvendig Diameter 0,8^m. foroven, 1,46^m forneden og med Murtykkelse 0,15^m foroven, 0,42^m. forneden. Skorstenen indeholder ialt 38 Cbm. Murværk (af Vægtfylde 1,9). Vindtrykket er 150 kg./m.²; der regnes med $\frac{2}{3}$ af Diametralsnittets Areal som Vindflade. Benyt først Tilnærmelsesformlerne, og undersøg dernæst Resultatets Nøjagtighed ved den grafiske Konstruktion.

§ 62. Monierkonstruktioner, paavirkede af Moment og Normalkraft. Ligesom i § 56 tænke vi her kun paa Anvendelse af ét Jærnnet. Hvis man vilde regne med en kontinuerlig krum Arbejdslinie for Betonen, vilde man, som man let overbeviser sig om, ikke kunne bestemme de resulterende Spændinger ved at addere de fra Momentet for sig og fra Normalkraften for sig hidrørende. Naar man deri-

mod anvender den i § 56 angivne Tilnærmelsesmethode, altsaa lader Arbejdslinien bestaa af to rette Linier, kan dette lade sig gøre, saaledes som vist i Fig. 165, Pl. 18; den punkterede Linie med Ordinaterne s og t fremstiller de fra Momentet M alene hidrørende Spændinger, Ordinaterne mellem den punkterede og den fuldt optrukne Linie de fra Normalkraften N (pr. 1^{cm}. Bredde) alene hidrørende. Idet s_1 betegner Tilvæksten til Trykspændingen s , t_1 og r_1 Formindskelserne af Trækspændingerne t og r i Beton og Jærn, og idet der forøvrigt i det følgende bruges de samme Betegnelser som i § 56, har man

$$N = s_1 \cdot h - (s_1 - t_1)(h - x - x_0 - \frac{1}{2}b) + F \cdot r_1.$$

I Stedet herfor kan man imidlertid altid nøjagtigt nok sætte

$$N = s_1 \cdot h; \quad (17)$$

antages f. Ex. $s = 20$, $s_1 = 10$, hvilke Værdier ofte ville passe, og endvidere (smlgn. § 56):

$$x = \frac{1}{2}h, \quad h - x - x_0 = \frac{1}{2}h \left(1 - \frac{8}{s}\right) = 0,3h,$$

$$b = \frac{s_1}{s} \cdot x = 0,25h, \quad F = 0,01h, \quad r_1 = \frac{E_t}{E_c} \cdot s_1 = 8s_1,$$

$$t_1 = \frac{E_c'}{E_c} \cdot s_1 = 0,28s_1,$$

findes:

$$N = 0,95 \cdot s_1 \cdot h.$$

Hvis $F = 0$ (for Hvælvinger kan man antage $0,01h > F > 0$), findes med de samme Værdier af $x \dots$ som ovenfor:

$$N = 0,87s_1 \cdot h.$$

Hvis $h < x + x_0 + \frac{1}{2}b$, skal naturligvis 2det Led i det nøjagtige Udtryk for N ikke medtages, og man faar da, hvis $F = 0,01h$, $r_1 = 8s_1$:

$$N = 1,08s_1 \cdot h.$$

Ligningen $N = s_1 \cdot h$ giver derfor en meget god Tilnærmelse. Naar s_1 er beregnet herved, findes t_1 og r_1 af:

$$t_1 = 0,28s_1, \quad r_1 = 8s_1. \quad (18)$$

Betontykkelsen h bestemmes saaledes, at $s + s_1 = 30 \text{ kg./cm.}^2$. Hvorledes man bærer sig ad hermed, skulle vi senere komme tilbage til.

Jærntværsnittet skal bestemmes paa lignende Maade som § 56 for Bjælker; man ser altsaa bort fra Trækspændinger i Betonen — tænker sig en Revne, der naar helt op til den neutrale Axe — og sørger for, at Forholdet mellem den totale Trykspænding i Betonen og den totale Trækspænding i Jærnet bliver lig Forholdet mellem Brudbelastningerne $\left(\frac{1}{m}\right)$. Naar Spændingerne, efterat Revnen paa Træksiden er indtraadt, betegnes ved mærkede Bogstaver, skal man altsaa have:

$$\frac{s' + s_1'}{r' - r_1'} = \frac{1}{m};$$

heri er $r_1' = 8s_1'$ og ifølge Ligning (13) i § 56:

$$r' = 8s' \cdot \frac{h - x' - a}{x'},$$

hvorved:

$$x' = \frac{8(1 - \alpha)h}{(8 + m) \left(1 + \frac{s_1'}{s'}\right)}.$$

Naar dette Udtryk endelig sættes lig den ved Ligning (14) i § 56 bestemte Værdi af x' , faas:

$$\frac{8(1 - \alpha)h}{(8 + m) \left(1 + \frac{s_1'}{s'}\right)} = 8\varphi h \left[\sqrt{1 + \frac{1 - \alpha}{4\varphi}} - 1 \right],$$

eller
$$\varphi = \frac{4(1 - \alpha)}{\left[m(m + 8) + (m + 8)^2 \frac{s_1'}{s'} \right] \left(1 + \frac{s_1'}{s'}\right)}. \quad (19).$$

Sætter man ligesom i § 56 $m = \text{ca. } 14,3$, findes:

$$\varphi = \frac{1 - \alpha}{80 \left(1 + 1,5 \frac{s_1'}{s'}\right) \left(1 + \frac{s_1'}{s'}\right)}. \quad (19a).$$

Heri indgaa Spændingerne s_1' og s' fra N og M , efterat

Revnen paa Træksiden er indtraadt. s' findes ved (17) i § 56, s_1' af:

$$N = s_1'(x' + \frac{1}{2}b') + F \cdot r_1' = s_1'x' \left(1 + \frac{1}{2}\frac{s_1'}{s'}\right) + 8Fs_1', \quad (20)$$

hvor $b' = \frac{s_1'}{s'} \cdot x'$ betegner en Størrelse ganske analog med b i Fig. 165. Ved den første Gennemregning maa man skønne Forholdet $\frac{s_1'}{s'}$; man kan antage

$$\frac{s_1'}{s'} = 1,3 \cdot \frac{s_1}{s} - 2 \frac{s_1}{s},$$

og man maa naturligvis helst benytte den laveste Værdi for ikke at finde φ for lille.

Til Dimensionsbestemmelsen har man nu Ligningerne (17), (18), (19a) og (20) samt fra § 56 Ligning (10b) med tilhørende Tabel, (13), (14) og (17); disse Ligninger fra § 56 gentages her

$$(10b) \text{ i § 56: } M = sh^2 \left(S + 8 \frac{\varphi}{n} (1 - n - \alpha)^2 \right),$$

$$(13) \text{ i § 56: } r' = 8s' \cdot \frac{h - x' - a}{x'},$$

$$(14) \text{ i § 56: } x' = 8\varphi h \left(\sqrt{1 + \frac{1 - \alpha}{4\varphi}} - 1 \right),$$

$$(17) \text{ i § 56: } M = \frac{1}{2}s \cdot x'^2 + Fr'(h - x' - a).$$

Beregningens Gennemførelse vil lettest forstaas af et *Exempel*. Der er givet: $N = 100$ kg., $M = 450$ kg. cm., begge pr. 1^{cm}. Bredde; Tværsnittet skal bestemmes.

For at faa et foreløbigt Begreb om Dimensionerne benytte vi (10d) i § 56, $s = \frac{6M}{h^2}$, og have da:

$$s + s_1 = 30 = \frac{6 \cdot 450}{h^2} + \frac{100}{h},$$

hvoraf $h = \text{ca. } 12^{\text{cm}}$, $s = \text{ca. } 19$, $s_1 = \text{ca. } 8$, $\frac{s_1}{s} = 0,42$.

Naar vi i (19a) sætte $\frac{s_1'}{s'} = 1,3 \cdot \frac{s_1}{s} = 0,55$ og $a = 1,5^{\text{cm}}$,

$$e = \frac{1,5}{12} = 0,125, \text{ findes } \varphi = \frac{0,875}{226} = 0,0039, F = 0,0468.$$

Vi vælge herefter som Jærndindlæg 8^{mm} Rundjærn i 10^{cm} . Afstand, hvorved $F = 0,05$, $\varphi = 0,0042$, og kunne saa skride til den nøjagtigere Gennemregning.

Vi begynde med at finde s af (10b) i § 56; idet s omtrent er lig 20 og $\varphi = 0,0042$, faas af den til (10b) hørende Tabel ved Interpolation: $n = 0,472$, $S = 0,141$, hvorefter (10b) giver:

$$450 = s \cdot 12^2 (0,141 + 0,012), s = 20,5.$$

Af (17) findes nøjagtigt: $s_1 = \frac{100}{12} = 8,4$, altsaa er $s + s_1 = 28,9$ kg./cm.²; Betontykkelsen 12^{cm} kan følgelig fastslaaes. — For dernæst at undersøge, om Jærndindlægget er tilstrækkeligt, maa vi beregne s' og s_1' . Af (14) i § 56 findes:

$$x' = 0,4 \left(\sqrt{1 + \frac{0,875}{0,0168}} - 1 \right) = 2,5^{\text{cm}}.$$

Af (13) i § 56:

$$r' = 8s' \cdot \frac{12 - 2,5 - 1,5}{2,5} = 25,2 \cdot s',$$

hvorefter (17) i § 56 giver:

$$450 = 2,08 s' + 0,05 \cdot 25,2 \cdot 8 \cdot s' = 12,16 s', \\ s' = 37, r' = 932.$$

Endelig giver (20):

$$100 = 2,5s_1' \left(1 + \frac{1}{2} \frac{s_1'}{37} \right) + 0,4s_1',$$

hvoraf man ved at prøve sig frem finder $s_1' = 26$.

Nu har man $\frac{s_1'}{s'} = \frac{26}{37} = 0,7$, medens der ovenfor regnedes 0,55; (19a) maa derfor nu give et mindre φ end før, saa man kan bruge de valgte Jærndimensioner. Der er neppe nogen Grund til at prøve, om man kan nøjes med mindre.

II. Paavirkning ved Normalspændinger alene under Hensyn til Nedbøjningerne.

§ 63. Ideale Søjler. Har man en Søjle, d. v. s. et prismatisk Legeme, hvis Længde er betydelig i Forhold til Tværsnitsdimensionerne, og som paavirkes til Tryk i sin Længderetning, saa ville de tidligere udviklede Formler for direkte Sammentrykning ikke være tilstrækkelige til Dimensioneringen, idet der nemlig optræder et nyt Moment, Tilbøjelighed til Udbøjning til Siden. Det indses let, at en saadan Bøjning, hvis den indtræder, kan blive langt farligere end Sammentrykningen. Vi ville foreløbig betragte en *ideal Søjle*. af en saadan kræves, at Axen er fuldstændig retlinet, at Trykket virker fuldkommen centralt og i Axens Retning, og at dens Materiale er fuldkommen homogent. Endvidere ville vi forudsætte Søjlen *simpelt understøttet* i begge Ender; Endepunkterne ere da bundne til at blive i den rette Linie, der forbinder dem, men Tangenterne til Axen i disse Punkter kunne dreje sig frit.

Idet den sammentrykkende Kraft er P , Søjle's Tværsnitsareal F , har man, naar ingen Bøjning indtræder, Spændingen

$$\sigma = \frac{P}{F}.$$

Antager man imidlertid, at Søjlen af en eller anden Grund bøjer sig noget ud til Siden (Fig. 166, Pl. 18), vil der i hvert Punkt virke et bøjende Moment Py og en central Normalkraft P ; største Moment findes ved Midten, hvor Nedbøjningen er $y_{\max.} = f$, og største Spænding her bliver:

$$\sigma = \frac{P}{F} \left(1 \pm \frac{Ffe}{I} \right) = \frac{P}{F} \left(1 \pm \frac{fe}{i^2} \right) = \frac{P}{F} \left(1 \pm \frac{e}{k} \right),$$

hvor e betegner Afstanden ud til de yderste Fibre, i Inerti-radius, k Kærneradius. For at kunne anvende denne Ligning maa man kende f ; det er derfor nødvendigt først at bestemme Nedbøjningslinjen.

Formforandringen hidrører dels fra Normalkraften (en ren Forkortelse), dels fra Bøjningen; den førstes Indflydelse paa

Ordinaterne y er imidlertid saa ringe, at vi kunne se bort herfra. I saa Fald er den elastiske Linies Differentialligning:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{Py}{EI};$$

det negative Fortegn hidrører fra, at Konkaviteten, hvis y er positiv, vender mod de negative y 'er.

Denne homogene og lineære Differentialligning af 2den Orden integreres ved Substitutionen $y = e^{mx}$, hvorved findes

$$m = \pm \sqrt{-\frac{P}{EI}},$$

og efter Omskrivning til trigonometriske Funktioner bliver den primitive Ligning:

$$y = C \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x + D \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x.$$

Konstanterne C og D skulle bestemmes ved, at $x = 0$ giver $y = 0$, hvorved $D = 0$, og ved at $x = l$ ligeledes giver $y = 0$ (der er herved set bort fra Længdeforskellen mellem Bue og Korde); dette giver:

$$C \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot l = 0,$$

som tilfredsstilles ved $C = 0$, hvorved den elastiske Linies Ligning bliver $y = 0$; *den ideale Søjle kan altsaa holde sig ubøjet for en hvilken som helst Kraft*. Hermed er der imidlertid ikke sagt noget om, at der ikke kan existere nogen Ligevægtsstilling i bøjet Tilstand, hvis en Bøjning muligvis paa Grund af en eller anden ydre Paavirkning er indtraadt; selv om Søjlen kan blive ved at holde sig retlinet, er det derfor ikke givet, at den af sig selv vil gaa tilbage til den retlinede Stilling, hvis den en Gang er ført noget bort fra den. Vi maa derfor undersøge, om P ikke kan have en saadan Værdi, at den kan forhindre Søjlen i at rette sig ud igen, naar en Bøjning er indtraadt.

I Udtrykket $K = C \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot l$ lade vi P voxe jævnt fra Nul; hvis vi forudsætte C forskellig fra Nul, altsaa Søjlen

bøjet ud, kan K ikke blive Nul for mindre Værdier af P end

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2};$$

der kan altsaa, naar $P < P_E$, ikke være Ligevægt paa anden Maade, end ved at $C = 0$, d. v. s. *naar $P < P_E$, vil Søjlen af sig selv rette sig ud.* Hvis derimod $P = P_E$, vil Betingelsen $K = 0$ være opfyldt, og den elastiske Linies Ligning bliver

$$y = C \sin \pi \cdot \frac{x}{l}.$$

Ligningen indeholder endnu den arbitrære Konstant C , og man ser, at C angiver Størrelsen af Bøjningspilen paa Midten; man kommer herved til det mærkelige Resultat, at *der kan være Ligevægt i en hvilken som helst Stilling, for en hvilken som helst Bøjningspil, naar $P = P_E$.* Man maa nu vel erindre, at hele den foregaaende Udvikling kun gælder, saa længe Proportionalitetsgrænsen ikke er overskredet, saa man kun direkte kan slutte, at $P = P_E$ kan holde Ligevægt mod en hvilken som helst Nedbøjning indenfor Proportionalitetsgrænsen; naar $P = P_E$, maa man altsaa være forberedt paa Muligheden af en Nedbøjning, hvorved i alt Fald Proportionalitetsgrænsen naas. Hvis denne overskrides, er E kun konstant for en uendelig lille Spændingstilvæxt, men i et bestemt Øjeblik (for en bestemt Nedbøjning) kan den Værdi af P , der kan holde Søjlen i Ligevægt i bøjet Stilling, beregnes af samme Udtryk som ovenfor, naar man blot indfører den øjeblikkelige Værdi af E . Da E imidlertid udenfor Proportionalitetsgrænsen stadig aftager, vil Kraftens Grænseværdi her ogsaa aftage, hvoraf følger, at den ovenfor bestemte Værdi P_E kan paavirke Søjlen lige til Brud. *P_E maa altsaa i alle Tilfælde betragtes som en højere Grænse for Søjls Bæreevne.*

Foruden den nu bestemte Grænseværdi P_E gives der andre: Udtrykket $C \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot l$ bliver nemlig Nul for alle Værdierne

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2},$$

hvor n betegner et vilkaarligt helt Tal. Den elastiske Linies Ligning bliver herved:

$$y = C \sin \frac{n\pi}{l} \cdot x,$$

der fremstiller en Sinusoide med n Bugter. Imidlertid kan man ikke gaa ud fra, at Søjlen skal kunne modstaa en større Kraft end P_E , hvis der ikke foreligger nogen ydre Anledning til, at Punkterne $x = \frac{1}{n} l, \frac{2}{n} l \dots$ af Søjlen's Midtlinie blive liggende paa y -Axen, og da vi her kun have forudsat en simpel Understøtning ved hver Ende, men ingen Mellemunderstøtninger, maa vi blive staaende ved Grænseværdien P_E .

De nu fundne Resultater for den ideale Søjle kunne sammenfattes saaledes: *saalænge $P < P_E$, er der stabil Ligevægt i den retlinede Stilling; naar $P = P_E$, er der ligegyldig Ligevægt med enhver Udbøjning, og naar $P > P_E$, er der ustadig Ligevægt i den retlinede Stilling, og en tilfældig opstaaet Nedbøjning vil vedblive at voxe, indtil Brud indtræder.*

Formlen for Grænseværdien P_E er allerede angivet i Aaret 1757 af *Euler* og benævnes almindeligt efter ham. Skønt den saaledes er en af de ældste af alle vore Formler i Elasticitetslæren, er der næppe nogen anden, der har været Genstand for saa megen Tvivl og Modsigelse i Tidens Løb, og det er egentlig først i den sidste halve Snes Aar, at den navnlig ved *Bauschingers* og *Tetmajers* Experimenter, som vi nedenfor skulle omtale nærmere, er kommen rigtig til Ære og Værdighed. Grunden til den ringe Tiltro, den tidligere har nydt, er dels den rent praktiske, at Formlen ikke giver nogen som helst Oplysning om, hvilken Fiberpaavirkning Materialet er udsat for, og man var nu en Gang vant til at bedømme en Konstruktions Sikkerhed efter Spændingens Størrelse; dels syntes det heller ikke bekræftet af Erfaringen, at der for $P = P_E$ virkelig var ligegyldig Ligevægt, som ovenfor udviklet, og selve dette Resultat er ganske vist saa mærkeligt, at Tvivl om Rigtigheden er naturlig nok. En direkte Eftervisning af den ligegyldige Ligevægts Existens ved Forsøg vilde naturligvis være meget vanskelig, fordi det næsten er umuligt at komme til at experimentere med en fuldtud »ideal« Søjle, og hertil kommer saa den uheldige Omstændighed, at Formlen

ikke er slet saa ideal som den Søjle, for hvilken den skal gælde. Ved Udledelsen ovenfor have vi gjort Brug af forskellige Tilnærmelser, og Formlen selv kan saa selvfølgelig ogsaa kun blive en Tilnærmelse; nu, men ogsaa først nu i de sidste Aar, er det ved Forsøg bleven paavist, at den virkelig er en ligesaa god Tilnærmelse som de fleste af vore andre Formler, der ogsaa ere bundne til forskellige indskrænkende Forudsætninger. Men man har ikke altid erindret de ved Udledelsen indførte Tilnærmelser og den deraf betingede Gyldighedsgrænse for Formlen, og man er derved kommen til at bedømme den forkert.

De Tilnærmelser, vi ovenfor have tilladt os, ere følgende

¹⁾ Der er set bort fra Forkortelsen, der hidrører fra den direkte Sammentrykning; dette er mindre væsentligt.

²⁾ Der er gjort alle de samme Forudsætninger som ved Behandlingen af Bøjning i § 24 o. f. (opregnede i § 35), og den vigtigste af dem er, at Nedbøjningerne ere betragtede som saa smaa Størrelser, at man har kunnet sætte $\varphi = 1: \frac{d^2y}{dx^2}$.

³⁾ Ved Konstantbestemmelsen ere Buelængde og Korde-længde regnede lige store.

Af disse Forudsætninger følger tydeligt nok, at Eulers Formel kun kan gælde, saa længe Nedbøjningerne ere smaa, men hvis dette er Tilfældet, og navnlig hvis Buelængde og Korde kunne sættes lige store, er Resultatet angaaende den ligegyldige Ligevægt ogsaa let forstaaeligt. Nedbøjningen af en Bjælke er nemlig, som bekendt, proportional med Momentfladens Moment, og da Momentet her er lig $P \cdot y$, falder Momentkurven og den elastiske Linie sammen. De forskellige

elastiske Linier have ifølge Ligningen $y = C \sin \frac{\pi}{l} \cdot x$ proportionale Ordinater, og hvis Nedbøjningerne alle blive multiplicerede med k , ville ogsaa Momenterne $P y$ og Momentfladens Moment blive multiplicerede med k ; var der Ligevægt før, vil der da ogsaa være det i den nye Stilling. Vi have ogsaa i

7, Slutningen, set, at naar Belastningskurven er en Sinusoide, falder den tilsvarende Tovpolygon sammen med Belastningskurven; herved er ganske det samme udtrykt.

Vi ville nu vise, hvorledes Beregningen kan gennemføres

iden alle disse Tilnærmelser. Den nøjagtige Differentialligning for Søjlels elastiske Linie er:

$$\frac{EI}{\rho} = -Py = EI \frac{d\varphi}{ds},$$

det φ betegner Tangentvinklen i det vilkaarlige Punkt (x, y) . Ved Differentiation heraf og Indførelse af den kortere Betegnelse

$$\frac{P}{EI} = \frac{1}{a^2} \text{ faas:}$$

$$-\frac{dy}{ds} = -\sin \varphi = a^2 \frac{d^2\varphi}{ds^2},$$

og ved Multiplikation med $2d\varphi$ og Integration:

$$2 \cos \varphi = a^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + C.$$

I Punktet A (Fig. 167, Pl. 18) er $\varphi = \varphi_0$ og endvidere $y = 0$, altsaa ifølge den oprindelige Differentialligning:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds} = 0, \text{ hvorved } C \text{ bestemmes; man faar:}$$

$$2(\cos \varphi - \cos \varphi_0) = a^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2, \quad (a).$$

$$\text{og ved igen at indføre } \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{P}{EI} \cdot y = -\frac{y}{a^2}:$$

$$y^2 = 2a^2(\cos \varphi - \cos \varphi_0),$$

$$y = \sqrt{2} \cdot a \sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}. \quad (b).$$

Største Nedbøjning f svarer til $\varphi = 0$ og er derfor:

$$f = \sqrt{2} \cdot a \sqrt{1 - \cos \varphi_0} = 2a \sin \frac{1}{2} \varphi_0. \quad (c).$$

Heri er φ_0 endnu ubekendt; den skal bestemmes derved, at Længden af Buen AB (Fig. 167) skal være lig Søjlels oprindelige Længde $l \div$ Forkortelsen $\frac{Pl}{EF}$ paa Grund af den direkte Sammentrykning. Vi indføre Betegnelsen:

$$l_1 = l - \frac{Pl}{EF}.$$

Til Bestemmelse af Buelængden haves Differentialligningen (a), der giver:

$$ds = -\frac{a}{\sqrt{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}},$$

idet der er sat negativt Fortegn, fordi (Fig. 167) φ aftager med voxende s . Dette fører til:

$$\frac{1}{2} l_1 = -\int_{\varphi_0}^0 \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}.$$

Integralet her er det samme elliptiske Integral, som man f. Ex. træffer paa ved Undersøgelsen af det mathematiske Pendul. det behandles sædvanligvis ved en Omskrivning og Rækkeudvikling*), hvorved man omsider finder:

$$l_1 = \pi \cdot a \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} \dots \right].$$

For at faa et simplere Udtryk at regne videre med ville vi for $\sin \frac{\varphi_0}{2}$ indføre Rækkeudviklingen

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} = \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\varphi_0^3}{48} \dots;$$

naar 4de og højere Potenser af φ_0 bortkastes — Tilnærmelsen er altsaa langt nøjagtigere end tidligere — faas:

$$l_1 = \pi a \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16} \right), \quad \varphi_0^2 = 16 \left(\frac{l_1}{\pi a} - 1 \right), \quad (d).$$

hvorved φ_0 er udtrykt ved de givne Størrelser. Vi kunne nu finde en Relation mellem Bøjningspilen f paa Midten og Kraften P ved at kombinere Ligningerne (d) og (c); $\cos \varphi_0$ i (c) erstattes først med sin Rækkeudvikling, hvorved 4de og højere Potenser af φ_0 ligeledes bortkastes. Der findes da:

$$f = a \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \varphi_0} = a \sqrt{2} \sqrt{1 - (1 - \frac{1}{2} \varphi_0^2)} = a \varphi_0,$$

$$f = 4 \sqrt{\frac{l_1}{\pi} a - a^2} = 4 \sqrt{\frac{l_1}{\pi} \frac{\sqrt{EI}}{P} - \frac{EI}{P}}. \quad (e).$$

*) Se f. Ex.: Jul. Petersen: *Dynamik*, Kbhvn. 1887. S. 38, eller H. G. Zeuthen: *Forelæsninger over Bevægelseslære*, Kbhvn. 1896, S. 36.



For $P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ er $f = 0$, og for mindre Værdier af P er f imaginær; dette stemmer altsaa med Udviklingen ovenfor, hvorved fandtes, at der ingen Bøjning indtræder for $P < P_E$; her er blot l_1 traadt i Stedet for l . Derimod er der ikke ligegyldig Ligevægt for $P = P_E$; Nedbøjningen er i dette Øjeblik endnu Nul. For $P > P_E$ svarer der endelig ifølge (e) til hver Værdi af P en bestemt Værdi af f , og altsaa ifølge Formlen $\sigma = \frac{P}{F} + \frac{Pfe}{I}$ en bestemt Fiberpaavirkning. Imidlertid voxer σ i den Grad hurtigt med P , at der kun skal en højst ubetydelig Overskridelse af P_E til for at frembringe Brud, og heri ligger Grunden til, at det maa betegnes som en tilstrækkelig god Tilnærmelse at betragte P_E som en Grænseværdi for Søjlen Bæreevne.

Tages f. Ex. en massiv, cirkulær Smedejærnsøjle med Diameter 5^m, $F = 19,635\text{cm}^2$, $I = 30,68\text{cm}^4$, $l = 200\text{cm}$, saa er:

$$P_E = \frac{3,1416^2 \cdot 2000000 \cdot 30,68}{40000} = 15140 \text{ kg.}$$

l_1 bliver lig 199,92^{cm}, saa det indses, at man meget godt kan sætte $l_1 = l$, hvilket gøres ved den følgende Beregning efter Formel (e).

Vi sætte nu $P = P_E + 5 \text{ kg.} = 15145 \text{ kg.}$ og finde hermed:

$$\frac{EI}{P} = 4051,5021, \quad \frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{EI}{P}} = 4052,1627,$$

altsaa: $f = 4 \cdot \sqrt{0,6606} = 3,24\text{cm}.$

Fiberpaavirkningen bliver:

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{Pfe}{I} = 770 + 4000 = 4770 \text{ kg./cm}^2.$$

Naturligvis gælde Formlerne kun til Proportionalitetsgrænsen, saa den fundne Værdi af σ er ikke rigtig, undtagen maaske hvis Materialet er meget haardt Staal. Men Exemplet taler tydeligt nok: for $P = P_E$ er Søjlen retlinet og $\sigma = 770$, men ved en Tilvæxt af kun 5 kg. til Kraften bøjer Søjlen sig stærkt ud til Siden, og hvis vi forudsatte almindeligt blødt Staal, bliver Proportionalitetsgrænsen langt overskredet og maaske endog Brudgrænsen naaet.

Ved den gennemførte nøjagtigere Undersøgelse *) er der kun brugt følgende Tilnærmelser: der er set bort fra Forskydningsspændingerne, som dog kun blive højst ubetydelige, og 4de og højere Potenser af Tangentvinklen ere bortkastede; og Resultatet er, at *Eulers Formel i alt væsentligt er rigtig, kun ikke med Hensyn til den ligegyldige Ligevægt for $P = P_E$*

Efter det nu viste kan Bæreevnen — d. v. s. Brudbelastningen; der tales her ikke om den tilladelige Belastning — for en ideal Søjle bestemmes ved *Eulers Formel*:

$$P \leq P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (21)$$

samt ved:

$$P = \sigma_B F, \quad (22)$$

hvor σ_B betegner Brudbelastningen for direkte Tryk, enten man nu derved vil forstaa Flydegrænsen eller en noget højere Værdi. Ved Søjler er der forøvrigt, naar vi et Øjeblik tænke paa virkelige (ikke ideale) Søjler, særlig Grund til at betragte Flydegrænsen som Brudgrænse; thi man kan gaa ud fra, at Materialet ikke er saa homogent, at Flydegrænsen naas i samme Øjeblik for alle Punkter af Tværsnittet; og naar Flydegrænsen overskrides først for nogle enkelte Fibre, vil den stærke Formforandring her bevirke, at Søjlen strax bøjer sig ud og giver efter. — De to Formler (21) og (22) maa anvendes samtidig: ved (21) sikrer man sig, at der ikke finder nogen Bøjning Sted, ved (22), at Materialet ikke knuses.

*) Denne Undersøgelse er allerede gennemført af Lagrange i 1770—73 (il. Todhunter: *A history of elasticity etc. from Galilei to the present time*. 1893) og findes i de fleste lidt mere omfattende Lærebøger, navnlig i de noget ældre (Clebsch: *Theorie der Elasticität fester Körper*, Leipzig, 1862, Grashof: *Festigkeitslehre*, Berlin, 1866, Bresse: *Cours de mécanique appliquée*, Paris, 1859—60, Flamant: *Résistance des matériaux*, Paris, 1886, o. fl.). Udviklingen er i Tidens Lob bleven simplificeret betydeligt (ved Fremstillingen her er navnlig benyttet en Artikel af Collignon i *Ann. des ponts et chaussées*, 1889, I, S. 98 og Flamant's ovennævnte Værk), men at Resultaterne endnu langt fra ere gaaede over i den almindelige Bevidsthed ses bedst af de ikke faa i den Retning pegende theoretiske Betragtninger, der fremkomme i Tidsskrifterne (f. Ex fra de senere Aar af R. Bredt i *Zeitschr. des Vereins deutscher Ing.*, 1894, *Zschetzsche*, ibid. 1895); for nylig er den nøjagtigere Beregning ogsaa fremkommen i amerikanske Tidsskrifter, og som det synes, som en ganske original Opfindelse (Wm. Cain i *Trans. A. S. C. E.* 1897, S. 493, Henry S. Prichard i *Eng. News*, May 6, 1897).

Naar man skriver (21) saaledes:

$$\sigma_E = \frac{P_E}{F} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}, \quad (21 a).$$

hvor i er mindste Inertiradius for Søjles Tværsnit, har man til Bestemmelse af Bæreevnen, at Fiberpaavirkningen i Søjlen hverken maa overskride σ_E eller σ_B . Størrelsen af σ_E er afhængig af $\frac{l}{i}$; i Fig. 168, Pl. 18, er vist en grafisk Fremstilling af den ideale Søjles Bæreevne, idet Spændingerne ere afsatte som Ordinater, $\frac{l}{i}$ som Abscisser, hvorved den fuldt optrukne Linie $ABCD$ er fremkommen. Paa Stykket AB er det den direkte Sammentrykning, der er farligst, paa Stykket BD er derimod σ_E bestemmende. BCD er en hyperbolsk Kurve med begge Axer som Asymptoter; den nærmer sig stærkest til $\frac{l}{i}$ -Aksen. Kurven BCD gælder, som ovenfor bemærket, kun indenfor Proportionalitetsgrænsen σ_p ; Stykket BC skulde derfor egentlig erstattes med en anden Kurve.

§ 64. Praktiske Søjler. En Søjle i praktisk Forstand har ikke de hidtil forudsatte Egenskaber. Det er i Almindelighed temmelig umuligt at sørge for, at Kraften virker ganske centralt og parallelt med Axen, og at Axen er fuldstændig retlinet, men selv om man ved overordentlig Omhyggelighed har opnaaet dette, vil Materialet saa godt som aldrig være fuldstændig homogent*).

De forskellige opregnede Mangler føre til de samme Slutningsresultater, saa man kan nøjes med nærmere at undersøge Følgerne af en enkelt af dem og dog betragte en saadan Undersøgelse som almenlydlig for en praktisk Søjle. Hvis saaledes de forskellige Elementer af en Søjles Tværsnit have forskellig Elasticitetskoefficient og Forkortelsen dog er lige stor i alle Punkter, saa vil den Kraft, der optages af de forskellige Elementer, ifølge Ligningen: $\sigma = E\varepsilon$, hvor ε er konstant, ikke

*) Sammenlign Angivelserne for Jærn i § 43 angaaende de forskellige elastiske Egenskabers Variation.

være den samme, og Resultanten af alle de indre Kræfter kommer derfor ikke til at virke i Tyngdepunktet; Mangel paa Homogenitet og excentrisk Paavirkning ere altsaa ensbetydende, og paa samme Maade gaar det med en oprindelig Ikke-Relinethed.

Vi betragte en praktisk Søjle med en oprindelig Nedbøjning f_0 og antage, at den under Paavirkning af Kraften P faar en elastisk Nedbøjning f (Fig. 169 a, Pl. 18); ligesom i forrige § forudsættes Søjlen foreløbig simpelt understøttet i begge Ender. Den elastiske Nedbøjning er proportional med Momentfladens Moment, men nu falde Nedbøjningslinie (den elastiske) og Momentkurve ikke mere sammen saaledes som ved den ideale Søjle; de elastiske Nedbøjninger maales mellem Kurverne AEB og ADB , Momenterne ere lig Ordinaterne mellem Axen ACB og Kurven ADB , multiplicerede med P . Naar det Moment af Momentfladen (for $P = 1$), der giver os Nedbøjningen paa Midten, kaldes M_1 , have for den praktiske Søjle:

$$f = C \cdot P \cdot M_1.$$

Denne Søjle sammenlignes nu med en ideal Søjle (Fig. 169 b), der har antaget den samme totale Nedbøjning $f + f_0$ og som altsaa maa være paavirket af Kraften P_E for at være i Ligevægt. Momentfladen er ganske den samme som for den praktiske Søjle, men hele Nedbøjningen er her elastisk, og vi have derfor:

$$f + f_0 = C \cdot P_E \cdot M_1.$$

Af denne Ligning og den tilsvarende ovenfor udledes:

$$f = f_0 \cdot \frac{P}{P_E - P} = f_0 \cdot \frac{\sigma}{\sigma_E - \sigma}, \quad (22)$$

idet
$$\frac{P}{F} = \sigma, \quad \frac{P_E}{F} = \sigma_E.$$

Herved er det vigtige Resultat udtrykt, at for en praktisk Søjle svarer der til enhver Værdi af Kraften P en bestemt elastisk Nedbøjning f . Ligning (22) er rigtignok kun udledet under Forudsætning af en oprindelig Nedbøjning f_0 , men ifølge Be-

nærkningerne ovenfor kunne vi betragte Resultatet som almenlydigt for praktiske Søjler og skrive derfor hellere

$$f = C \cdot \frac{P}{P_E - P} = C \cdot \frac{\sigma}{\sigma_E - \sigma}, \quad (22a).$$

hvor C nu betegner en af de forskellige Mangler ved Søjlen afhængig Konstant. Afsættes Kraften P eller Spændingen σ som Abscisse, den tilsvarende Nedbøjning som Ordinat, faas følge (22a) en Hyperbel med Asymptoten $P = P_E$. Da C kun udtrykker de uundgaaelige Afvigelser fra det ideale, kan man gaa ud fra, at den i alt Fald er en nogenlunde lille Størrelse, og f begynder da først at voxe stærkt, naar P nærmer sig til P_E ; P_E angiver altsaa ogsaa her den farlige Grænseværdi for Kraften.

Et Bevis for Rigtigheden af Ligningerne (22) og (22a) har bl. a. *Föppl**) leveret ved en Række Forsøg med Vinkeljærn med smaa oprindelige Nedbøjninger ($1-3^{mm}$). Der maalttes de til forskellige Værdier af Kraften svarende Størrelser af f , og der fandtes i det hele god Overensstemmelse med Formlerne ovenfor. En af Maalingerne er fremstillet i Fig. 192, Pl. 21; Vinkeljærnet her havde Dimensionerne $80 \cdot 80 \cdot 10^{mm}$, $f_0 = 3^{mm}$, $l = 2,1345^m$, $P_E = 17^u$; Brudbelastning (stærk Udbøjning til Siden) $15,7^u$.

Opg. 35. Find ved Beregning de elastiske Nedbøjninger y af en Søjle, der har en oprindelig Krumning $y' = f_0 \sin \pi \frac{x}{l}$, naar den er simpelt understøttet i begge Ender og paavirket af en central Kraft P .

Naar man nu ved (22a) kender den til hver Værdi af Kraften P svarende største Nedbøjning f , kan man beregne den totale største Fiberpaavirkning. Søjleens Bæreevne er fuldt udnyttet, naar største Spænding har naaet Brudgrænsen σ_B , der, som ovenfor udviklet, her maa betragtes som faldende sammen med Flydegrænsen, hvis en saadan findes. Formlen til Beregning af Spændingen gælder naturligvis egentlig kun op til Proportionalitetsgrænsen, men Fejlen ved at anvende den op til Flydegrænsen σ_B vil ikke blive særlig stor, da det jo først er udenfor denne Grænse, at Formforandringerne begynde at voxe meget stærkt; for sprøde Materialer findes ingen Flyde-

*) *Mittheilungen aus dem mech.-techn. Laboratorium, München, Heft 25.*

grænse, σ_B betyder da Brudgrænsen, men Arbejdslinien for saadanne Materialer krummer i det hele mindre, saa Fejlen ved Anvendelse af Formlen bliver heller ikke her særlig stor. En praktisk Søjles Bæreevne er derfor tilnærmelsesvis givet ved Ligningen:

$$\begin{aligned}\sigma_B &= \frac{P}{F} + \frac{Pfe}{I} = \sigma + \frac{\sigma e}{i^2} \cdot C \frac{\sigma}{\sigma_E - \sigma} \\ &= \sigma \left(1 + C \frac{e}{i^2} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_E - \sigma} \right).\end{aligned}\quad (23)$$

Claxton Fidler *), efter hvem ovenstaaende Udvikling for praktiske Søjler nærmest er taget, viser, at Størrelsen $C \cdot \frac{e}{i^2}$ for alle almindelig anvendte Tværsnitsformer nøjagtigt nok kan sættes lig 0,4 (rent Tal). Ved Indsættelse heraf og Oplosning med Hensyn til σ faas:

$$\sigma = \frac{\sigma_E + \sigma_B - \sqrt{(\sigma_E + \sigma_B)^2 - 2,4\sigma_E\sigma_B}}{1,2}, \quad (24)$$

der angiver den Belastning pr. Arealenhed ($\sigma = P:F$), man kan hyde Søjlen til direkte Tryk, naar den resulterende største Fiberpaavirkning ikke skal overskride σ_B (Flydegrænsen). σ varierer med $\frac{l}{i}$, der nemlig indgaar i $\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}$; afsættes

σ som Ordinat, $\frac{l}{i}$ som Abscisse, fremstiller (24) en Kurve som den i Fig. 168, Pl. 18, punkterede. For $\frac{l}{i} = 0$ og $\frac{l}{i} = \infty$ tangerer *Cl. Fidlers* Kurve den for den ideale Søjle, men for mellemliggende Værdier af $\frac{l}{i}$ ligger den lavere; ved Valget af Konstanten $C \frac{e}{i^2}$ i (23) lig 0,4 tilstræber *Cl. Fidler* at faa Kurven til at ligge saa lavt, at den danner en lavere

*) *A practical treatise on bridge-construction*, London 1893, S. 161 o. f. *Föppl (Festigkeitslehre*, Leipzig, 1897, S. 346 o. f.) har en ganske lignende Udvikling, dog indføres Proportionalitetsgrænsen σ_P i Stedet for σ_B .

rænse for Bæreevnen, ligesom Kurven for den ideale Søjle anner en højere Grænse; imellem disse to burde da alle Forsøgsresultater gruppere sig.

I (23) og (24) er der kun taget Hensyn til Trykspæningerne, men for et Materiale som Støbejern, hvor Brudrænsen for Træk er langt lavere end for Tryk, maa man ogsaa ikkê sig, at Trækspændingen ikke overskrider Brudgrænsen. Da vi dog ikke ville benytte (24) til virkelige Beregninger, men hertil bruge de empiriske Formler nedenfor, gøres der nu i Forbigaaende opmærksom paa dette Forhold.

Ved foranstaaende Betragtninger er der givet et Begreb om, hvorledes man maa forklare sig en praktisk Søjles Virke-
maade, og man forstaar, at Bæreevnen nødvendigvis maa vise sig at være noget mindre end for den ideale Søjle paa Grund af de uundgaaelige Unøjagtigheder. En hvilken som helst Formel, der opstilles for praktiske Søjler, maa derfor indeholde en eller flere Konstanter, der skulle være et Udtryk for størrelsen af Afvigelsen fra det ideale, og som maa bestemmes ved Sammenligning med Forsøgsresultater; Ligning (24) indeholder saaledes Konstanten C . Den korrekte Fremgangsmaade vilde derfor være af de foreliggende Experimenteer at udlede de bedste Værdier af disse Konstanter og saa ved forefaldende Beregninger at benytte (24) eller andre paa lignende Maade udledede, theoretisk begrundede Formler. Alle saadanne lide midlertid af den for Anvendelserne ubehagelige Mangel at være altfor komplicerede, hvorfor man for længe siden er kommen ind paa at benytte rent empiriske Formler.

En Overgang til disse danner *Rankine's* Formel *):

$$\sigma = \frac{\sigma_B}{1 + \alpha \left(\frac{l}{i} \right)^2}, \quad (25).$$

hvor Betydningen af σ og σ_B , l og i er den samme som ovenfor, medens α er en Konstant. Formlen er oprindelig opstillet paa Grundlag af lignende theoretiske Betragtninger, som ovenfor førte til (24), men da Udledelsen aldeles ikke kan gøre Fordring paa at kaldes exact, gør man bedst i at betragte

*) Kaldes i Tyskland almindeligt den *Schwartz-Rankine'ske*, da den skal være opstillet samtidigt af disse to. Den (eller en i høj Grad lignende Formel) benævnes ogsaa undertiden *Gordons* Formel.

den som empirisk; for at faa den til at passe bedre med Forsøgsresultaterne har man ofte behandlet σ_B som en Konstant, der ligesom α skulde bestemmes ved Forsøgene. Formlen har i lang Tid spillet en stor Rolle, men synes nu, som vi nedenfor skulle se, helst at maatte forlades.

Inden vi kunne komme ind paa de anstillede Forsøg, skulle vi endnu se paa de forskellige mulige Understøtningsmaader. De sædvanlig betragtede Tilfælde ere viste i Fig. 170—72, Pl. 19. I Fig. 170 er Søjlen indspændt i den ene Ende (d. v. s. Tangenten her kan ikke dreje sig), fuldstændig fri i den anden; i Fig. 171 er den indspændt i begge Ender, og i Fig. 172 er den indspændt i den ene Ende, simpelt understøttet i den anden (Tangenten her kan frit dreje sig, men Endepunktet er bundet til at blive i den oprindelige Axe). Alle disse Tilfælde behandles ved at føre dem tilbage til den i begge Ender simpelt understøttede Søjle. Søjlerne bøje sig i alle Tilfælde efter Sinusoider, og de ville aabenbart forholde sig ganske som simpelt understøttede Søjler, hvis frie Længde er lig Afstanden mellem Sinusoidernes Vendepunkter; disse Afstande ere angivne i Figurerne. Man benytter derfor de samme Formler som for simpelt understøttede Søjler, idet man blot indfører den for hver Understøtningsmaade gældende »frie Længde«. F. Ex. bliver den Eulerske Grænseværdi for Belastningen:

$$P_E = \begin{array}{ccc} \text{i Fig. 170,} & \text{i Fig. 171,} & \text{i Fig. 172,} \\ \frac{\pi^2 EI}{4l^2}, & \frac{\pi^2 EI}{\frac{1}{4}l^2}, & \frac{\pi^2 EI}{\frac{1}{2}l^2}. \end{array}$$

Opg. 36. Find Ligningen for den elastiske Linie for en ideal Søjle som i Fig. 171 og Fig. 172.

Man gaar frem som i § 63; Differentialligningerne blive

for Fig. 171: $EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -(M_0 + Py)$, for Fig. 172: $EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py + Sr$,

Idet M_0 og S betegne et foreløbig ubekendt Kraftpar og en foreløbig ubekendt Kraft, der virke i de øverste Understøtningspunkter i Figurerne, og som bestemmes ved de fra Understøtningernes Beskaffenhed hentede Betingelser

Vi have her stadig tænkt os Kraften virkende i den ene Ende af Søjlen; forskellige andre Tilfælde kunne forekomme,*

*) Jasinski (*Ann. d. ponts et chaussées*, 1894, II, S. 233) har undersøgt en Del forskellige Paavirkningsmaader.

— Kraften ensformig fordelt over Søjlen Længde o. l. — men da de kun have Betydning for specielle Undersøgelser af Brotragere, skulle vi ikke opholde os derved her.

De anførte Understøtningsmaader forekomme sjældent ganske nøjagtigt i Praxis. Den frie Drejelighed kan man nærme sig til ved at anvende et Kugleled eller en cylindrisk Tharnierbolt, men der vil altid optræde en betydelig Friktion, som virker til Gunst for Søjlen; en fuldstændig Indspænding forekommer naturligvis heller ikke, men man nærmer sig deril ved at anvende en stiv, nittet Forbindelse. Et i Praxis hyppigt forekommende Tilfælde er, at Søjlen med plane Endelader støtter mod faste Plader; i Begyndelsen, saalænge der ikke foregaar nogen væsentlig Bøjning, virker denne Understøtning som en Indspænding, men man er ikke sikker paa, at dette bliver ved at gælde; ved en noget stærkere Udbøjning kan der let finde en Drejning Sted, saaledes at Trykket nu overføres ude ved Kanten, og Søjlen Bæreevne er da langt mindre end før.

De første omfattende Forsøg med Søjler ere anstillede af *Hodgkinson* (1840). Han anvendte plane Endeflader eller afrundede Ender og udtrykte Resultaterne ved empiriske Formler af Formen

$$P = C \frac{d^m}{l^n},$$

hvor d er Diametren eller (Kvadrat-) Siden i Tværsnittet. Formlen gjaldt kun for $l > 15d$ for afrundede Ender, $l > 30d$ for plane Endeflader. m nærmede sig i Almindelighed til 4, n til 2, saa Forsøgene i det hele og store viste Rigtigheden af Eulers Formel, naar Længden var stor i Forhold til Diametren.

Efter *Hodgkinson* genoptoges Forsøgene egentlig først om ved 1880, men siden den Tid er der ogsaa udført adskillige. *Bauschinger* *) anvendte først koniske Staalspidser til Overførelse af Trykket og nærmede sig herved stærkt til at realisere en »simpel Understøtning«; desuden eksperimenterede han ogsaa med plane Endeflader; Materialet var *Svejsjærn*. Resultaterne af hans Forsøg ere i Hovedtrækkene følgende: for spidse Ender leverer Eulers Formel rigtige Værdier af Brud-

*) *Mittheilungen*, Hest 15.

belastningen, naar blot Spændingen $\sigma (= P:F)$ ikke overskrider en vis Værdi, maaske Proportionalitetsgrænsen. Rankine's Formel passer derimod mindre godt; af 22 Forsøg beregnes de heldigste Værdier af Konstanterne i (25) til:

$$\sigma_B = 2270 \text{ kg./cm.}^2, \quad \alpha = 0,000058.$$

For *plane Endeflader* passer Eulers Formel derimod ikke videre godt, Rankine's noget bedre; Konstanterne i den sidste beregnes af 12 Forsøg til:

$$\sigma_B = 3100 \text{ kg./cm.}^2, \quad \alpha = 0,000029.$$

*Considère**) overførte Trykket ved Hjælp af to paa hinanden vinkelrette Knivsegge og prøvede sig frem, indtil det kom til at virke ganske centralt, saa hans Forsøg nærme sig vel mest af alle til at opfylde de theoretiske Forudsætninger, man gør ved Beregningen af ideale Søjler. Han fandt derfor ogsaa, at Bruddet indtraadte for en Belastning, der kun var lidt større end den, der frembragte den første kendelige Udbøjning, og i det hele vise hans Resultater fuldstændig Overensstemmelse med Eulers Formel, naar Spændingen ikke naar op til Proportionalitetsgrænsen. Forøvrigt eksperimenterede Considère med saa forskelligartet Materiale (Svejsjærn og Staal af højst forskellig Haardhed og i højst forskellig Tilstand — udglødet eller ikke udglødet), at man ikke kan uddrage særlig paalidelige Regler for Praxis af hans Resultater.

I Nordamerika er der udført en hel Del Forsøg,**) angaaende hvilke vi ligeledes skulle indskrænke os til enkelte Hovedresultater. Der er i Almindelighed eksperimenteret enten med *plane Endeflader* eller med Understøtning paa en cylindrisk Bolt, og det angives gerne paa Grundlag af disse Forsøg, at man kan regne den »frie Længde« til:

$$\begin{aligned} \text{for plane Endeflader} & \dots 0,62 l, \\ \text{- Bolteforbindelser} & \dots 0,78 l. \end{aligned}$$

*) Se *Rapport XXIX de la commission des méthodes d'essai*, T. III, eller *Ann. d. ponts et chaussées*, 1894, II, S. 291.

**) For smedeligt Jærn: *Bouscaren*, Trans. A. S. C. E. Dec. 1880, *Clarke*, *Reeves* o. fl., Trans. A. S. C. E. Jan. 1882. *Christie*, Trans. A. S. C. E. April og Maj, 1884. *Marshal*, Trans. A. S. C. E. Aug. 1887. *Strobel*, refereret i *Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing.* 1888, S. 1121. For Støbejærn *Report of tests at Watertown Arsenal* 1887 og 88, *Eng. News*, 1898, Nr. 2 og 3, o. fl.

Af Forsøgene er der udledet en Mængde empiriske Formler, som sædvanligvis have faaet Formen:

$$\sigma = \sigma_B - \beta \frac{l}{i}, \quad (26)$$

hvor σ_B og β ere Konstanter; Betydningen af σ_B er analog med Betydningen af samme Bogstav i (24) og (25). Ligningen (26) er den simpleste Form, man overhovedet kan bruge; σ er grafisk fremstillet ved Ordinaterne til en ret Linie. Naar man sammenligner med Formen af den *Cl. Fidler'ske* Kurve i Fig. 168, Pl. 18, vil det være klart, at (26) kun kan levere rigtige Resultater for Værdier af $\frac{l}{i}$, der ligge indenfor nogenlunde snævre Grænser. Derved forklares det, at der er angivet en Mængde forskellige Værdier af Konstanterne. Nu er det jo ovenfor nævnt, at Eulers Kurve stemmer godt med Erfaringen for store Værdier af $\frac{l}{i}$, og det er da ogsaa kun for de mindre Værdier heraf, som ere de i Praxis hyppigst forekommende, at (26) skal bruges. Men det maa da anses for det naturligste, at der findes en kontinuerlig Overgang mellem Euler-Kurven for de større Værdier af $\frac{l}{i}$ og den anvendte empiriske Formel for de lavere Værdier; Naturen gør sjældent pludselige Spring. Derfor har *T. H. Johnson* foreslaaet, at man kun skulde anvende saadanne Former af (26), hvorved der bestemmes Tangenter til Euler-Kurven. Og af samme Grund, men tillige for at opnaa større Nøjagtighed, har *J. B. Johnson**) foreslaaet følgende empiriske Formel:

$$\sigma = \sigma_B - \gamma \cdot \left(\frac{l}{i}\right)^2, \quad (27).$$

hvor γ er en Konstant, der bestemmes saaledes, at den ved Ligningen fremstillede Parabel tangerer Euler-Kurven

$$\left(\sigma = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}\right); \text{ herved faas: } \gamma = \frac{\sigma_B^2}{4\pi^2 E} \quad (27 a)$$

*) *J. B. Johnson: Modern framed structures, New-York, 1894, S. 148.*

og Røringspunktet:

$$\frac{l}{i} = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_B}}. \quad (27b)$$

Vi skulle om et Øjeblik se, at (27) virkelig passer overmaade godt med Forsøgsresultaterne, i alt Fald for smedeligt Jærn, og Anvendelsen af denne Form medfører den Fordel, at Røringspunktet med Euler-Kurven, altsaa Gyldighedsgrænsen for (27), svarer til saa stor en Værdi af $\frac{l}{i}$, at man meget sjældent faar Anvendelse for mere end denne ene Formel. Endvidere besidder (27) det Fortrin, at der kun forekommer den ene Konstant σ_B , og den vil for smedeligt Jærn aldrig afvige synderligt fra Flydegrænsen.

Endelig komme vi til *Telmajers**) Forsøg, de mest omfattende, der ere anstillede. Vi begynde med dem, der angaa *Svejsjærn* og *blødt Staal*. Søjlerne dannedes af enkelte Vinkel-, $\square$ - eller Γ -Jærn eller af to eller fire sammennittede Profiler eller endelig af Rundjærn; ved nogle enkelte af de korteste anvendtes plane Endeflader, men i de allerfleste Tilfælde overførtes Trykket gennem koniske Staalspidser, saa Søjlerne vare simpelt understøttede. Forholdet $\frac{l}{i}$ varierede mellem ca. 20 og ca. 250, enkelte Gange op til 350. Materialet karakteriseres ved følgende Gennemsnitsegenskaber (fundne ved Trækforsøg, alle i kg./cm.²):

	E	Proportionalitetsgrænse			Flydegrænse			Brudgrænse		
		Med.	Max.	Min.	Med.	Max.	Min.	Med.	Max.	Min.
Svejsjærn	1980000	1600	1970	1310	2450	2930	1770	3640	4140	3240
Blødt Staal	2150000	2100	2640	1730	2800	3490	2370	4220	4690	3860

De vigtigste Resultater ere: for $\frac{l}{i} > 112$ (for *Svejsjærn*)

*) *Mittheilungen*, Heft 4 og 8. Alle Resultaterne af de egentlige Søjleforsøg findes i Heft 8.

Her $\frac{l}{i} > 105$ (for Staal) passer Eulers Formel godt; for mindre Værdier af $\frac{l}{i}$ kan bruges følgende empiriske Formler af Formen (26): for Svejsjærn:

$$\sigma = 3030 - 12,9 \cdot \frac{l}{i} \text{ kg./cm.}^2.$$

for blødt Staal (Brudgrænse $< 4000 \text{ kg./cm.}^2$):

$$\sigma = 3100 - 11,4 \cdot \frac{l}{i} \text{ kg./cm.}^2.$$

for haardere Staal (Brudgrænse $> 4000 \text{ kg./cm.}^2$):

$$\sigma = 3210 - 11,6 \cdot \frac{l}{i} \text{ kg./cm.}^2$$

Rankine's Formel passer slet ikke*); hvis man endelig vil bruge denne Formel, kan man dog for $\frac{l}{i} < 120$ regne: for Svejsjærn:

$$\sigma = \frac{2790}{1 + 0,000060 \left(\frac{l}{i}\right)^2} \text{ kg./cm.}^2,$$

for blødt Staal:

$$\sigma = \frac{2970}{1 + 0,000069 \left(\frac{l}{i}\right)^2} \text{ kg./cm.}^2.$$

»Svækkelsen af Tværsnittet ved Nittehullerne har, naar Hullerne ere godt udfyldte, ingen kendelig Indflydelse paa Bæreevnen, saalænge Tværsnitsformindsnelsen ikke udgør mere end ca. 12 0/0.«

Til disse Resultater skal nu gøres et Par Bemærkninger, idet vi gaa ud fra den grafiske Fremstilling i Fig. 173, Pl. 19, hvor alle Tetmajers Forsøg med Staal ere afsatte; Fremstil-

*) Dette Resultat er ganske vist rigtigt, som vi skulle se ved Hjælp af en grafisk Fremstilling (Fig 173, Pl. 19), men ved en mindre logisk Bevisførelse overdrives Uoverensstemmelsen i høj Grad. De anførte Konstanter i Rankines Formel findes i Tetmajer's *Mitth.*, Heft 4, men Formlen er ganske banlyst i Heft 8.

lingen for Svejsjærn ligner ganske den i Fig. 173. Ved alle Forsøgene paa 7 nær vare Søjlerne simpelt understøttede; de 7 med plane Endeflader ere specielt mærkede i Figuren ved Dobbeltcirkler; $\frac{l}{i}$ er for dem alle syv < 30 . De sorte Prikker betegne »Gruppetyngdepunkter«; det er ved dem, man bedst ser, om Resultaterne stemme med Formlerne.

I Figuren er indlagt *Euler-Kurven*

$$\sigma = \frac{9,87 \cdot 2150000}{\left(\frac{l}{i}\right)^2},$$

og man ser, at den passer udmærket, i alt Fald naar $\frac{l}{i} > \text{ca. } 120$. Endvidere er der indlagt *Tetmajers rette Linie*:

$$\sigma = 3100 - 11,4 \frac{l}{i};$$

den skærer Euler-Kurven i Punktet $\frac{l}{i} = 105$, $\sigma = 1900$ kg. cm.², hvilken Værdi snarest ligger lidt under Proportionalitetsgrænsen. Den passer meget godt undtagen i Nærheden af Skæringspunktet med Euler-Kurven, hvor de sorte Prikker, der betegne Middelværdierne, afgjort ligge lavere. — Dernæst er der indlagt en *Rankine-Kurve* med de ovenfor angivne Værdier af Konstanterne for Staal; man ser, at den passer nogenlunde, skønt ikke særlig godt, op til $\frac{l}{i} = \text{ca. } 120$, men for større Værdier af $\frac{l}{i}$ ligger den absolut for højt. Man maa nu erindre, at medens det med f. Ex. *Tetmajers rette Linie* kun er Meningen, at den skal bruges for $\frac{l}{i} < \text{ca. } 105$, saa skulde Rankine-Kurven kunne bruges i alle Tilfælde; men man overbeviser sig let om, at det er umuligt at faa den til at passe ordentligt*).

*) Fastholdes f. Ex. Værdien 2970 af Konstanten σ_B , og bestemmes α saaledes, at Rankine- og Euler-Kurverne skære hinanden for $\frac{l}{i} = 200$, findes $\alpha = 0,00011$; men den herved bestemte Rankine-Kurve ligger hele

Endelig er der i Fig. 173 indlagt en *Johnson-Parabel* af Formen (27). Man faar ved den en meget smuk Bekræftelse paa, at der virkelig bør være en tangentiell Overgang mellem Euler-Kurven og den empiriske Kurve, man benytter for mindre Værdier af $\frac{l}{i}$. Bestemmer man nemlig ved de mindste Kvadraters Methode de to Konstanter σ_B og γ i Parablens Ligning (27), idet man benytter alle *Tetmajers* Resultater med $\frac{l}{i} < 120$ undtagen de 7 med plane Endeflader, som ikke direkte kunne sammenlignes med de andre,*) finder man:

$$\sigma_B = 2783, \gamma = 0,0911,$$

og naar man dernæst efter (27a) bestemmer γ saaledes, at Parablen med det fundne σ_B tangerer Euler-Kurven, findes:

$$\gamma = 0,0912.$$

Johnson-Parablen med de nævnte Værdier af Konstanterne passer betydelig bedre med Forsøgene end *Tetmajers* egen rette Linie, hvilket baade ses i Fig. 173 og endnu tydeligere ved at sammenligne det beregnede σ med det observerede for alle de enkelte Forsøg. Tangeringspunktet mellem Parablen og Euler-Kurven findes or $\frac{l}{i} = 123$.

Resultatet af disse Undersøgelser er altsaa, at *det bedste Udtryk for simpelt understøttede Staal-Søjlers Brudbelastning leveres af:*

Tiden for lavt; for $\frac{l}{i} = 50$ have $\sigma = 2300$, for $\frac{l}{i} = 100$, $\sigma = 1415$. Bestemmes derimod Konstanterne saaledes, at Kurven gaar gennem Punkterne $\frac{l}{i} = 80$, $\sigma = 2180$ og $\frac{l}{i} = 173$, $\sigma = 700$ (to af de sorte Prikker i Fig. 173), findes $\sigma_B = 5140$, $\alpha = 0,000212$; men Kurven passer saa slet ikke udenfor Intervallet $\frac{l}{i} = 80 - 173$ og kun daarligt indenfor det.

*) A priori ved man ikke noget om, hvorledes Resultaterne for disse 7 skulle sammenlignes med de andre. *Tetmayer* indfører for dem uden videre den frie Længde lig $\frac{1}{2}l$ og finder saa bagefter en Bekræftelse paa Rigtigheden heraf deri, at hans rette Linie passer lige saa godt for dem som for de andre Forsøg. Denne Konklusion er dog ikke særlig overbevisende.

Johnson-Parablen: $\sigma = 2783 - 0,0912 \left(\frac{l}{i}\right)^2$ for $\frac{l}{i} < 123$,

Euler-Kurven: $\sigma = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}$ for $\frac{l}{i} > 123$.

For *Svejsjærns-Søjler* findes ganske det samme Resultat. Konstanterne i Johnson-Parablen ere her, naar de bestemmes efter de mindste Kvadraters Methode:

$$\sigma_B = 2579, \gamma = 0,0867,$$

medens Betingelsen for Tangering med Euler-Kurven er (med $\sigma_B = 2579$):

$$\gamma = 0,0844.$$

Røringspunktet findes for $\frac{l}{i} = 124$, omtrent samme Værdi som for Staal. For *Svejsjærn* kan man derfor benytte:

Johnson-Parablen: $\sigma = 2579 - 0,0844 \left(\frac{l}{i}\right)^2$ for $\frac{l}{i} < 124$,

Euler-Kurven: $\sigma = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}$ for $\frac{l}{i} > 124$.

Med *Sløbejærns-Søjler* har *Tetmajer* gjort ikke mindre end 296 Forsøg. Tværsnittet var enten kvadratisk, 3.3^{cm.}, eller Cirkelring-formet med indvendig Diameter 10, 12 eller 15^{cm.}. Godstykkeelse 0,8 — 1,0^{cm.}, Længden op til 4,0^{m.}; $\frac{l}{i}$ varierede mellem 8 og 200, for runde, hule Søjler dog kun op til 110. Kvaliteten af det anvendte Materiale karakteriseres ved følgende Værdier af Brudgrænsen for Træk og Tryk (B_t og B_c) og for Bøjning af Stænger med Tværsnit 3^{cm.}. 3^{cm.} (B_b); Tallene ere kg./cm.² og Middeltal af 4 — 6 Forsøg:

B_t	B_c	B_b
1780	8090	2600
1770	8390	2700
1770	8220	2540
1430	6200	2330

Som Hovedresultat af Forsøgene angiver *Tetmajer*: for $\frac{l}{i}$
 > 80 passer *Eulers Formel* godt, for mindre Værdier af $\frac{l}{i}$ anbefales *Formlen*:

$$\sigma = 7760 - 120 \frac{l}{i} + 0,53 \left(\frac{l}{i}\right)^2 \text{ kg./cm.}^2,$$

hvorved fremstilles en Parabel, der hele Tiden vender Konkavitet opad. For $\frac{l}{i} = 80$ give de to Formler samme Resultat.

Rankine's Formel passer ikke videre godt; sættes $\sigma_B = 7760$, og beregnes α saaledes, at *Formlen* giver samme Resultat, som *Euler-Kurven* og *Tetmajers Parabel*, faas følgende Værdier:

for $\frac{l}{i} = 10, \alpha = 0,00175,$	for $\frac{l}{i} = 90, \alpha = 0,00066,$
- » = 20, $\alpha = 0,00098,$	- » = 100, $\alpha = 0,00068,$
- » = 30, $\alpha = 0,00075,$	- » = 110, $\alpha = 0,00070,$
- » = 40, $\alpha = 0,00065,$	- » = 120, $\alpha = 0,00071,$
- » = 50, $\alpha = 0,00061,$	- » = 130, $\alpha = 0,00073,$
- » = 60, $\alpha = 0,00060,$	- » = 140, $\alpha = 0,00074,$
- » = 70, $\alpha = 0,00060,$	- » = 150, $\alpha = 0,00074,$
- » = 80, $\alpha = 0,00063,$	

Heraf slutter *Tetmajer*, at *Rankine's Formel* er ubrugelig; imidlertid synes α 's Variation dog ikke at være saa særlig stærk, naar man undtager de ganske smaa Værdier af $\frac{l}{i}$, som man aldrig faar Brug for, saa man kan meget godt betragte f. Ex. *Formlen*:

$$\sigma = \frac{7760}{1 + 0,00065 \left(\frac{l}{i}\right)^2} = \frac{7760}{1 + 0,0007 \left(\frac{l}{i}\right)^2}$$

som tilnærmelsesvis rigtig.

Endelig har *Tetmajer* anstillet ialt 305 Forsøg med *Træsøjler*, næsten alle af forskellige Sorter Naaletræ, kun 16 af Eg. Fugtighedsindholdet var for Naaletræ ca. 13 — 17 %, hvad omtrent svarer til almindelig lufttørret Træ. Brudgrænsen overfor Tryk (bestemt ved kvadratiske Prismer med $h = \text{ca.}$

$\frac{1}{2}b)$ var som Middelværdi 300 kg./cm.² for Naaletræt; Proportionalitetsgrænsen ca. 120 kg./cm.², $E = 105000$ kg./cm.².

$\frac{l}{i}$ varierede lige fra 1,8 til 200. Ved 171 af Forsøgene anvendtes der simple Understøtninger, ved 134 plane Endeflader: Forsøgene med de sidste ere ved Opstillingen af Formlerne nedenfor medtagne sammen med de andre, idet der som »fri Længde« er indført $\frac{1}{2}l$, hvilket siges at stemme. Tetmajer anbefaler dog selv ved praktiske Beregninger at sætte den »fri Længde« til 0,6—0,7l. Resultaterne ere: for $\frac{l}{i} > 100$ stemmer

Eulers Formel godt; for $\frac{l}{i} < 100$ anbefales Formlen:

$$\sigma = 293 - 1,94 \frac{l}{i} \text{ kg./cm.}^2,$$

hvorved fremstilles en ret Linie, der meget nær rører Euler-Kurven i Punktet $\frac{l}{i} = 100$. Rankine's Formel passer slet ikke, og der er for saa vidt heller ingen Grund til at bruge den, som den rette Linie og Eulers Formel ere simple og at regne med.

Tilladelig Paavirkning og Dimensionsbestemmelse. Alle ovenstaaende Formler angive Brudgrænsen; den tilladelige Paavirkning findes heraf ved som sædvanligt at indføre en Sikkerhedskoefficient, der kan have Værdierne:

for smedeligt Jærn,	Støbejærn,	Træ,
4 — 5,	8 — 10,	6 — 8.

Dimensionsbestemmelsen skal nu udføres ved Formlen $P = r \cdot F$, hvor:

for blødt Staal: *Sikkerhed at 4.*

$$\left. \begin{aligned} \frac{l}{i} < \text{ca. } 125: r &= 700 \left[1 - 0,000033 \left(\frac{l}{i} \right)^2 \right] \\ &= 700 \left[1 - \frac{1}{30000} \left(\frac{l}{i} \right)^2 \right] \text{ kg./cm.}^2, \\ \frac{l}{i} > \text{ca. } 125: r &= \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{5 \cdot l^2 \cdot F} = \frac{\pi^2 E}{5 \cdot \left(\frac{l}{i} \right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (28).$$

Sikkerhed at 5.

eller hvis man foretrækker *Tetmajers* rette Linie:

$$\frac{l}{i} < 105: \quad r = 750 \left(1 - 0,0033 \frac{l}{i} \right) \text{ kg./cm.}^2.$$

Man regner nøjagtigt nok $\pi^2 = 10$, $E = 2150000 \text{ kg./cm.}^2$.
 For *Svejsjærn* kan bruges de samme Formler; dog sættes i *Johnsons* Parabel bedst 650 i Stedet for 700. *Tetmajers* rette Linie giver her:

$$\frac{l}{i} < 112: \quad r = 700 \left(1 - 0,0042 \frac{l}{i} \right) \text{ cm.}^2.$$

I Eulers Formel er $E = 2000000 \text{ kg./cm.}^2$

For *Støbejærn* anbefales for alle Værdier af $\frac{l}{i}$:

$$r = \frac{750^2}{1 + 0,00065 \left(\frac{l}{i} \right)^2} \text{ kg./cm.}^2; \quad (29).$$

for Søjler, der ere støbte staaende, angives ofte langt mindre Værdier af Konstanten α i Nævneren, helt ned til 0,0002; dette er dog sikkert lovlig lavt.

For *Træ*:

$$\left. \begin{aligned} \frac{l}{i} < 100: \quad r &= 45 \left(1 - 0,0066 \frac{l}{i} \right) \\ &= 45 \left(1 - \frac{2}{300} \cdot \frac{l}{i} \right) \text{ kg./cm.}^2, \\ \frac{l}{i} > 100: \quad r &= \frac{\pi^2 EI}{8l^2 F} = \frac{\pi^2 E}{8 \cdot \left(\frac{l}{i} \right)^2} \quad ; \end{aligned} \right\} \quad (30).$$

E sættes her lig 100000 kg./cm.^2 .

Naar Søjles Længde er l , indføres i Formlerne:

for simple Understøtninger i begge Ender l ,

» Understøtninger paa cylindriske Bolte . . . $0,8 l$,

» — — — — — plane Endeflader $\underline{0,6-0,7 l}$ 97 - 98.

Den »frie Længde« beror forøvrigt ofte paa et Skøn; hvis f. Ex. en Søjle er forsynet med store fastnittede eller faststøbte Hoved- og Fodplader, kan man maaske nok gaa ned til $0,5l-0,6l$. Hvilken fri Længde man skal indføre for de

enkelte Stænger i nittede Brodragere o. l., kunne vi ikke komme ind paa her.

Inertimomentet eller Inertiradius, der indgaar i Formlerne, skal naturligvis altid tages om den Axe, om hvilken Bøjningen foregaar; *hvis Bøjningen lige godt kan foregaa i alle Retninger, skal man tage den Axe, der giver de mindste Værdier for I og i .*

For $\frac{l}{i} < 8-10$, for smedeligt Jærn endog op til $\frac{l}{i} < 20-25$, behøver man ikke at regne med Formlerne for Søjler; man har da kun at sørge for, at Tværsnitsarealet er stort nok til at op-
tage det direkte Tryk.

Hvis man for smedeligt Jærn regner med en af Formlerne i § 48 for den tilladelige Fiberpaavirkning, f. Ex.:

$$r = \frac{r_0}{1 + \left(1 - \frac{\sigma_{\min.}}{\sigma_{\max.}}\right)},$$

kan man ogsaa indføre den heraf følgende Værdi af r i Søjleformlerne ovenfor (undtagen i Eulers).

Ved de angivne Formler er det let at undersøge Bæreevnen af en Søjle med givet Tværnit, men den omvendte Opgave, som sædvanlig foreligger, nemlig at bestemme Tværsnittet, naar Kraften P og Søjle's frie Længde ere givne, er ulige vanskeligere, idet man her er henvist til at prøve sig frem. Dimensionsbestemmelsen foregaar dog nogenlunde let efter følgende Methode *).

Vi antage, at *Johnsons* Parabel, $r = r_0 \left[1 - \kappa \cdot \left(\frac{l}{i}\right)^2\right]$ skal benyttes; P og l ere givne. Vi indføre Betegnelserne:

$$\frac{P}{r_0} = F_0, \quad F = \zeta \cdot i^2,$$

hvor F er det søgte Tværnit, ζ et rent Tal, der alene er afhængigt af Tværsnitsformen; F_0 er det Tværnit, man skulde bruge, hvis man kun havde at tage Hensyn til det direkte Tryk, F_0 er altsaa bekendt. Man har nu:

*) Cf. *Fidler* (*A practical treatise on bridge-construction*, 1893, S. 184 o. f. anvender Metoden for Rankine-Kurven.

$$F = \frac{P}{r} = \frac{F_0}{1 - \kappa \cdot \left(\frac{l}{i}\right)^2} = \frac{F_0}{1 - \frac{\kappa \cdot l^2}{i^2}},$$

hvoraf:

$$F = F_0 + \zeta \kappa l^2.$$

(31).

Denne Formel besidder det store Fortrin, at den direkte viser, om et Tværsnit er økonomisk eller ikke; jo mindre Tillæget $\zeta \kappa l^2$ bliver, des mere økonomisk er det. Man kan naturligvis udlede en Formel, ganske analog med (31), ved at gaa ud fra Rankine's Kurve eller Tetmajers rette Linie i Stedet for Johnson's Parabel, men man kommer i begge Tilfælde til kvadratiske Ligninger i F ; til Anvendelse ved Dimensionsbestemmelse er altsaa Johnsons Parabel absolut den simpleste.

I (31) er ζ ubekendt. Hvis Profiltabellerne indeholdt Værdien af ζ for de forskellige Tværsnit, vilde Dimensionsbestemmelsen gaa overmaade let for sig, men selv uden saadanne Tabeller er Sagen forholdsvis simpel. For en bestemt Tværsnitsform varierer Tallet $\zeta = \frac{F}{l^2} = \frac{F^2}{I_{\min.}}$ ikke meget, og man kan hurtigt angive den omtrentlige Værdi. Man kan f. Ex. for tyske Normalprofiler regne (tilnærmelsesvis):

for ligesidede Vinkeljærn	$\zeta = 6,0$
- uligesidede — , $b:h = 2:3$, ...	$= 6,5$
- — — , $b:h = 1:2$, ...	$= 9,0$
- T-Jærn, $b = 2h$, ...	$= 6,8$
- — , $b = h$, ...	$= 5,0$
- □-Jærn	$= 5,8$
- I-Jærn	$= 10,0$
- 4 Vinkeljærn i Korsform, uden Mellemrum	$= 5,0$
- 2 T-Jærn — — — , $b = 2h$, ...	$= 7,7$
- 2 □-Jærn, Ryg mod Ryg	$= 6,0$
- 4 Kvadrant-Jærn, uden Mellemrum	$= 2,0$

Selv om man ikke just finder den Tværsnitsform, man skal bruge, blandt de her anførte, kan man i hvert enkelt Tilfælde let danne sig et Begreb om Værdien af ζ ved at beregne $F^2 : I_{\min.}$ for et Par Tværsnit.

Som nævnt, kan man med Rankine-Kurven (for Støbejærn) eller Tetmajers rette Linie (for Træ) som Udgangspunkter

danne lignende Formler som (31), men da Træ og Støbejern i Almindelighed anvendes med meget simple Tværsnitsformer, og da man, som sagt, kommer til kvadratiske Ligninger i F , vil det være lige saa lét at prøve sig frem.

Exempel 1. En 7,4^m lang Søjle af blødt Staal er understøttet i Kuglelejer ved Enderne og skal bære 90^{ts}; bestem Dimensionen, naar Tværsnittet skal dannes af 4 Kvadrantjærn.

Vi benytte Formlen $r = 700 \left[1 - \frac{1}{30000} \left(\frac{l}{i} \right)^2 \right]$ samt (31).

Den frie Længde regnes lig hele Søjleens Højde, 7,4^m.

$$F_0 = \frac{90000}{700} = 128,6 \text{ cm}^2, \quad \zeta \text{ tages efter Tabellen ovenfor}$$

$$\text{foreløbig lig } 2, \quad \kappa = \frac{1}{30000},$$

$$\kappa \cdot \zeta \cdot l^2 = \frac{2 \cdot 740^2}{30000} = 36,5 \text{ cm}^2.$$

$$F = F_0 + \kappa \zeta l^2 = 128,6 + 36,5 = 165,1 \text{ cm}^2.$$

Efter »Hütte« findes nu det hertil svarende Profilnummer at være Nr. 12½ (Tykkelse 14^{m.m.}), for hvilket $F = 168,8 \text{ cm}^2$.

Man skal derefter blot verificere Værdien af ζ ; for det nævnte Profil er

$$\zeta = \frac{F^2}{I} = \frac{168,8^2}{15591} = 1,83,$$

hvorefter den nøjagtige Værdi af $\kappa \cdot \zeta \cdot l^2$ er $\frac{1,83}{2} \cdot 36,5 = 33,4$.

Man kan ikke nøjes med et mindre Profil.

[Endelig haves Inertiradius $i = 9,6 \text{ cm}$, $\frac{l}{i} = 77$; det er altsaa rigtigt, at vi have benyttet Johnsons Parabel, ikke Euler-Kurven.]

Exempel 2. En Søjle med 9,0^m fri Længde skal bære 4,0^{ts}. Tværsnittet skal dannes af to ligesidede Vinkeljærn i Korsform.

Da Længden er stor og Belastningen forholdsvis lille, antage vi, at $\frac{l}{i} > 125$, saa man skal bruge Eulers Formel, der skrives $P = \frac{\pi^2 EI}{5l^2} = \frac{2EI}{l^2}$, hvor l indføres i cm.

Heraf findes:

$$I = \frac{Pl^2}{400},$$

hvor l nu indføres i m . Det nødvendige Inertimoment bliver altsaa:

$$I = \frac{4000 \cdot 81}{400} = 810^{cm^4}.$$

De to Vinkeljærn anbringes med Spidserne mod hinanden, saaledes at de have fælles Halveringslinie. Den Axe, om hvilken Inertimomentet for det samlede Tværsnit er mindst, er da Halveringslinien; i »Hütte« findes nu, at man kan bruge Vinkeljærnet 110. 110. 12^{m.m.}, for hvilket Inertimomentet om Halveringslinien er 450^{cm⁴}. For Søjleprofilet dannet af to saadanne Vinkeljærn findes endvidere:

$$i_{min.}^2 = \frac{900}{50} = 18, \quad i_{min.} = 4,24^{cm}, \quad \frac{l}{i} = 212.$$

For at de to Vinkeljærn kunne virke som én Søjle, maa de forbindes (ved smaa Pladestykker og Nitning) i Punkter i en saadan Afstand, at det enkelte Vinkeljærn under Paavirkning af den halve Belastning ikke knækker ud.

Man maa altsaa bestemme l af Ligningen $I = \frac{Pl^2}{400}$, idet $P = 2000$ kg., $I = I_{min.}$ for det enkelte Vinkeljærn = 118^{cm⁴}. Man finder:

$$l = \sqrt{\frac{400 \cdot 118}{2000}} = 4,86^m.$$

En Forbindelse ved hver Ende og én i Midten skulde herefter være tilstrækkelig. Dette bekræftes dog slet ikke af Forsøgene. *Tetmajer* angiver f. Ex., at ved en Afstand mellem Forbindelserne af 70 Gange Flangetykkelserne forholde sammenlignede Profiler sig endnu som ét Stykke, og han anfører et enkelt Tilfælde, hvor en Afstand paa 80 Gange Flangetykkelsen var for stor. Man maa derfor altid sætte disse Forbindelser i rigelig smaa Afstande, her f. Ex. for hver 0,5—0,6^m.

Exempel 3. En hul, cirkulær Støbejernssøjle med $l = 7^m$ og Understøtning paa plane Endeflader skal bære 50^u.

Den frie Længde regnes til $0,7 l = 4,9^m$. Ligning (29) benyttes. For at faa et omtrentligt Begreb om Dimensionerne an-

tages, at den tilladelige Paavirkning til direkte Tryk efter (29) vil blive ca. 500 kg./cm.²; man skulde i saa Fald have et Tværsnitsareal paa 100^{cm.2}, hvilket faas f. Ex. med en ydre Diameter $D = 18^{\text{cm.}}$ og Godstykkelsen $2^{\text{cm.}}$. Dette Tværnit har $I = 3267^{\text{cm.4}}$, $i^2 = 32,67$; altsaa er $\left(\frac{l}{i}\right)^2 = \frac{240100}{32,67} = 7350$,

og ved Indsættelse heraf i (29) findes $r = \frac{750}{1,48} = \text{ca. } 500$.

Det valgte Tværnit er altsaa passende. 130
5,78

Exempel 4. En Træstolpe med kvadratisk Tværnit, $l = 7,5^{\text{m.}}$, plane Endeflader, skal bære $25^{\text{t.}}$.

Dimensionsbestemmelsen udføres ved *Tetmajer's* Ligning (30):

$$r = 45 \left(1 - \frac{2}{300} \frac{l}{i}\right).$$

Kaldes den søgte Kvadratside for Tværnittet h , have
 $F = h^2$, $i = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{h}{3,47}$. Den frie Længde regnes til
 $0,7 l = 525^{\text{cm.}}$. Ved Indsættelse i Formlen for r findes:

$$\frac{25000}{h^2} = 45 \left(1 - \frac{2}{300} \cdot \frac{525}{h} \cdot \frac{3,47}{h}\right),$$

eller
$$\frac{5000}{h^2} = 9 - \frac{109,3}{h},$$

hvoraf man ved at løse Ligningen eller ligesaa simpelt ved at prøve sig frem finder $h = 30,5^{\text{cm.}} \approx 12''$.

Med denne Værdi af h er $i = \frac{30,5}{3,47} = 8,8$, $\frac{l}{i} = 60$; det er altsaa rigtigt, at man har benyttet Tetmajers Formel, ikke Eulers.

§ 65. Søjler, paavirkede af excentrisk Tryk. I Fig. 174, Pl. 19, er en i begge Ender simpelt understøttet Søjle paavirket af en Kraft P med den oprindelige Excentricitet f_0 . Idet Søjlen bøjer sig, bliver den virkelige Excentricitet i et vilkaarligt Punkt lig $f_0 + \text{Nedbøjningen}$. Det bøjende Moment i det vilkaarlige Punkt bliver $P(f_0 - y)$, hvor det negative Fortegn for y hidrører fra, at y i Fig. 174 selv er negativ.

Differentialligningen for den elastiske Linie er altsaa:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{EI} (f_0 - y),$$

eller med Betegnelsen $\frac{P}{EI} = \alpha^2$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha^2 \cdot (f_0 - y).$$

Den hertil svarende primitive Ligning er:

$$y - f_0 = C \sin \alpha x + D \cos \alpha x,$$

hvor man til Konstantbestemmelsen har, at $x = 0$ giver $y = 0$, altsaa $D = -f_0$, og at $x = l$ giver $y = 0$, altsaa

$$C = -f_0 \frac{1 - \cos \alpha l}{\sin \alpha l}.$$

Den største Nedbøjning findes for $x = \frac{1}{2} l$ og bliver

$$\begin{aligned} f &= f_0 - f_0 \frac{1 - \cos \alpha l}{\sin \alpha l} \sin \frac{1}{2} \alpha l - f_0 \cos \frac{1}{2} \alpha l \\ &= f_0 \left[1 - \cos \frac{1}{2} \alpha l - \frac{2 - 2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha l}{2 \cos \frac{1}{2} \alpha l} \right] = -f_0 \frac{1 - \cos \frac{1}{2} \alpha l}{\cos \frac{1}{2} \alpha l}. \end{aligned}$$

Det største bøjende Moment er:

$$M_{\max.} = P(f_0 - f) = Pf_0 \left(1 + \frac{1 - \cos \frac{1}{2} \alpha l}{\cos \frac{1}{2} \alpha l} \right) = Pf_0 \sec \frac{1}{2} \alpha l,$$

$$M_{\max.} = Pf_0 \sec \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}}. \quad (32)$$

Saasnart der findes en oprindelig Excentricitet, faar man altsaa — ligesom i forrige § med en oprindelig Nedbøjning — en ganske bestemt Nedbøjning for hver Værdi af P ; der er ingen Ubestemthed tilbage. Af (32) ses, at Momentet voxer med P og bliver uendelig stort for

$$\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{\pi}{2}, \text{ eller } P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = P_E;$$

den Eulerske Grænseværdi P_E vedbliver altsaa at optræde som Grænseværdi, ogsaa naar P virker excentrisk. Herefter skulde

det i visse Tilfælde være ligegyldigt, hvor stor Excentriciteten er; til syvende og sidst skulde Bæreevnen dog være den samme som for en centralt paavirket Søjle. Denne Urimelighed forklares imidlertid simpelt derved, at ovenstaaende Beregninger kun ere rigtige, saalænge Proportionalitetsgrænsen ikke er overskreden, og dette vil naturligvis ske langt tidligere her end ved den centralt paavirkede Søjle. Grænseværdien P_E faar altsaa her kun Betydning, hvis største Fiberpaavirkning ikke naar op til Proportionalitetsgrænsen for $P < P_E$.

Vi maa følgelig beregne største Fiberpaavirkning, men først ville vi dog for at faa simplere Udtryk i (32) erstatte $\cos$ med Rækkeudviklingen; dette giver:

$$M_{\max.} = Pf_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{Pl^2}{8EI}},$$

og idet 8 ikke er meget forskellig fra π^2 , og idet $\frac{\pi^2 EI}{l^2} = P_E$, ville vi sætte:

$$M_{\max.} = Pf_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{P}{\mu \cdot P_E}} = Pf_0 \cdot \frac{\mu \sigma_E}{\mu \sigma_E - \sigma},$$

hvor $\sigma_E = P_E : F$, $\sigma = P : F$, og hvor μ er en Konstant, der vilde være lig $\frac{8}{\pi^2}$, hvis den indførte Rækkeudvikling gav den nøjagtige Værdi; nu kan μ muligvis senere bestemmes saaledes, at Formlen kommer til at passe med Forsøgene.

Største Fiberpaavirkning bliver:

$$\begin{aligned} \frac{P}{F} \pm Pf_0 \cdot \frac{\mu \sigma_E}{\mu \sigma_E - \sigma} \cdot \frac{e}{I} &= \frac{P}{F} \left(1 \pm f_0 \frac{e}{I} \cdot \frac{\mu \sigma_E}{\mu \sigma_E - \sigma} \right) \\ &= \sigma \left(1 \pm \frac{f_0}{k} \cdot \frac{\mu \sigma_E}{\mu \sigma_E - \sigma} \right), \end{aligned} \quad (33).$$

hvor k betegner Kærneradius i Kraftliniens Retning; idet P er et Tryk, have vi regnet Trykspændinger positive. Læses nederste Fortegn, faar man største Trækspænding, og den maa naturligvis (ved Dimensionsbestemmelser) ikke blive større end den tilladelige Belastning for Træk. Øverste Fortegn

giver største Trykspænding, og angaaende dens tilladelige Størrelse hersker der meget forskellige Meninger*). Nogle antage, at Brud først indtræder, naar Trykspændingen nærmer sig til Brudgrænsen — forudsat naturligvis, at P ikke forinden har overskredet Værdien P_E —; andre sætte Flydegrænsen (hvis en saadan findes) i Stedet for Brudgrænsen, og dette Standpunkt er sikkert rigtigere, saaledes som det nærmere er udviklet i forrige § for centralt paavirkede Søjler. Begge disse Anskuelser føre til det Resultat, at man ved Dimensioneringen kun har at sørge for, at den efter (33) fundne resulterende Fiberpaavirkning ikke overskrider en vis tilladelig Værdi r . Men denne Betingelse er ikke tilstrækkelig betryggende; thi den kan godt være opfyldt, og dog kan P være meget nær ved den farlige Grænseværdi P_E , og heraf vilde følge det mærkelige Resultat, at en Søjle med en given, lille Excentricitet skulde kunne gøres svagere, end hvis den var centralt paavirket. Andre mene endelig, at største Trykspænding ikke maa overskride den tilladelige Belastning for centralt paavirkede Søjler med samme $\frac{l}{i}$. Det sidste Standpunkt er naturligvis det forsigtigste, og det ser ret tiltalende ud, idet man da, naar Excentriciteten blev Nul, vilde komme tilbage til de for centralt paavirkede Søjler gældende Formler. Imidlertid er man paa den Maade altfor meget paa den sikre Side, som vi skulle se nedenfor. — Vi ville foreløbig betegne den resulterende største Trykspænding med σ_B og vente med at fastslaa dens tilladelige Værdi til senere.

Der sættes altsaa:

$$\sigma_B = \sigma \left(1 + \frac{f_0}{k} \cdot \frac{\mu \sigma_E}{\mu \sigma_E - \sigma} \right),$$

og ved Opløsning med Hensyn til σ findes heraf:

$$\sigma = \frac{1}{2} \left[\sigma_B + \mu \sigma_E \left(1 + \frac{f_0}{k} \right) \right] - \sqrt{\frac{1}{4} \left[\sigma_B + \mu \sigma_E \left(1 + \frac{f_0}{k} \right) \right]^2 - \mu \sigma_E \sigma_B}$$

*) Se f. Ex. Zeitschr. d. österr. Ing.- und Arch.-Vereins, 1897, S. 725.

$$= \frac{1}{2} \left[\sigma_B + \mu \sigma_E \left(1 + \frac{f_0}{k} \right) \right] \cdot \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\mu \sigma_E \sigma_B}{\frac{1}{4} \left[\sigma_B + \mu \sigma_E \left(1 + \frac{f_0}{k} \right) \right]^2}} \right].$$

Brøken under Rodtegnet er altid < 1 ; vi faa derfor en Tilnærmelse ved at opløfte til Potensen $\frac{1}{2}$ og bortkaste 2den og højere Potenser af Brøken. Dette giver:

$$\sigma = \frac{1}{2} \left[\sigma_B + \mu \sigma_E \left(1 + \frac{f_0}{k} \right) \right] \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{2\mu \sigma_E \sigma_B}{\left[\sigma_B + \mu \sigma_E \left(1 + \frac{f_0}{k} \right) \right]^2} \right) \right],$$

$$\sigma = \frac{\mu \sigma_E \sigma_B}{\sigma_B + \mu \sigma_E \left(1 + \frac{f_0}{k} \right)}. \quad (34)$$

Det herved bestemte σ er den Værdi af $P:F$, for hvilken den resulterende Paavirkning σ_B naar Brudgrænsen, — enten nu Bruddet foregaar ved Flydegrænsen eller den virkelige Brudgrænse —. For $f_0 = 0$ faar man en Formel, der er ganske analog med *Cl. Fidlers* Ligning (24) for centralt paavirkede Søjler. σ bliver efter (34) altid mindre end den mindste af de to Størrelser σ_B og $\mu \sigma_E$, og des mindre, jo større Excentriciteten er.

Man kan nu slaa ind paa ganske den samme Vej til Dimensionsbestemmelse af excentrisk paavirkede Søjler som den, der i forrige § anvendtes for central Paavirkning: dér bestemtes den Værdi af $P:F$, som vilde fremkalde Brud, og man sørgede saa for, at den virkelige Størrelse af $P:F$ kun blev $\frac{1}{n}$ heraf, men man tog intet Hensyn til den resulterende Spænding (fra direkte Tryk + Bøjning); ganske paa samme Maade have vi her ved (34) den Værdi af $P:F$, der medfører Brud, og vi maa derfor vælge F saaledes, at det virkelige $P:F$ kun bliver $\frac{1}{n}$ af det ved (34) bestemte σ . Man lægger Mærke til, at dette er en helt anden Methode end de ovenfor refererede, der alle gik ud paa at fastslaa en tilladelig højeste Værdi r af σ_B ; efter disse skulde man i (34) erstatte σ_B baade i Tælleren og Nævneren med r , efter den her udviklede Methode skal man derimod kun indsætte r i Stedet for σ_B i Tælleren. Det

tilladelige σ , som man saa finder af Formlen, bliver mindre end den mindste af Størrelserne $\frac{1}{n} \sigma_B (= r)$ og $\frac{1}{n} \cdot \mu \sigma_E$, og det er netop heri, Methodens Fortrin viser sig, at man ogsaa har $\sigma < \frac{1}{n} \sigma_E$ (μ er, som vi skulle se nedenfor, en ægte Brøk).

For at kunne benytte (34) paa den antydede Maade skulde man gerne have bekræftet ved Forsøg, at den virkelig giver Brudbelastningen. Der er desværre ikke udført mange Forsøg med excentrisk paavirkede Søjler, men med de faa, der foreligge*), faar man udmærket Overensstemmelse ved i (34) at sætte $\mu = 0,85 - 0,90$ samt for Svejsjærn: $\sigma_B = 3000 \text{ kg./cm.}^2$, for Staal: $\sigma_B = 3300 \text{ kg./cm.}^2$. For at vise dette anføres følgende observerede og beregnede Værdier af Brudbelastningen pr. Arealenhed (de efter *Tetmajers* Formel beregnede σ ere medtagne for bedre at paavise Overensstemmelsens Tilstrækkelighed):

*) De Forsøg, der her tænkes paa, ere anstillede af *Tetmajer* (*Mittheilungen*, Heft 4, S 174 o. f. i den franske Oversættelse). *Tetmajer* opstiller en meget kompliceret Formel; han gaar ud fra, at den resulterende Fiberpaavirkning kun maa naa op til samme Værdi som $P:F (= \sigma_r)$ for en centralt paavirket Søjle og sætter da:

$$\sigma_s = \sigma \cdot \left(1 + \zeta \frac{f_0 + f}{k}\right), \text{ hvor } f \text{ beregnes efter Formlen } f = f_0 \cdot \frac{1 - \cos \frac{1}{2} al}{\cos \frac{1}{2} al},$$

og hvor ζ er en Konstant, der bestemmes af Forsøgene, men som viser sig

at variere meget stærkt med $\frac{l}{i}$. *Tetmajer* angiver for smedeligt Jærn:

$$\text{for } \frac{l}{i} < 112, \zeta = -0,0028 \frac{l}{i} + 0,877,$$

$$\text{for } \frac{l}{i} > 112: \zeta = 7158 \left(\frac{i}{l}\right)^2 + 5,78 \cdot \frac{i}{l} - 0,078,$$

efter hvilke Formler ζ ved de anstillede Forsøg varierer mellem 0,029 og 0,76. Heraf ses tydeligt nok, at Formlen i sig selv ikke er rigtig, og navnlig, at det er forkert at gaa ud fra σ_r ; ikke at tale om, at Formlen er saa kompliceret, at den er umulig at bruge.

Blødt Staal:

Et Vinkeljærn Nr. 9a, $\frac{l}{i} = 127-301$, $f_0 = 10-20^{m.m.}$,

$$\mu = 0,85, \sigma_B = 3300.$$

σ (observeret):	610,	440,	270,	190,
- [beregnet efter (34)]:	660,	390,	240,	170,
- (- - Tetmajer):	670,	350,	220,	160.

To Vinkeljærn $\neg \neg$, Nr. 9a, $\frac{l}{i} = 43-188$, $f_0 = 34-36^{m.m.}$,

$$\mu = 0,85, \sigma_B = 3300.$$

σ (observeret):	1330,	1040,	690,	510,	380,
- [beregnet efter (34)]:	1300,	1000,	725,	530,	395,
- (- - Tetmajer):	1310,	1050,	750,	530,	400.

Svejsjærn:

Et Vinkeljærn, Nr. 9a, $\frac{l}{i} = 122-291$, $f_0 = 12-14^{m.m.}$,

$$\mu = 0,85, \sigma_B = 3000.$$

σ (observeret):	550,	360,	250,	190,
- [beregnet efter (34)]:	570,	360,	235,	170,
- (- - Tetmajer):	550,	340,	240,	170.

To Vinkeljærn $\neg \neg$, Nr. 9a, $\frac{l}{i} = 43-188$, $f_0 = 36,9^{m.m.}$,

$$\mu = 0,85, \sigma_B = 3000.$$

σ (observeret):	1170,	890,	640,	470,	350,
- [beregnet efter (34)]:	1160,	890,	650,	470,	350,
- (- - Tetmajer):	1170,	890,	640,	440,	340.

Rundjærn, $d = 46-47^{m.m.}$, $\frac{l}{i} = 45-182$, $f_0 = 40-80^{m.m.}$,

$$\mu = 0,9, \sigma_B = 3000.$$

σ (observeret):	380,	210,	340,	200,	300,	190,	280,	160,	220,	150,
- [beregnet efter (34)]:	362,	197,	342,	192,	315,	183,	264,	164,	224,	148,
- (- eft. Tetmajer):	380,	210,	350,	200,	290,	170,	220,	140,	200,	148.

Det kunde herefter se ud, som om Tværsnitsformen havde nogen Indflydelse paa Værdien af μ ($\mu = 0,9$ for Rundjærn. 0,85 for Profiljærnene); en saadan Indflydelse kendes ogsaa ved centralt belastede Søjler.

Af det anførte fremgaar det tilstrækkeligt, at man kan benytte (34) til Bestemmelse af Dimensionerne af excentrisk

paavirkede Søjler. For μ sættes Værdien 0,85, hvorved man i de Tilfælde, hvor $\mu = 0,9$ egentlig passer nok saa godt, finder μ lidt for lille. Den tilladelige Værdi af $\frac{P}{F}$ faas nu af (34) ved at tilføje den samme Sikkerhedskoefficient $\frac{1}{n}$ som for centralt paavirkede Søjler, altsaa:

$$\frac{P}{F} = \frac{1}{n} \cdot \frac{0,85 \sigma_E \cdot \sigma_B}{\sigma_B + 0,85 \sigma_E \left(1 + \frac{f_0}{k}\right)} = \frac{0,85 \sigma_E \cdot r}{\sigma_B + 0,85 \sigma_E \left(1 + \frac{f_0}{k}\right)}$$

idet man i Tælleren har sat $\frac{1}{n} \sigma_B = r =$ den tilladelige Belastning for Materialet til direkte Tryk. Formlen skrives bekvemmere saaledes;

$$\frac{P}{F} = r \cdot \frac{\frac{1}{n} \cdot 0,85 \sigma_E}{r + \frac{1}{n} \cdot 0,85 \sigma_E \left(1 + \frac{f_0}{k}\right)}; \quad (34a)$$

ved dens Benyttelse erindres det, at f_0 er den oprindelige Excentricitet, $k = \frac{i^2}{e} =$ Kærneradius i Kraftliniens Retning,

$\sigma_E = \frac{\pi^2 E \cdot I}{l^2 \cdot F}$; r og n have f. Ex. følgende Værdier:

for blødt Staal	$r = 700-800$ kg./cm. ²	$n = 4-5$	} $\alpha = 0,00018$ $\alpha = 0,0000$ $\alpha = 0,0004$
- Svejsjærn	$r = 600-750$	$n = 4-5$	
- Støbejærn	$r = 750$ <i>600</i>	$n = 8-10$	
- Træ	$r = 45$	$n = 6-8$	

For Støbejærn maa man desuden ved (33) undersøge, om Trækpaavirkningen ikke overskrider det tilladelige (2-300 kg./cm.²). Ved Beregningen af σ_E indføres den samme »frie Længde«, som hvis Søjlen var centralt belastet.

I den angivne Form er (34a) kun bekvem til at undersøge en Søjle med givne Dimensioner, og gælder det at bestemme Dimensionerne, har man da ingen anden Udvej end at prøve sig frem, vælge et Profil og undersøge dets Brugbarhed. Nogen Lettelse kan dog opnaas ved en lignende Omskrivning som den i forrige § for centralt belastede Søjler. Af (34a) findes, idet vi for Kortheds Skyld skrive μ , i Stedet for $\frac{1}{n} \cdot 0,85$:

$$F = \frac{P}{r} \cdot \frac{r + \mu \sigma_E \left(1 + \frac{f_0}{k}\right)}{\mu \sigma_E},$$

og naar heri indføres $\frac{P}{r} = F_0$ og $F = \zeta \cdot i^2$, faas:

$$F = F_0 \left(\frac{r}{\mu_1 \sigma_E} + 1 + \frac{f_0}{k} \right) = F_0 \left(\frac{r \cdot l^2}{\mu_1 \cdot \pi^2 E i^2} + 1 + \frac{f_0 \cdot e}{i^2} \right),$$

$$F = F_0 \left(\frac{\zeta r l^2}{\mu_1 \pi^2 E F} + 1 + \frac{\zeta f_0 e}{F} \right),$$

hvoraf ved Opløsning og Reduktion:

$$F = F_0 \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\zeta}{F_0} \left(f_0 e + \frac{r l^2}{\mu_1 \cdot \pi^2 E} \right)} \right], \quad (35)$$

hvor $\mu_1 \pi^2 = \frac{1}{n} \cdot 8,4$. Her kendes alle Størrelser undtagen e og ζ . Naar blot *Formen* af Tværnittet er bekendt, kan man let danne sig et Begreb om Størrelsen af ζ (se forrige §), og man beregner saa F med en skønnet Værdi af e (= Afstanden fra Tyngdepunktsaxen ud til de yderste Fibre); en enkelt Omregning vil i Almindelighed være tilstrækkelig.

I det foregaaende er det stiltiende forudsat, at Bøjningen vil finde Sted som Følge af Kraftens Excentricitet, og at der ikke er Tilbøjelighed til Bøjning i nogen anden Retning end den, der følger heraf. Dette er dog kun Tilfældet, hvis Kraftens Angrebspunkt ligger paa den Hovedaxe for Tværnittet, om hvilken Inertimomentet er størst (1ste Hovedaxe); Bøjningen foregaar da om Hovedaxen med det mindste Inertimoment (2den Hovedaxe). Hvis Forholdet derimod er omvendt, saa Kraftangrebspunktet ligger paa 2den Hovedaxe, maa man ved Beregningen efter (34a) eller (35) indføre det største Inertimoment, men man maa da desuden undersøge, om Søjlen er stærk nok, naar den regnes centralt paavirket og man indfører det mindste Inertimoment. Ligger endelig Kraftangrebspunktet ikke paa nogen Hovedaxe, maa man opløse Momentet $P \cdot f_0$ efter Hovedaxerne og foretage to Beregninger; vi skulle dog ikke komme nærmere ind herpaa.

Exempel. En Søjle, der skal dannes af to $\square$ -Jærn, nittede sammen i I-Form, har en Længde af 8^m. (plane Endeflader) og skal bære 12^t, virkende med en Excentricitet af 5,0^{cm}; Angrebspunktet ligger paa den Symmetriaxe, der staar vinkelret paa $\square$ -Jærnenes Krop.

Der regnes: $n = 4$, $r = 800$, altsaa er $F_0 = 15^{\text{cm}^2}$. Den frie Længde regnes til $0,7 \cdot l = 5,6^{\text{m}}$, hvorved:

$$\frac{l^3 \cdot r}{\frac{1}{n} \cdot 8,4 \cdot E} = \frac{560^3 \cdot 800}{2,1 \cdot 2150000} = 56.$$

Antages nu $e = 8^{\text{cm}}$. (passer for Profil Nr. 22), bliver $e \cdot f_0 = 40$, og idet $\zeta = \text{ca. } 6$ (se forrige §), faas:

$$F = 15 \cdot \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{6}{15} (40 + 56)} \right] = 15 \cdot 6,72 = 100,8^{\text{cm}^2}.$$

For at faa dette Areal maa vi imidlertid bruge Profil-Nr. 30, for hvilket $e = 10^{\text{cm}}$, $\zeta = 6,42$, og disse Værdier give:

$$F = 15 \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{6,42}{15} (50 + 56)} \right] = 7,26 \cdot 15 = 108,9^{\text{cm}^2}.$$

2 Stkr. $\square$ -Jærn, Pr.-Nr. 30, have et Areal paa $117,6^{\text{cm}^2}$, saa dette Profil er tilstrækkeligt.

Hvis Kraften havde virket centralt, kunde man netop have benyttet Pr.-Nr. 22 (efter Eulers Formel med Sikkerhed 5).

Opg. 37. En hul, cirkulær Støbejernssøjle med plane Endeflader og 5^{m} Højde skal bære 23^{t} , der virker med en Excentricitet paa 10^{cm} ; bestem Dimensionerne.

Opg. 38. En Svejsjærns-Søjle med plane Endeflader og $6,4^{\text{m}}$ Højde skal dannes af to $\square$ -Jærn som i Exemplet ovenfor. Belastningen er 20^{t} , og den virker med en Excentricitet paa 7^{cm} , idet Angrebepunktet ligger paa den med $\square$ -Jærnenes Krop parallelle Symmetriaxe. Bestem Profil-Nummeret.

§ 66. Søjler og Trækstænger, paavirkede til Bøjning af Kræfter vinkelret paa Længderetningen. Hvis man foruden et centralt Tryk eller Træk ogsaa har bøjende Kræfter vinkelret paa Længderetningen, kan man gaa frem ganske som i forrige Paragraf. For at antyde Methodene tage vi en Søjle med et centralt Tryk P og en ensformig fordelt Belastning p pr. Længdeenhed, vinkelret paa Axen; Søjlen er simpelt understøttet i begge Ender. I et vilkaarligt Punkt i Afstanden x fra den ene Ende er Nedbøjningen y , og Momentet her bliver:

$$M = \frac{1}{2} px^2 - \frac{1}{2} plx - Py.$$

Ved Integration af Ligningen $M = EI \frac{d^2 y}{dx^2}$ findes:

$$y = C \sin ax + D \cos ax + \frac{p}{2P} \cdot x^2 - \frac{pl}{2P} \cdot x - \frac{p}{P \cdot a^2},$$

idet $a^2 = \frac{P}{EI}$. C og D bestemmes ved Betingelserne: $x = 0$ og $x = l$ give $y = 0$, hvorefter man beregner største Nedbøjning f , som efter nogen Reduktion bliver:

$$f = -\frac{p}{Pa^2} \cdot \frac{1 - \cos \frac{1}{2} al}{\cos \frac{1}{2} al} - \frac{pl^2}{8P}.$$

Momentet paa Midten er nu (efter Rækkeudvikling af $\cos$):

$$M_{\max.} = \frac{1}{8} pl^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{Pl^2}{8EI}}.$$

$M_{\max.}$ bliver uendelig for $P = \frac{8EI}{l^2} \sim P_E$; den Eulerske Værdi P_E er altsaa ogsaa her den farlige Grænseværdi for Kraften.

Den antydede Beregning gælder imidlertid kun for det specielle betragtede Tilfælde, at P er et Tryk, og at de bøjende Kræfter ere ensformig fordelte: naar P bliver et Træk, faar man exponentielle Funktioner i Stedet for trigonometriske i den neutrale Linies Ligning, og en anden Belastning vinkelret paa Axen bevirker naturligvis ogsaa Forandringer. Vi ville derfor udvikle en Tilnærmelsesformel, der kan bruges i alle Tilfælde.

For simpelt understøttede Bjælker, der kun ere paavirkede til Bøjning, altsaa for $P = 0$, har man altid en Relation mellem største Nedbøjning f og største Bøjningsspænding σ_b af Formen:

$$f = \frac{1}{n} \frac{l^2 \cdot \sigma_b}{E \cdot e}. \quad (36)$$

For ensformig Belastning har man saaledes (sammenlign § 28):

$$\sigma_b = \frac{1}{n} \frac{pl^2 \cdot e}{I}, \quad f = \frac{5}{384} \cdot \frac{pl^4}{EI}, \quad \text{hvorved} \quad f = \frac{5}{48} \frac{\sigma_b \cdot l^2}{Ee};$$

for en Enkeltkraft i Midten findes paa samme Maade

$\frac{1}{n} = \frac{4}{48}$; for en Belastning bestaaende af to lige store Momenter ved Understøtningspunkterne findes $\frac{1}{n} = \frac{6}{48}$. For de to sidstnævnte Bjælker ere Momentkurverne en Trekant og et Rektangel; de betegne derfor Grænsetilfælde, hvorimellem de andre mulige Belastninger maa gruppere sig. Konstanten n i (36) kan derfor antages altid at ligge mellem 8 og 12, naar Paavirkningen er en ren Bøjning.

Vi ville nu anvende den samme Relation mellem f og σ_b i det Tilfælde, hvor der foruden den rene Bøjning optræder en Kraft P paalangs. f og σ_b betegne da største Nedbøjning og største Bøjningsspænding, der frembringes af Kraften P og Kræfterne vinkelret paa Længderetningen tilsammen; den totale største Spænding er

$$\frac{P}{F} \pm \sigma_b = \sigma \pm \sigma_b.$$

Det resulterende største Moment kan skrives:

$$M_{\max.} = M_0 - P \cdot f,$$

hvor M_0 betegner det største Moment, der frembringes af Kræfterne vinkelret paa Længderetningen alene, $P \cdot f$ den Del af Momentet, der hidrører fra P . Kraften P er herved regnet med Fortegn, positiv for Træk, negativ for Tryk; hvis P er positiv, vil den modvirke Bøjningen, hvorfor $P \cdot f$ og M_0 i saa Fald have modsat Tegn. Naar $M_{\max.}$ sættes lig $M_0 - P \cdot f$, er der forudsat, at største Nedbøjning f optræder i det Punkt, hvor Momentet fra Kræfterne vinkelret paa Stangen er størst; dette er i Almindelighed kun Tilfældet, hvis Belastningen er symmetrisk fordelt om Stangens Midtpunkt, men Fejlen er aldrig betydelig. Vi have nu, idet Momentet $M_{\max.}$ frembringer Spændingen σ_b :

$$M_{\max.} = M_0 - P \cdot f = M_0 - \frac{1}{n} P \cdot \frac{l^2 \sigma_b}{Ee} = \frac{\sigma_b}{e} \cdot I,$$

hvoraf findes:

$$\sigma_b = \frac{M_0 \cdot e}{I + \frac{Pl^2}{n \cdot E}}. \quad (37).$$

Denne Formel har ganske samme Udseende som for simpel Bøjning; Inertimomentet er blot forøget med Størrelsen $\frac{Pl^3}{n \cdot E}$.

Ovenfor have vi set, at n sandsynligvis ligger mellem 8 og 12; i det specielle Tilfælde, der betragtedes i Begyndelsen af denne Paragraf, vilde n være lig 8, hvis Rækkeudviklingen for $\cos$ var nøjagtig, i Virkeligheden bliver n lidt større. (37) indbefatter Formlerne for excentrisk Tryk i forrige Paragraf som specielt Tilfælde; sættes i (37):

$$\frac{M_0 \cdot e}{I} = \frac{P \cdot f_0 \cdot e}{F \cdot i^2} = \sigma \frac{f_0}{k},$$

faas netop sidste Led i (33). n er den samme Størrelse, som i forrige Paragraf kaldtes $\mu \cdot \pi^2$, og da vi af Forsøgene med excentrisk Tryk have udledet Værdien $\mu \pi^2 = 8,4$, ville vi ogsaa her sætte $n = 8,4$.

Ligning (37) kan umiddelbart anvendes, naar P er et (centralt) Træk. I saa Fald skal man simpelthen sørge for, at den resulterende største Trækspænding ikke overskrider den tilladelige Værdi r , og man har altsaa til Dimensionsbestemmelsen:

$$r = \frac{P}{F} + \frac{M_0 \cdot e}{I + \frac{Pl^3}{8,4 \cdot E}}. \quad (38)$$

Naar det er en nogenlunde stiv Bjælke, der er Tale om, kan man naturligvis godt nøjes med den sædvanlige Formel (§ 59):

$$r = \frac{P}{F} + \frac{M_0 \cdot e}{I},$$

og man vil altid herved være paa den sikre Side; men der gives adskillige Tilfælde, hvor man nødvendigvis maa regne med (38), saaledes ved lange, spinkle Trækstænger, der paa-virkes til Bøjning af deres Egenvægt, Vindtryk o. l. —. Formlen kan ogsaa bruges, naar Momentet M_0 hidrører fra et excentrisk Træk, $M_0 = P \cdot f_0$, og for dette Tilfælde er den ved direkte Forsøg funden at stemme meget godt med Virkeligheden, baade

ved Maaling af Nedbøjninger (*Préauveau**) og af Spændinger (*Guillot og Rabut***).

Exempel 1. En 6^m lang Trækstang af 1^{cm} tykt fladt Jærn skal optage en Spænding paa 700 kg./cm.², virkende centralt; samtidig kan Stangen blive paavirket til Bøjning af et Vindtryk paa 150 kg./m.²; bestem den derved bevirkede Tilvæxt til Spændingen.

Stangens Bredde er ligegyldig; vi regne den lig 1^{cm}. Vindtrykket er da 1,5 kg. pr. m., $M_0 = \frac{1}{8} \cdot 1,5 \cdot 6^3 \cdot 100 = 675 \text{ kg. cm.}$
 $e = 0,5 \text{ cm.}$, $I = \frac{1}{12} \text{ cm.}^4$, $\frac{Pl^2}{8,4 \cdot E} = \frac{700 \cdot 360000}{8,4 \cdot 2000000} = 15 \text{ cm.}^4$.

Altsaa er Spændingstilvæksten ifølge (37 b):

$$\frac{675 \cdot 0,5}{\frac{1}{12} + 15} = \text{ca. } 22 \text{ kg./cm.}^2,$$

medens man uden Hensyn til Nedbøjningen vilde finde Tilvæksten $\frac{M_0 \cdot e}{I} = 675 \cdot 0,5 \cdot 12 = 4050 \text{ kg./cm.}^2$; herved vilde dog i alle Tilfælde Proportionalitetsgrænsen være overskredet, saa Formlen kunde ikke bruges.

En lignende Virkning som Vindtrykket i dette Exempel vil Egenvægten udøve paa vandret liggende Trækstænger af fladt Jærn (for 1^{cm}. Tykkelse, 1^{cm}. Bredde, er Egenvægten ca. 0,8 kg. pr. m.).

Exempel 2. En Trækstang er dannet af ét Vinkeljærn, 80 . 80 . 10^{mm}, hvortil Kraften overføres ved 2^{cm}. Nitter midt i den ene Flig. Stangens Længde er 2^m, Kraftens Størrelse er 9100 kg. (svarende til 700 kg./cm.² af det nyttige Tværnsnit, hvis Spændingen fordelte sig ensformigt derover). Der spørges om største Fiberpaavirkning.

Kraftens Angrebspunkt antages at ligge 45^{mm} fra Profilets Vinkelspids og midt i Flangetykkelsen, Kraftlinien danner da en Vinkel paa ca. 4° med den ene Hovedaxe, og man skulde egentlig opløse Momentet $P \cdot f_0$ efter Hovedaxerne, foretage to Beregninger og addere Resultaterne. Den ene af Komposanterne bliver dog her saa lille, at vi ville se bort fra den,

*) *Ann. d. ponts et chaussées*, 1894, I, S. 498.

**) *Génie civil*, 1894—95, I, S. 43, og Bemærkninger til Forsøgene af Keelhof og Mesnager (ib. S. 220 og 253).

hvortil der ogsaa er god Grund, da Kraftangrebepunktet jo ikke er ganske bestemt. Excentriciteten bliver da: $f_0 = 2,83^{\text{cm}}$, $M_0 = P \cdot f_0 = 9100 \cdot 2,83 = 25753 \text{ kg. cm.}$, $e = 5,65^{\text{cm}}$, $I = 141^{\text{cm}^4}$, $\frac{P e}{8,4 E} = 21,67^{\text{cm}^4}$; Spændingen bliver:

$$700 + \frac{25753 \cdot 5,65}{141 + 21,67} = 1595 \text{ kg./cm.}^2.$$

Denne store Spændingstilvæxt (895 kg.) vilde omtrent ganske undgaas, hvis man ved et Stykke Vinkeljærn befæstede Stangen ogsaa midt i den anden Flig; Excentriciteten vilde da være forsvindende.

Naar P er et Tryk, kan (37) ikke anvendes slet saa direkte. Den resulterende Paavirkning er, idet vi nu hellere regne P positiv for Tryk:

$$\sigma + \sigma_b = \frac{P}{F} \pm \frac{M_0 \cdot e}{I - \frac{P l^3}{8,4 \cdot E}}; \quad (39).$$

hvis man her blot bestemmer Dimensionerne saaledes, at $\sigma + \sigma_b$ ikke overskrider den tilladelige Trykpaavirkning, udsætter man sig for den samme Fare som ved excentrisk Tryk, at P kun ligger lidt lavere end Grænseværdien P_E , og kan derfor ogsaa her komme til det umulige Resultat, at der ikke behøves saa store Dimensioner for at modstaa den forenede Virkning af P og M_0 , som man ved de sædvanlige Søjleformler finder ved at regne med det centrale Tryk P alene. Da vi nu imidlertid ere komne over Vanskeligheden i det specielle Tilfælde, hvor M_0 hidrører fra et excentrisk Tryk, kunne vi her slippe let derover ved blot at beregne f_0 (en tænkt Excentricitet) af: $M_0 = P \cdot f_0$ og saa simpelthen bruge Methoden i forrige §; (39) og (33) blive, som vi saa ovenfor, identiske, naar der sættes: $M_0 = P \cdot f_0$. Vi kunne altsaa ogsaa her benytte (35) til Dimensionsbestemmelsen, men maa tillige erindre at undersøge, om Trækpaavirkningen ikke bliver for stor, hvis Materialet f. Ex. er Støbejærn.

Opg. 39. Find Spændingstilvæksten fra Bøjningen for en Trækstang, der er dannet af et -Jærn, N. Pr. Nr. 12, hvortil Kraften overføres ved Nitter gennem Kroppen, symmetrisk fordelte om Midtlinien; Trækket i Stangen er 11^{te}.

Opg. 40. En Træstolpe med kvadratisk Tværsnit, plane Endeflader og 8,2^m. Længde skal optage et centralt Tryk paa 15,5^{ton}; bestem Dimensionerne, naar der tages Hensyn til et Vindtryk paa 150 kg./m.², og sammenlign Resultatet med det, man vilde finde uden Hensyn til Vindtrykket.

Opg. 41. En Pakhus-Søjle af Støbejern (hul, cirkulær) med plane Endeflader og 4,5^m. Højde skal bære et Tryk paa 32^{ton}, virkende med en Excentricitet af 8^{cm}. Tillige kan Søjlen paa de nederste 2^m. blive udsat for et vandret Sidetryk paa 500 kg. pr. m. Bestem Dimensionerne.

III. Normale og forskydende Spændinger.

§ 67. Sammensætning af Normalspændinger og Forskydninger i Almindelighed. Der lægges (Fig. 175a, Pl. 19), to paa hinanden vinkelrette Snit OA og OB i et Legeme, der er paavirket af ydre Kræfter. Hvert af disse Snit vil i Almindelighed være paavirket af en skraat rettet Spænding, der kan opløses i en normal og en forskydende Komposant; dog antage vi, at Spændingerne kun virke i en Plan vinkelret paa Skæringslinien mellem Planerne OA og OB , da det som Regel kun er det simple Tilfælde, at alle Kræfter ligge i samme Plan, der har Betydning i Praxis.

Det antages nu, at man for de to Snit kender de skraat rettede Spændinger p og q (pr. Arealenhed) i Punktet O ; man skal finde Spændingen i et vilkaarligt tredje Snit gennem O , hvis Normal danner Vinklen α med OA . Der lægges et Snit AB under Vinklen $\frac{\pi}{2} - \alpha$ med OA , saa der afgrænses et uendelig lille tresidet Prisme; Spændingerne for Snittet AB og det dermed parallelle Snit gennem O afvige da kun uendelig lidt fra hinanden, saa man kan besvare Spørgsmaalet ved at finde Spændingen for AB ; og dette udføres meget simpelt derved, at Kræfterne paa det lille Prisme skulle holde hinanden i Ligevægt. Kraften, der virker paa Snittet OA , er lig q Gange Snittets Areal; idet Prismets Højde vinkelret paa Papirets Plan ogsaa er uendelig lille, bliver denne Krafts Størrelse — og ligeledes Størrelsen af Kræfterne paa de to andre Snit — uendelig lille af 2den Orden; de Massekræfter (Tyngde o. l.), der muligvis virke paa Prismet, ere derimod uendelig smaa af 3die Orden, altsaa forsvindende.

Da det aabenbart kun kommer an paa Forholdet mellem

Snittenes Arealer, kunne vi sætte $AB = 1$ og ligeledes Prismets Højde lig 1; Arealet OA er da lig $\sin \alpha$, Arealet OB lig $\cos \alpha$, og Kræfterne, der virke paa disse Snit: $p \cos \alpha$ og $q \sin \alpha$. Kraften paa AB er lig den søgte Spænding. Da der skal være Ligevægt, maa den søgte Spænding være lig og modsat Resultanten af $p \cos \alpha$ og $q \sin \alpha$ og findes altsaa ved (Fig. 175, b) ud fra et Punkt C at afsætte $p \cos \alpha$ og $q \sin \alpha$ i Størrelse og Retning og sammensætte dem. Betragter man (Fig. 175, b) Retningslinierne $p \cos \alpha$ og $q \sin \alpha$ som Koordinataxer, blive Koordinaterne til Resultantens Endepunkt:

$$y' = q \sin \alpha, \quad x' = p \cos \alpha,$$

og hvis nu α varierer, medens de to oprindelige Snit OA og OB ligge fast, finder man ved Relationen: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, at Punktet (x', y') ligger paa Ellipsen:

$$\frac{x'^2}{p^2} + \frac{y'^2}{q^2} = 1.$$

Altsaa: naar et Snit drejer sig om et Punkt, og man afsætter den til hver Stilling svarende Spænding i Størrelse og Retning ud fra Punktet, ville alle Endepunkterne ligge paa en Ellipse, Spændingsellipsen. For at man skal kunne benytte denne Fremstilling til virkelig at bestemme Spændingen i et vilkaarligt Snit, maa man tillige have en Relation mellem Snittets og den tilsvarende Spændings Retning, og det kan vises, at Snit- og Spændingsretning svare til hinanden som konjugerede Diametre i et andet Keglesnit; ved dette samt Spændingsellipsen er Spændingens Variation i Punktet fuldstændig bestemt. Vi skulle dog ikke gaa videre ad denne Vej, da der gives andre, som ere simplere og navnlig føre til simplere grafiske Konstruktioner.

Vi vende tilbage til det elementære Prisme OAB og tænke os nu de givne Spændinger i OA og OB opløste i deres normale og forskydende Komposanter, σ_x , σ_y og τ_{xy} (Fig. 176, Pl. 19). Forskydningsspændingerne i de to Snit ere, som bekendt (§ 19), lige store og begge rettede mod O eller begge bort fra O . Vi sætte igen $AB = 1$ og faa da de paa Figuren skrevne Størrelser af Kræfterne paa de tre Sideflader. Ved Projektion paa Retningslinierne for σ_y og $\tau_{x'y'}$ findes:

$$\begin{aligned}\sigma_{y'} &= (\sigma_x \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha) \sin \alpha + (\sigma_y \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha) \cos \alpha \\ &= \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{x'y'} &= (\sigma_x \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha) \cos \alpha - (\sigma_y \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha) \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha.\end{aligned}$$

For Normalspændingen i et paa AB vinkelret Snit findes ved at sætte $\frac{\pi}{2} + \alpha$ i Stedet for α :

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha.$$

Hvis man i disse Ligninger indfører:

$$\sigma_x = I_x, \quad \sigma_y = I_y, \quad \tau_{xy} = Z_{xy},$$

$$\sigma_{x'} = I_{x'}, \quad \sigma_{y'} = I_{y'}, \quad \tau_{x'y'} = Z_{x'y'},$$

faar man netop Ligningerne (1) i § 12, der udtrykke Sammenhængen mellem Inertimomenter og Centrifugalmoment om Axer gennem samme Punkt. Man finder derfor Spændingerne $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ og $\tau_{x'y'}$ af de givne σ_x , σ_y og τ_{xy} , ganske som man af Inertimomenter og Centrifugalmoment om et Par retvinklede Axer udleder de tilsvarende Størrelser for et Par nye Axer. Der er dog én Forskel, naar man sammenligner Momenter af 2den Orden og Spændinger: Inertimomenter ere altid positive, Normalspændinger kunne derimod være positive eller negative (vi regne Trækspændinger positive); Forskydningsspændingerne kunne ligesom Centrifugalmomenter være positive eller negative.

Hvis vi altsaa kende Spændingerne i to paa hinanden vinkelrette Snit, kunne vi finde dem i hvilket som helst andre Snit gennem samme Punkt ved den samme Hjælpecirkel, som anvendtes i § 12 (*Land's Konstruktion**). I Fig. 177, Pl. 20, afsættes ud ad Y -Aksen: $OR = \sigma_x$, $RY = \sigma_y$, $RT = \tau_{xy}$, og der tegnes en Cirkel over OY som Diameter. For de nye, paa hinanden vinkelrette Snit OX' og OY' har man da Spændingernes Størrelser:

$$\sigma_{x'} = X'R', \quad \sigma_{y'} = R'Y', \quad \tau_{x'y'} = R'T,$$

*) Anvendelsen af Konstruktionen paa dette Omraade er angivet af *Land* i *Zeitschr. d. Vereins deutscher Ing.* 1895, S. 1551; Udledelsen er dog en anden end her.

idet TR' er nedfældet vinkelret paa Diameteren $X'Y'$. Resultanten af den normale og den forskydende Spænding paa Snittet OX' har Størrelsen TX' , og ligeledes angiver TY' Størrelsen af den skraat rettede Spænding paa Snittet OY' ; til Bestemmelsen af Retningen af disse Spændinger i Forhold til Snittene skulle vi komme tilbage nedenfor, og med det samme skulle vi faa et Kendetegn paa, om Punktet T skal afsættes ud til den ene eller den anden Side af OY .

Idet Forskydningsspændingen altsaa maales som den vinkelrette Afstand fra T til den bevægelige Diameter $X'Y'$, bliver den aabenbart Nul, naar $X'Y'$ falder i MT ; de tilsvarende Snit $O1$ og $O2$ ere kun paavirkede af Normalspændinger, og disses Størrelser ere givne ved $T1$ og $T2$. $T1$ ses at være den absolut største, $T2$ den mindste Værdi, Spændingen i noget Snit kan antage; $O1$ og $O2$ kaldes *Hovedsnittene*, $T1$ og $T2$ *Hovedspændingerne*. Forskydningsspændingen antager sin største Værdi ($= MT$), naar $X'Y'$ er vinkelret paa MT ; de tilsvarende Snitretninger halvere Vinklerne mellem *Hovedsnittene*. Der findes i Fig. 177 intet Snit, hvor Normalspændingen bliver Nul; Summen af Normalspændingerne i to paa hinanden vinkelrette Snit er konstant.

Analogien mellem Momenter af 2den Orden og Spændinger gaar imidlertid endnu videre. I Fig. 178, Pl. 19, er Resultanten OC af Spændingerne σ_y og τ_{xy} paa Snittet OB opløst efter den vilkaarlige Retning OD og efter Snittet, altsaa i Komposanterne OD og DC . Idet OD danner Vinklen ω med OB , haves:

$$DC = \tau_{xy} - \cot \omega \cdot \sigma_y,$$

og dette Udtryk er ganske analogt med det for Centrifugalmomentet om de skævvinklede Axer OD og OB [sammenlign § 12, Ligning (3)], paa en konstant Faktor $\operatorname{cosec} \omega$ nær. Nu er det imidlertid bekendt, at Centrifugalmomentet om et Par vilkaarlige, skævvinklede Axer let bestemmes ved *Lands Konstruktion*, og navnlig erindres det, at man finder saadanne Axer, om hvilke dette Centrifugalmoment er Nul, ved at forbinde Punktet O med Endepunkterne af Korder gennem T (Fig. 177, Pl. 20, eller Fig. 36, Pl. 5). Naar CD (Fig. 178) bliver Nul, falder OD ud ad Spændingen OC 's Retning, og man maa derfor kunne bestemme den til et vilkaarligt Snit

OX' svarende Spændingsretning OL (Fig. 177) ved at trække Korden $X'TL$. Omvendt svarer naturligvis til Snitretningen OL Spændingsretningen OX' . Herved kan det ogsaa let afgøres, om Punktet T i Fig. 177 skal afsættes til den ene eller den anden Side af OY . Ved den angivne Konstruktion finder man nemlig, at Spændingens Retning for Snittet OX er OT (Korden $X'TL$ og Linien OL falde her sammen i OT). Linien OT angiver, som ovenfor vist, ogsaa Størrelsen af Spændingen paa OX , saa vi for dette Snit faa baade Størrelse og Retning angivne ved samme Linie. Da man kender baade σ_x og τ_{xy} , ser man altsaa let, om τ skal ligge til højre eller til venstre for OY ; i Fig. 177 er T 's Beliggenhed saaledes, at det passer med Forholdene i Fig. 176.

I Fig. 177 ligger T indenfor Cirklen, og alle Normal-spændinger have da samme Fortegn. Hvis T derimod falder udenfor Cirklen som i Fig. 179, Pl. 20, hvor de givne σ_x , σ_y og τ_{xy} ere afsatte ganske som ovenfor, men hvor σ_x og σ_y have modsat Fortegn, kan Fortegnet for Normalspændingen skifte med Snitretningen. I OX' og OY' have Normalspændingerne modsat Fortegn, i OX'' og OY'' have de derimod faaet samme Tegn. Overgangen sker i de to Snit OD ; medens det variable Punkt X gennemløber Buen DYD , har Normalspændingen i OX samme Fortegn som det givne σ_y . For Snittene OD er Normalspændingen Nul; Spændingen er altsaa alene en Forskydning og maa derfor falde i Snittets Retning. Dette stemmer ogsaa med den ovenfor angivne Konstruktion af sammenhørende Snit- og Spændingsretninger (OD ere Dobbeltstraaler i det involutoriske Liniebundt, der dannes af de nævnte Retninger). Hovedsnittene $O1$ og $O2$ bestemmes som ovenfor; de halvere Vinklerne mellem Straalerne OD .

Da sammenhørende Snit- og Spændingsretninger bestemmes ved Korder gennem T , vil der i Almindelighed kun findes ét Par saadanne Retninger, der staa vinkelrette paa hinanden (Hovedsnittene); der kan kun findes flere Par, naar T falder i Cirkelns Centrum M , og i saa Fald blive alle de nævnte sammenhørende Straaler vinkelrette paa hinanden; alle Snit blive kun paavirkede af Normalspændinger, og alle disse blive lige store, lig Cirkelns Radius (Hydrostatik).

Den angivne Konstruktion kan ogsaa anvendes til at finde Spændingerne i en ideal Jordmasse, bestaaende af uendelig

smaa ensartede Partikler, mellem hvilke der virker Spændinger paa samme Maade som i et fast Legeme — dog kun Tryk — og tillige Friktion. Da der ikke kan optræde Trækspændinger, er det Fig. 177, vi skulle bruge. Hvis Ligevægten i en saadan Jordmasse forstyrres, vil det ske derved, at der finder en Glidning Sted langs et eller andet Snit; *Glideretningerne* i det betragtede Punkt maa naturligvis være dem, for hvilke Vinklen mellem Spænding og Snit er mindst, og de bestemmes ved en Korde gennem T vinkelret paa Diameteren MT . Glideretningerne ligge symmetrisk om Hovedsnittene.

I det følgende faa vi Brug for et Udtryk for Størrelsen af Hovedspændingerne $\sigma_1 = T_1$ og $\sigma_2 = T_2$. Man finder let af Fig. 177 og 179:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = OM \pm MT = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} V(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2. \quad (40)$$

Største Forskydningsspænding er lig MT , altsaa:

$$\tau_{\max.} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2). \quad (41)$$

Hovedsnittenes Retninger findes lettest af den oprindelige Ligning for $\tau_{x'y'}$; $\tau_{x'y'} = 0$ giver nemlig:

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}. \quad (42)$$

Vi have nu fundet Spændingerne i alle Snit gennem det betragtede Punkt. Vil man benytte den derved erhvervede Viden til at undersøge, i hvilket Snit Materialet bliver stærkest anstrengt, saa erindres det, at vi tidligere ere komne til det Resultat, at den største Anstrengelse maa findes dér, hvor den største Forlængelse eller Forkortelse optræder. Dette maa aabenbart være Tilfældet i et af Hovedsnittene, og vi kunne derfor nøjes med at undersøge Formforandringerne i Hovedsnittenes Retninger.

Vi tænke os et uendelig lille kvadratisk Prisme med Sidefladerne i Hovedsnittenes Retninger skaaret ud omkring det betragtede Punkt. Dette Prisme er i Sidefladerne kun paa-virket af Normalspændingerne σ_1 og σ_2 , og vi have altsaa det

i § 17 betragtede Tilfælde. Forlængelserne pr. Længdeenhed i de to Retninger blive:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\sigma_2}{m \cdot E}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\sigma_1}{m \cdot E},$$

hvor m har Værdien 3—4. Antages σ_1 at være den numerisk største af de to Hovedspændinger, bliver $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, saa Anstrengelsen bestemmes ved ε_1 . Da det nu, som i § 17 omtalt, er bekvemmere at regne med Spændinger end med Forlængelser, bestemme vi en *ideel Spænding* σ_i , der vilde være i Stand til at frembringe Forlængelsen ε_1 , hvis den virkede alene, hvorved vi faa $\sigma_i = E \cdot \varepsilon_1$, altsaa:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sigma_1 - \frac{1}{m} \sigma_2 \\ &= \frac{m-1}{2m} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{m-1}{2m} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \end{aligned} \quad (43).$$

Ved Dimensionsbestemmelser maa man sørge for, at σ_i ikke bliver større end den tilladelige Fiberpaavirkning. Med $m = 4$ faar man:

$$\sigma_i = \sigma_1 - \frac{1}{4} \sigma_2 = \frac{3}{8} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{5}{8} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad (43 a).$$

hvilken Værdi vi ville benytte i det følgende.

Naar der slet ingen Normalspændinger virker ($\sigma_x = \sigma_y = 0$), giver (43): $\sigma_i = \frac{m+1}{m} \cdot \tau_{xy}$; hvis man heri erstatter σ_i og τ_{xy} med de tilladelige Paavirkninger r og f , faar man den bekendte Relation: $f = \frac{m}{m+1} \cdot r$ (§ 20), som dog kun er rigtig for et homogent Materiale, der følger Hooke's Lov. Naar disse Forudsætninger ikke ere opfyldte, kan man muligvis ved Forsøg bestemme Forholdet mellem de tilladelige Paavirkninger r og f , og hvis man da ikke just kommer til Forholdet $r = \frac{m+1}{m} \cdot f$, kan man sætte $r = \alpha \cdot \frac{m+1}{m} \cdot f$, hvor α altsaa er en Erfaringskoefficient, og man maa da ogsaa indføre denne i (43), hvilket ifølge Bach*) kan gøres saaledes:

**) *Elasticität und Festigkeit*, 2te Aufl., S. 271.

$$\sigma_t = \frac{m-1}{2m} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{m+1}{2m} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4(\alpha\tau_{xy})^2}.$$

I det følgende ville vi som Regel ikke medtage α i Formlerne (sætte $\alpha = 1$), men i specielle Tilfælde kan man blive nødt dertil.

Inden vi gaa over til de mere komplicerede Tilfælde, — det er særligt for dem, at ovenstaaende Udvikling faar praktisk Betydning, — skulle vi kort undersøge et Par simplere.

1. *Paavirkning af en prismatisk Stang til Træk eller Tryk alene i Længderetningen.* Stangens Normalsnit er da alene paavirket af en Normalspænding, det er altsaa det ene Hovedsnit; det andet Hovedsnit er følgelig parallelt med Prismets Kanter, og her er baade Normal- og Forskydningsspænding Nul. Den grafiske Konstruktion faar da det i Fig. 180, Pl. 20, viste Udseende; Cirkelns Diameter er $OY = \sigma_1$, og Punktet T falder i Y . Spændingerne i de forskellige Snit gennem O kunne nu konstrueres som sædvanligt; største Forskydningsspænding er ligesom ovenfor lig MT , og det vil her sige lig $\frac{1}{2} \sigma_1$. Denne Forskydningsspænding optræder i to Snit, der danne 45° med Hovedaxerne. Det hele stemmer med, hvad der er udviklet i § 20.

2. *Et retvinklet Parallelopipedum, der i sine fire Sideflader kun er paavirket af Forskydningsspændinger (ren Forskydning).* I Fig. 177 fandtes der intet Snit, hvor Normalspændingen blev Nul, saaledes som det her forlanges i Parallelopipedets Sideflader; i Fig. 179 havde derimod de to Snit OD denne Egenskab, men de staa ikke vinkelret paa hinanden. For at dette sidste skal blive muligt, maa Korden DD være en Diameter, og dette medfører enten, at T skal ligge uendelig fjernt, medens Cirklen beholder en endelig Størrelse, — men dertil fordres uendelig store Forskydningsspændinger, saa dette Tilfælde har ingen Betydning, — eller at T bliver liggende, medens Cirklen svinder ind til et Punkt (O), og det Tilfælde indtræder, naar $\sigma_x = -\sigma_y$. Ved i Fig. 179 at tænke sig Cirklen svindende ind til et Punkt vil man se, at de Snit OD , i hvilke der kun optræder Forskydningsspændinger, falde sammen med de Snit, — bestemte ved en Diameter vinkelret paa MT , — i hvilke Forskydningsspændingen bliver Maximum, og disse Snit halvere

som sædvanligt Vinklen mellem Hovedsnittene. Da $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2$, haves her: $\sigma_1 = -\sigma_2$, og ifølge (41) altsaa:

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{\max},$$

hvilket ogsaa indses direkte ved at lade Cirklen svinde ind. Den ideelle Spænding bliver:

$$\sigma_t = \sigma_1 - \frac{1}{m} \sigma_2 = \frac{m+1}{m} \cdot \tau_{\max},$$

og hvis den ideelle Spænding ikke maa overskride den tilladelige Værdi r , findes den højeste tilladelige Værdi f af Forskydnings-spændingen at være

$$\tau_{\max} = f = \frac{m}{m+1} \cdot r,$$

stemmende med Resultatet i § 20.

3. I de Anvendelser, vi i det følgende skulle betragte nærmere, vil som Regel den ene af Normalspændingerne σ_x eller σ_y være Nul. I saa Fald ligger T altid udenfor Cirklen, og der vil derfor altid være Træk i nogle Snit, Tryk i andre, og navnlig ville Hovedspændingerne altid have modsat Fortegn; den ideelle Spænding bliver altsaa numerisk lig $\sigma_1 + \frac{1}{m} \sigma_2$. Sætte vi i Formlerne (40), (42) og (43) $\sigma_y = 0$, findes:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \sigma_x \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \sigma_x\right)^2 + \tau_x^2}, \quad (44).$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -2 \cdot \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x}, \quad (45).$$

$$\sigma_t = \sigma_1 - \frac{1}{m} \sigma_2 = \frac{m-1}{2m} \cdot \sigma_x + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (46).$$

Af (44) udledes den i Fig. 181, Pl. 20, angivne simple Konstruktion af Hovedspændingernes Størrelse.

§ 68. Bøjning og Forskydning. Som bekendt er Bøjningen næsten altid ledsaget af en Forskydning. I § 38 have vi fundet Forskydningsspændingens Størrelse i de forskellige Punkter af Tværsnittet, og vi saa der, at den var Nul i de yderste Fibre, saa det var for saa vidt rigtigt, at man ved

Dimensionsbestemmelsen kunde lade Normalspændingen naa den tilladelige Grænse uden at tage noget som helst Hensyn til Forskydningen. En nødvendig Forudsætning var det saa dog, at Normalspænding og Forskydning tilsammen ikke frembragte en større Paavirkning i noget andet Punkt af Tværnittet. Dette Spørgsmaal skal nu undersøges lidt nærmere, og samtidig skal det vises, hvorledes man finder den resulterende Paavirkning i hvert Punkt.

For at kunne anvende Resultaterne fra forrige Paragraf maa man kende Spændingerne i to paa hinanden vinkelrette Snit gennem det betragtede Punkt, og saadanne Snit ere lette at angive her. I Bjælkens Tværnsnit ere Normalspændingerne givne ved Formlen:

$$\sigma_x = \frac{M}{I} \cdot y,$$

Forskydningsspændingerne ved (§ 38):

$$\tau_{xy} = \frac{S_y \cdot Q}{I \cdot z};$$

i et Snit parallelt med den neutrale Flade have Forskydnings-spændingerne samme Størrelse, medens Normalspændingerne som Regel ere Nul. Man kan nu beregne Hovedspændingerne og den ideelle Spænding ved (44) og (46) for alle Tværnittets Punkter, men i de fleste Tilfælde bliver en Beregning temmelig besværlig. Vi ville derfor først vise, hvorledes man ved grafisk Konstruktion kan naa Maalet for et vilkaarligt Tværnsnit.

I Fig. 182, Pl. 20, er der konstrueret Hovedspændinger og ideelle Spændinger for et Tværnsnit i en Jærnbaneskinne, der er paavirket af et bøjende Moment $M = 1,05^{tm}$. og en Transversalkraft $Q = 7,0^{ts}$. I Fig. 108, Pl. 11, ere Forskydningsspændingerne i Tværnittets forskellige Punkter konstruerede netop for den samme Skinne og samme Transversalkraft; τ -Kurven er derfor direkte overført fra Fig. 108, og der er intet nyt at tilføje angaaende den her. Normalspændingerne ere fremstillede som Ordinatorer til en ret Linie, σ_x -Kurven, der er bestemt derved, at $\sigma_x = 0$ i Tyngdepunktet, og $\sigma_x = \frac{105000}{990} \cdot 6,5 = 690 \text{ kg./cm.}^2$ i de øverste Fibre, idet man nemlig har $I = 990 \text{ cm.}^4$ (fundet i Fig. 26, Pl. 4) og $e = 6,5^{cm}$.

I Fig. 182 er $\sigma_x = 690 \text{ kg./cm.}^2$ afsat paa Figurens øverste vandrette Linie efter samme Maalestok for Spændinger som den, hvorefter τ -Kurven er funden; Maalestokken findes tegnet nederst i Figuren. For lettere at kunne benytte Konstruktionen i Fig. 181, Pl. 20, er der tegnet en Linie, hvis Ordinater ere $\frac{1}{2} \sigma_x$, hvorefter σ_1 og σ_2 ere fundne for alle Skillelinierne mellem de Strimler, hvori Profilet er delt; Konstruktionen er kun vist for Punkt 6: Ordinaten til τ -Kurven er svinget op om a til Stillingen ac , hvorefter en Cirkel gennem c med Centrum b paa Linien 6 afskærer σ_1 og σ_2 . I Virkeligheden tegner man naturligvis ikke Cirklerne og Linien bc , men mærker blot Punkterne med Passerspidsen. Endelig er der tegnet Kurverne, der angive de ideelle Spændinger, som numerisk blive $\sigma_1 + \frac{1}{4} \sigma_2$ eller $\sigma_2 + \frac{1}{4} \sigma_1$.

Man ser i Fig. 182, at den ideelle Spænding i Punkterne 6 og 10 naa et Maximum, der er større end største Normal-spænding. For I-formede og lignende Profiler vil σ_i -Kurven altid have saadanne Maximumpunkter ved Overgangen fra Hoved til Krop og fra Fod til Krop, idet Forskydningsspændingerne her voxe meget pludseligt, men det vil kun sjældent indtræffe, at Maximumsordinaten er større end $\sigma_i (= \sigma_x)$ for de yderste Fibre. For at dette skal blive Tilfældet, maa nemlig Forskydningsspændingerne være meget store, større end de sædvanligvis ere, og man ser ogsaa let, at Forholdene i Fig. 182 ere noget unormale. Hvis vi tænke os Skinnen simpelt understøttet i to Endepunkter og paavirket af et Hjultryk i Midten, maa Hjultrykket være $14^{\text{tm.}}$, for at Transversalkraften skal kunne naa Størrelsen $7^{\text{tm.}}$, og naar største Moment, hvorefter Dimensionerne jo bestemmes, samtidig ikke skal være mere end $1,05^{\text{tm.m.}}$, maa Længden mellem Understøtningerne kun være $30^{\text{cm.}}$ ($\frac{1}{4} \cdot 14 \cdot 0,3 = 1,05$). I Virkeligheden er nu Hjultrykket kun ca. $7^{\text{tm.}}$ og Længden mellem Understøtningerne vel mindst ca. $90^{\text{cm.}}$, hvorved σ_x -Kurvens Ordinater vilde blive 3 Gange saa store som τ -Kurvens, og i saa Fald vilde Ordinaterne til Maximumpunkterne i σ_i -Kurven blive betydelig mindre end $\max. \sigma_x$ (i de yderste Fibre). — For Bjælker, der ere indspændte i den ene Ende, fri i den anden, vil det ganske vist lettere kunne hænde, at Forskydningsspændingerne blive forholdsvis store, men selv her fordres der en meget kort Bjælke og meget stor Belastning, for at den sædvanlige Di-

mensioneringsmethode skal blive urigtig. *I alle almindeligt forekommende Tilfælde kan man derfor godt bestemme Dimensionerne efter de største Normalspændinger alene, uden Hensyn til Forskydningsspændingerne.* Et Par Undtagelser nævnes nedenfor. Denne Regel kan naturligvis lettest føre til fejlagtige Resultater ved I-formede og lignende Tværnit med meget tynd Krop, hvor Forskydningsspændingen bliver stor. Vil man i et forefaldende Tilfælde undersøge Sagen lidt nærmere, hvad dog meget sjældent vil være Umagen værd, behøver man ikke at gennemføre hele Konstruktionen i Fig. 182, men kan nøjes med at finde den ideelle Spænding i de Punkter, hvor Tværnittets Bredde pludseligt antager en anden Størrelse, altsaa ved Overgangen fra Flange til Krop, og man anvender i saa Fald simplest en Beregning ved Hjælp af (44) og (46).

I enkelte Tilfælde kan man dog ikke følge den angivne Regel, f. Ex. ikke ved Bjælker, hvis Tværnit varierer saaledes, at største Fiberpaavirkning er konstant (§ 37). Hvis man her kun tager Hensyn til Normalspændingerne, faar man, at Tværnittet skal svinde ind til Nul i de Punkter, hvor Momentet er Nul, altsaa f. Ex. i Understøtningspunkterne for simpelt understøttede Bjælker o. l.; men i saadanne Punkter er Transversalkraften ikke Nul, og man vil forstaa, at det i selve disse Punkter bliver Forskydningsspændingen alene, der skal bestemme Dimensionerne, og paa et Stykke i Nærheden bliver det den ideelle Spænding, først længere borte Normalspændingen alene.

Af ovenstaaende almindelige Undersøgelse vil det være klart, at det kun er ved meget smaa Bjælkelængder, man kan begaa nogen væsentlig Fejl ved at regne med Bøjningen alene uden Hensyn til Forskydningen. Meget smaa Bjælkelængder forekomme imidlertid kun i specielle Tilfælde, og der vil da altid kun være Tale om simple Tværsnitsformer som et Rektangel eller en Cirkel (f. Ex. ved Kile- eller Bolteforbindelser). Vi ville se lidt nærmere paa disse to Tværnit, idet vi tænke os dem anvendte for Bjælker, der ere indspændte i den ene Ende og i den anden, frie Ende paavirkede af en Enkeltkraft P .

Rektangel med Sider b og h , Bjælkelængde l . Største Moment er $P \cdot l$, Transversalkraften er P ; altsaa haves:

$$\sigma_z = \frac{P \cdot l}{\frac{1}{3}bh^3} \cdot y,$$

og ifølge § 38 (S. 169):

$$\tau_{xy} = \frac{3P}{2bh} \left[1 - \left(\frac{y}{\frac{1}{2}h} \right)^2 \right].$$

Ved Indsættelse heraf i (46) faas en Formel, hvoraf man for et givet $h:l$ kan beregne den ideelle Spænding i en Række Tværsnitspunkter i forskellig Afstand y fra den neutrale Axe.

Fra den almindelige Undersøgelse ovenfor vides det, at man, naar $l:h$ er stor, skal bestemme Dimensionerne ved at tage Hensyn til Bøjningen alene, altsaa ved

$$\max. \sigma_x = \frac{Pl}{\frac{1}{8}bh^2} = r,$$

idet r er den tilladelige Fiberpaavirkning til Træk eller Tryk. For meget smaa Værdier af $l:h$ skal man derimod regne med Forskydningen alene, altsaa sætte:

$$\max. \tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{P}{bh} = f,$$

hvor f er den tilladelige Paavirkning til Forskydning. Af disse to Udtryk faar man med $f = \frac{1}{3}r$:

$$bhr = \frac{6Pl}{h} \text{ og } bhr = \frac{1}{8}P,$$

og for at man skal faa samme Dimensioner i de to Tilfælde, maa man have:

$$\frac{l}{h} = \frac{6}{16} = 0,31.$$

For denne specielle Værdi af $l:h$ har man nu ganske vist en ideel Spænding r baade i de yderste Fibre og inde i den neutrale Axe, men for mellemliggende Punkter faar man dels mindre, dels større Værdier af σ_i , og Dimensionerne burde egentlig bestemmes efter det største σ_i . Hvis man imidlertid for $l:h = 0,31$ beregner σ_i i nogle Punkter i forskellig Afstand fra den neutrale Axe, finder man, at det største σ_i kun er 4—5 % større end r^*). Man kan derfor i Praxis nøjagtigt nok for $l:h > 0,31$ regne med Bøjningen alene, for $l:h < 0,31$ med Forskydningen alene. Dette Resultat gælder naturligvis

*) Bach: *Elasticität und Festigkeit*, 2te Aufl., S. 292.

kun for den forudsatte Belastnings- og Understøtningsmaade, men man kan deraf slutte sig til lignende Regler for andre Tilfælde; en Bjælke med to simple Understøtninger og paa-
virket af en Enkeltkraft i Midten forholder sig saaledes ganske, som om den var indspændt i Midten, fri ved Enderne og her paa-
virket af Reaktionen.

Cirkel med Diameter d , Bjælkelængde l . Største Moment og Transversalkraft ere de samme som ovenfor; altsaa have

$$\sigma_x = \frac{Pl}{64\pi d^3} \cdot y, \quad \tau_{xy} = \frac{1}{3} \frac{P}{\pi d^2} \cdot \frac{(\frac{1}{2}d)^2 - y^2}{(\frac{1}{2}d)^2},$$

eller hvis man her, hvor Periferien er en kontinuerlig krummet Kurve, tager Forskydningsspændingen ude ved Overfladen (Ligning (37) i § 38):

$$\tau_{xy} = \frac{1}{3} \cdot \frac{P}{\pi d^2} \cdot \frac{(\frac{1}{2}d)^2 - y^2}{(\frac{1}{2}d)^2} \sec \vartheta = \frac{1}{3} \frac{P}{\pi d^2} \cdot \cos \vartheta;$$

eller Indsættelse heraf i 46 kunne de ideelle Spændinger beregnes.

Naar man regner med Bøjningen alene, bestemmes Diameteren af:

$$\max. \sigma_x = \frac{Pl}{\frac{1}{32}\pi d^3} = r;$$

tages alene Hensyn til Forskydningen, faas

$$\max. \tau_{xy} = \frac{1}{3} \frac{P}{\pi d^2} = f.$$

For at man skal faa de samme Dimensioner i begge Tilfælde, maa man med $f = \frac{1}{3}r$ have

$$\frac{1}{3} = \frac{r}{f} = 0.21.$$

Med denne Værdi af $f : r$ finder man ganske vist den ideelle Spænding og et tilsvarende moment midt mellem de yderste Spænding og den yderste Kraft, d. h. større end r^2 , men denne bliver dog ikke større, end at man nøjagtigt nok for $l : d > 0.21$ kan regne med Bøjningen alene, for $l : d < 0.21$ med Forskydningen alene.

Ved Konstruktionen af Hovedspændingerne i forrige Paragraph fandt vi tillige de Retninger, hvori de virke. Har man nu fundet disse Retninger i ét Punkt og derpaa, følgende en af dem, f. Ex. σ_1 , gaar til det konsekutive Punkt og atter her bestemmer Retningen af σ_1 , dernæst gaar videre i den nye Retning osv., saa vil man efterhaanden beskrive en Kurve, hvis Tangenter angive Retningen af σ_1 . Paa den Maade kan man konstruere to Systemer af Kurver, — *Spændingstrajektorier*, — hvis Tangenter angive Retningerne af største og mindste Tryk; de skære hinanden orthogonalt. Paa samme Maade kunde man bestemme to Systemer af Kurver, hvis Tangenter angive Retningerne af de Snit, hvor Forskydningen naar sit Maximum; disse skære de foregaaende under 45° . Konstruktionen kan udføres ved i en Række Tværsnit at konstruere Retningerne i nogle forskellige Punkter, hvorefter Kurverne kunne tegnes ind efter Øjemaal.

Vil man danne sig et Begreb om Kurvernes almindelige Forløb, kan man benytte Ligning (45), som angiver Hovedsnittenes Retninger i Forhold til x -Axen. For en Bjælke, der er paavirket til Bøjning og Forskydning, have vi sat $\sigma_y = 0$; x -Axen falder da i Tværsnittets Projektion, naar man ser Bjælken fra Siden, y -Axen i Bjælkens Længderetning. For Punkter, hvor $\sigma_x = 0$, altsaa i den neutrale Flade og i alle Punkter af de Tværsnit, hvor Momentet er Nul, haves Hovedsnittenes Retninger bestemte ved:

$$\left. \begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 45^\circ \\ 135^\circ \end{matrix} \right.$$

for $\tau_{xy} = 0$, altsaa i de yderste Fibre og i alle Punkter af de Tværsnit, hvor Transversalkraften er Nul, findes:

$$\left. \begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 90^\circ \end{matrix} \right.$$

For en i den ene Ende indspændt Bjælke med ensformig Belastning faa Spændingstrajektorierne for Hovedsnittene et Udseende som vist i Fig. 183, Pl. 20. For I-formede Bjælker optager Kroppen som bekendt kun en ringe Del af Normalspændingerne; Spændingstrajektorierne for en saadan Bjælke nærme sig derfor til rette Linier, der løbe tværs over hele Kroppen under 45° med Længderetningen. I Hoved og Fod

ere derimod Forskydningsspændingerne meget smaa, hvorfor de nævnte rette Linier ved Overgangen fra Krop til Flange faa et skarpt Knæk, saa de foroven og forneden træffe Bjælkens Kontur under rette Vinkler. Den Figur, man faar ved at indtegne disse Kurver, minder stærkt om en Gitterdrager og tyder paa, at vore Gitterdragere ere rationelle Konstruktionsformer.

Opg. 42. En Bjælke med cirkulært Tværsnit er indspændt i den ene Ende og i den andre Endes Bøjningspunkt paavirket af en Kraft P under 45° med Axen. Undersøg, hvorledes Dimensionerne skulle bestemmes, naar i 2. Enden antages forskellige Værdier. Beregn den omtrentlige Fejl, man begaar ved i Ørnskovs Bæltet kun at tage Hensyn til Normalspændingerne eller kun til Forskydningerne.

Opg. 43. En Forbindelse, hvorved man der skal overføres et Tryk paa 2000 N, bestaaende ved et Charnierbolt af 1.5" Diameter, gaende gennem 2 Plader af Staal 1/2" tykke. Plader af hvilken de to der overføre Trykket til Botten, sødes her sammen, medens de to, der modtage Trykket fra Boltten, have en indbyrdes Udsæd af 30". Beregn største Fiberpaavirkning i Boltten, naar hver Plades Tryk antages at virke som en Enkelkraft midt i Pladens Bredde.

§ 69. 30 : 12 : 24 V = 1 : 1 : 1. Saaledes man holder sig til den grundlæggende udsagnende Tilstand, cirkulært eller kvadratisk, som i Tverrsnit, er Sagen betydelig simplere end i enligeformede Tverrsnit, der man nemlig paa Forhaand kan angive, i hvilke Punkter den største Spænding bliver størst. Normalspændingen i de 30" Stængler naar sin største Værdi i de midte Punkter, som i de 12" Stængler midtside Punkter af Omkredsen. Den største Forskydning i de 24" Stængler er størst midt i Stængelsen, medens den i de 12" Stængler er størst i alle Omkredens Punkter. Den største Spænding findes i de Punkter, hvor de 24" og 12" Stængler samles.

Den største Spænding med Diameter 1 eller cirkulært kvadratisk med side 1/2" med Diameter 1, midtside Diameter 1/2" i de 12" Stængler, medens den i de 24" Stængler er størst i alle Omkredens Punkter. Den største Spænding findes i de Punkter, hvor de 24" og 12" Stængler samles.

De Indskrifter

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I} \cdot y$$

$$\max. \tau_{xy} = \frac{M_v}{\frac{1}{16} \pi d^3}, \quad \max. \tau_{xy} = \frac{M_v \cdot d_1}{\frac{1}{16} \pi (d_1^4 - d_0^4)}.$$

Naar man for Kortheds Skyld indfører Modstandsmomentet W :

$$W = \frac{1}{32} \pi d^3; \quad W = \frac{\frac{1}{32} \pi (d_1^4 - d_0^4)}{d_1},$$

kan man for begge de betragtede Tværsnitsformer under ét skrive:

$$\max. \sigma_x = \frac{M_b}{W}, \quad \max. \tau_{xy} = \frac{M_v}{2W}.$$

Idet $\sigma_y = 0$, faar man ved at indføre disse Værdier i (46):

$$\sigma_i = \frac{1}{W} \left(\frac{m-1}{2m} \cdot M_b + \frac{m+1}{2m} \sqrt{M_b^2 + M_v^2} \right),$$

og Dimensionerne skulle nu bestemmes saaledes, at $\sigma_i \leq$ den tilladelige Paavirkning r . I Almindelighed udfører man lettere Beregningen paa den Maade, at man bestemmer Størrelsen af det bøjende Moment M_i , det *ideelle Moment*, der ved at virke alene kan frembringe samme Paavirkning σ_i som M_b og M_v tilsammen. M_i er da bestemt ved:

$$\sigma_i = \frac{M_i}{W},$$

$$\text{altsaa} \quad M_i = \frac{m-1}{2m} M_b + \frac{m+1}{2m} \sqrt{M_b^2 + M_v^2}, \quad (47)$$

og med $m = 4$:

$$M_i = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + M_v^2}. \quad (47a)$$

Efter denne Formel beregner eller konstruerer man M_i og bestemmer dernæst som sædvanligt Dimensionerne ved $M_i = r \cdot W$. Fig. 184, Pl. 20, viser en simpel Konstruktion af M_i .

For et *rektangulært Tværsnit*, som ligeledes ikke sjældent forekommer, er Sagen ligesaa simpel, hvis det bøjende Moment virker i en Plan, der er parallel med de korte Sider. I saa Fald optræde nemlig $\max. \sigma_x$ og $\max. \tau_{xy}$ samtidigt i Midtpunkterne af Rektanglets lange Sider (smlgn. § 23). Be-

regningen udføres ganske som ovenfor, idet $\max. \tau_{xy}$ er bekendt fra § 23. — Hvis derimod det bøjende Moment virker i en Plan, parallel med Rektanglets lange Sider, ved man ikke paa Forhaand, i hvilket Punkt $\max. \sigma_t$ skal søges. Da Forskydningsspændingerne ere størst ude ved Omkredsen, maa $\max. \sigma_t$ dog findes her, og man kan derfor løse Opgaven forsøgsvis ved at beregne σ_t i en Række Punkter af Omkredsen. For at kunne udføre dette maa man kende Forskydningsspændingen i Omkredsens forskellige Punkter, og da vi i § 23 kun have angivet Hovedresultatet angaaende Vridning af et Prisme med rektangulært Tværnsnit, anføres det her, at man kan regne*):

$$\tau_h = \frac{3}{2} \frac{M_v}{b^3 h} \left[1 - \left(\frac{y}{\frac{1}{2}h} \right)^2 \right],$$

$$\tau_b = \frac{3}{2} \frac{M_v}{bh^3} \left[1 - \left(\frac{x}{\frac{1}{2}b} \right)^2 \right],$$

hvor τ_h og τ_b ere Størrelserne af Forskydningsspændingerne i Siderne h og b , og hvor y og x ere Afstandene fra Symmetri-axerne, maalte parallelt med Siderne h og b .

Hvis der foruden Bøjning og Vridning optræder direkte Træk eller Tryk og Forskydning, adderer man først samtlige Normalspændinger for sig og samtlige Forskydningsspændinger for sig, førend man benytter (43) eller (46) til Beregning af de ideelle Spændinger. Principielt er der ikke noget nyt at tilføje, men da det som oftest ikke paa Forhaand er muligt at se, i hvilket Punkt den største ideelle Spænding vil optræde, blive Opgaver af denne Art let meget komplicerede.

Opg. 44. En cirkulær Cylinder er indspændt i den ene Ende og i den frie Endeflade i Afstanden a fra Centrum paavirket af en Kraft P , hvis Retningslinje danner en Vinkel paa 45° med Cylinderens Axe og projiceres paa Endefladen som Tangent til Cirklen med Radius a . Hvor optræder den største ideelle Spænding, og hvilken Indflydelse har Forholdet mellem d (Diameteren), l (Længden) og a herpaa?

*) Bach: *Elasticität und Festigkeit*, 2te Aufl., S. 173. Föppl: *Festigkeitslehre*, Leipzig, 1897, S. 331.

FEMTE AFSNIT.

Krumme Bjælker, Plader.

§ 70. Bøjning af plankrumme Stænger. Stangens Midtlinie ligger i en Plan, og alle de ydre Kræfter antages at virke i samme Plan; under Formforandringen maa Midtlinien da bevæge sig i sin egen Plan. Stangen antages symmetrisk om Midtliniens Plan. Et vilkaarligt Normalsnit vil i Almindelighed være paavirket af en Normalkraft N og et Moment M , muligvis tillige af en Forskydning, som vi dog se bort fra i det følgende.

Hvis Normalkraften N virker alene og er ensformig fordelt over Tværsnittet, vil Formforandringen pr. Længdeenhed af de enkelte Fibre være den samme. Men naar vi (Fig. 185, Pl. 20) betragte det mellem to konsekutive Normalsnit liggende Stykke af Stangen, ses Fibrenes Længde at være forskellig, og da den absolute Længdeforandring er proportional med den oprindelige Længde, maa den hele Formforandring aabenbart bestaa i en Drejning om det oprindelige Krumningscentrum af det ene Tværsnit i Forhold til det andet. — Naar den i alle Punkter lige store Spænding kaldes σ , er Længdeforandringen i Midtlinien:

$$\Delta ds = \frac{\sigma}{E} ds,$$

og Tværsnittet drejes en Vinkel:

$$\Delta d\varphi = \frac{\Delta ds}{\varrho_0} = \frac{\sigma ds}{E \varrho_0} = \frac{\sigma}{E} d\varphi = \frac{N}{EF} d\varphi. \quad (1).$$

$\Delta\phi$ er en meget lille Størrelse (for smedeligt Jærn er $\frac{\sigma}{E}$ f. Ex. højst ca. $\frac{1}{2000}$); i Sammenligning med den af det bøjende Moment bevirkede Formforandring vil den derfor ofte være forsvindende.

Hvis det bøjende Moment M virker alene, vil Formforandringen bestaa i en Drejning af det betragtede Tværnsnit om den (foreløbig ubekendte) neutrale Axe, men den nærmere Beregning af Spændinger og Formforandringer kan først gennemføres, naar man har indført visse Forudsætninger ligesom ved Behandlingen af retlinede Bjælker. Der forudsattes det, at Tværnittene vedbleve at være plane, og dette medførte, at Spændingerne vare proportionale med Afstandene fra den neutrale Axe, altsaa fremstillede ved Ordinaterne til en ret Linie; man kunde ligesaa godt have forudsat Spændingerne varierende som Ordinater til en ret Linie og vilde saa heraf have sluttet, at Tværnittene holdt sig plane. Naar Bjælken imidlertid er krum, udelukke disse to Muligheder hinanden, som vi om et Øjeblik skulle se, og man maa derfor træffe et Valg, og da ingen af de to mulige Forudsætninger er exact, gælder det naturligvis om at vælge den, der viser bedst Overensstemmelse med Forsøgene. Af saadanne foreligger der foreløbig ikke ret mange, saa det kan være vanskeligt at træffe den rette Afgørelse; *her ville vi med Föppl*) gaa ud fra, at Spændingerne fordele sig efter en ret Linie*, hvilket fører til de simpleste Beregninger, — Behandlingen under Forudsætning af plane Tværnsnit bliver saa omstændelig, at den dog aldrig anvendes i Praxis, — men vi skulle ganske kort antyde Gangen i Be-

*) Det har i lang Tid været den enstemmige Anskuelse, at man burde gaa ud fra Forudsætningen om de plane Tværnsnit (se f. Ex. *Grashof: Theorie der Elasticität und Festigkeit*, Berlin 1878, S. 252, *Bach: Elasticität und Festigkeit*, 2te Aufl., S. 315, *Melan i Handb. d. Ingenieurwissenschaften*, Bd. II, Abth. 4, Leipzig 1888, o. s. v.). For nylig har imidlertid Föppl (i *Centralbl. d. Bauverwaltung*, 1896, S. 490, og i sin *Festigkeitslehre*, Leipzig, 1897, S. 196 o. f.) hævdet de to Forudsætningers Ligeberettigelse a priori og paavist, at Forudsætningen om Spændingsfordeling efter en ret Linie stemmer mindst lige saa godt med de faa foreliggende Forsøg som den om de plane Tværnsnit, eller snarest bedre, og han stiller en Meddelelse om flere egne Forsøg, der pege i samme Retning, i Udsigt.

regningen ogsaa med plane Tværnsnit som Udgangspunkt, navnlig for at gøre det klart, hvorledes Forskellen egentlig viser sig.

Foreløbig Undersøgelse under Forudsætning af, at Tværnsnittene holde sig plane. I Fig. 186, Pl. 20, er $A_0A_0B_0B_0$ et Element af Stangen, begrænset af to konsekutive Tværnsnit, der skære hinanden i det oprindelige Krumningscentrum O_0 . Det bøjende Moments Virkning bestaar i en Drejning af Tværsnittet A_0A_0 i Forhold til B_0B_0 hen til Stillingen AA , der skærer B_0B_0 i det nye Krumningscentrum O ; Drejningen er foregaaet om den neutrale Axe C , som viser sig ikke at falde i Stangens Midtlinie MM . Gennem C lægges en Parallelkurve CC til MM , og dens oprindelige Krumningsradius O_0C kaldes r_0 , Krumningsradius efter Bøjningen, OC , kaldes r . Fiberelementet i Afstanden y fra den neutrale Axe C har en oprindelig Længde:

$$ds_y = (r_0 + y) d\varphi$$

og faar ved Bøjningen en Længdetilvæxt:

$$\Delta ds_y = y \cdot \Delta d\varphi.$$

Herved findes Spændingen σ_y i dette Fiberelement:

$$\sigma_y = E \cdot \frac{\Delta ds_y}{ds_y} = E \cdot \frac{y}{r_0 + y} \cdot \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}.$$

Nu fordres der til Ligevægt, at Summen af de indre Kræfter $\sigma_y \cdot dF$ paa de enkelte Arealelementer dF skal være Nul, og at de samme Kræfters Moment med Hensyn til den neutrale Axe skal være lig de ydre Kræfters Moment M om samme Axe; dette giver:

$$\int \sigma_y dF = E \cdot \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int \frac{y}{r_0 + y} dF = 0, \quad (a)$$

og
$$M = \int \sigma_y \cdot y dF = E \cdot \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int \frac{y^2}{r_0 + y} dF,$$

eller:
$$M = \frac{E}{r_0} \cdot \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int y^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{y}{r_0}} dF. \quad (b)$$

Ligning (a) tjener til Bestemmelse af den neutrale Axes Beliggenhed; man ser, at den ikke gaar gennem Tværsnittets Tyngdepunkt. I Ligning (b) er Integralet aabenbart i nær Fa-

milie med Tværsnittets Inertimoment om den neutrale Ase: indføres Betegnelsen:

$$I' = \int y^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{y}{r_0}} dF,$$

finder man:

$$\frac{1}{r_0} \cdot \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{EI'}, \quad (c)$$

hvorved Udtrykket for Spændingen bliver:

$$\sigma_y = \frac{M \cdot y}{I'} \cdot \frac{1}{1 + \frac{y}{r_0}}; \quad (d)$$

Spændingerne ere fremstillede som Ordinater til en Hyperbel.

Af Ligning (c) kan Vinkeldrejningen for et endeligt Stykke af den krumme Bjælke findes ved Integration; idet man (Fig. 186) har:

$$r_0 \cdot d\varphi = r(d\varphi + \Delta d\varphi),$$

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{r_0 - r}{r},$$

kan Ligning (c) ogsaa skrives:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{M}{EI'}, \quad (e)$$

hvoraf man, hvis man vilde gaa videre, kunde udlede Differentialligningen for den neutrale Linie CC efter Bøjningen.

Hvis $\frac{\max. y}{r_0}$ er en forsvindende Størrelse, altsaa hvis

der er Tale om en svagt krummet Bjælke med smaa Dimensioner af Tværsnittet i Krumningens Plan, falde Formlerne (a) og (d) sammen med de tilsvarende for lige Bjælker: den neutrale Ase gaar da gennem Tværsnittets Tyngdepunkt. I' bliver til det sædvanlige Inertimoment, og Spændingerne variere som Ordinaterne til en ret Linie; r_0 og r blive til Krumningsradierne ρ_0 og ρ for Midtlinien. For at give et Be-

reb om, hvor lille Størrelsen $\frac{\max. y}{r_0} = \frac{\frac{1}{2}h}{r_0}$, hvor h betegner Tværnittets Højde i Krumningsradiens Retning, skal være, or at man skal kunne betragte den som forsvindende, anføres her efter *Bach**) nogle Tal:

	$r_0 : h =$	1,	2,	3,	4,
Rektangulært Tværnit:	$I' : I =$	1,18,	1,04,	1,02,	1,01;
Cirkel eller Ellipse:	$I' : I =$	1,15,	1,03,	1,02,	1,01.

Forskellen mellem I' og I er altsaa temmelig forsvindende, naar $r_0 : h$ ikke er meget lille; men de ved Ligning (d) beregnede Spændinger kunne dog paa Grund af den sidste Faktor afvige meget betydeligt fra dem, man vilde faa ved at regne med Formlerne for lige Bjælker. For en opskaaren Ring med cirkulært Tværnit, paavirket af et Træk i to diametralt modsatte Punkter, beregner *Bach* saaledes, at

	for $r_0 : h =$	1,	2,	3,	4,
er største Trækspænding efter (d):		74 %,	29 %,	18 %,	13 %,

større end den, man vilde finde ved Formlerne for lige Bjælker. For nogenlunde smaa Værdier af $r_0 : h$, saaledes som de forekomme ved Krankroge, Kædeled o. l., er der altsaa en betydelig Forskel paa de Spændinger, man finder efter Ligning (d) og efter Formlerne for lige Bjælker; Forskellen er i alt Fald saa stor, at man nogenlunde let ved Forsøg maa kunne eftervise, hvilken Methode der er rigtigst. Saasnart $r_0 : h$ derimod kommer op til saadanne Værdier som 8—10, er Forskellen ganske forsvindende.

Hvis Normalkraft og Moment virke paa én Gang, kan man ikke, naar man gaar ud fra de plane Tværnit, ligefrem addere de fra hver Aarsag for sig hidrørende Spændinger; man maa derfor foretage en ny Udvikling, som bliver temmelig kompliceret, men vi skulle ikke komme nærmere ind herpaa.

Vi ville nu gaa ud fra, at Spændingerne variere som Ordinator til en ret Linie. Naar man sætter $\sigma_y = C \cdot y$ og opskriver de sædvanlige Ligevægtsbetingelser, idet der kun tænkes

*) *Elasticität und Festigkeit*, 2te Aufl. S. 324 o. f., Noten.

paa Paavirkning ved et bøjende Moment M . findes selvfølgelig, at den neutrale Axe gaar gennem Tyngdepunktet, og ved Momentligningen: at $C = \frac{M}{I}$, saa at Spændingerne fra Momentet alene ere givne ved:

$$\sigma_y = \frac{M}{I} \cdot y.$$

Hvis man vil bestemme Tværsnittets Form efter Bøjningen, haves dertil, at Fiberelementet i Afstanden y fra Midtlinien og med den oprindelige Længde ds , forlænges et Stykke:

$$\Delta ds_y = \frac{\sigma_y}{E} \cdot ds_y = \frac{M}{EI} \cdot y \cdot ds_y;$$

idet Længden af Elementet MM af Midtlinien (se Fig. 186, hvor C og M tænkes faldne sammen) er ds , har man:

$$ds_y = ds + \frac{y}{\rho_0} ds,$$

hvorved

$$\Delta ds_y = \frac{M}{EI} \left(1 + \frac{y}{\rho_0}\right) y ds.$$

Forlængelserne Δds_y ere altsaa ikke ligefrem proportionale med Afstandene y , saa *hvis Tværsnittet er plant før Bøjningen, kan det ikke være plant efter Bøjningen*. Man kan derfor ikke tale om en bestemt Drejning af Tværsnittet som et Hele, idet de forskellige Elementer deraf ville drejes forskellige Vinkler. Ved Drejningen af Tværsnittet ville vi imidlertid i det følgende forstaa Drejningen af Tværsnitselementet i Midtlinien, hvilket er det samme som *Ændringen af Vinklen mellem to konsekutive Tangenter til Midtlinien*, og idet Δds_y og y kunne betragtes som Koordinater til den Kurve, hvori det deformerede Tvær-snit skærer Symmetriplanen, maa denne Vinkeldrejning være:

$$\Delta d\varphi = \left[\frac{d(\Delta ds_y)}{dy} \right]_{y=0} = \frac{M}{EI} ds. \quad (2).$$

Vi have hidtil behandlet Virkningen af Moment og Normal-kraft hver for sig; men naar Spændingerne variere som

Ordinater til en ret Linie, kunne Virkningerne ligefrem adderes. Den resulterende Spænding bliver altsaa:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{I} y. \quad (3).$$

I Ligning (1) have vi et Udtryk for den af Normalkraften bevirkede Ændring af Vinklen mellem to konsekutive Tangenter, Ligning (2) giver den tilsvarende Størrelse for Momentet; den hele Vinkeldrejning af Elementet er derfor:

$$\Delta d\varphi = \frac{N}{EF} d\varphi + \frac{M}{EI} ds; \quad (4).$$

heri er, som det fremgaar af Fig. 185 og 186, N regnet positiv for Træk, M , naar det bevirker Træk paa den konvekse Side af den krumne Bjælke, og $\Delta d\varphi$ er da en Drejning, hvorved Krumningen forøges.

Ændringen af Vinklen mellem Tangenterne i to Punkter A_0 og A_1 i endelig Afstand fra hinanden, Fig. 187, Pl. 21, bliver nu:

$$\Delta\varphi_1 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{N}{EF} d\varphi + \int_{s_0}^{s_1} \frac{M}{EI} ds. \quad (5).$$

Vi ville til Slut beregne Ændringerne Δx_1 og Δy_1 af Koordinaterne x_1 , y_1 til et Punkt A_1 (Fig. 187), naar Punktet A_0 med Koordinaterne x_0 , y_0 ligger stille. Flytningen af Punktet A_1 hidrører dels fra, at de enkelte Bueelementer ds paa Strækningen A_0A_1 faa Længdetilvæksten Δds , dels fra at de drejes Vinklen $\Delta d\varphi$. Vi tænke os nu, at kun Elementet BB_1 med Koordinaterne x , y forlænges og drejes, og ville søge Virkningen heraf paa Punktet A_1 .

Naar der ikke sker andet, end at BB_1 faar en Længdetilvæxt Δds , hvorved B_1 forskydes i Retning af BB_1 , vil A_1 forskydes det samme Stykke og i samme Retning. Koordinaterne til A_1 faa derfor Tilvækterne:

$$d(\Delta x_1) = \Delta ds \cdot \cos \varphi = \frac{N}{EF} dx, \quad d(\Delta y_1) = \Delta ds \cdot \sin \varphi = \frac{N}{EF} dy.$$

Hvis dernæst det eneste, der foregaar, er, at BB_1 drejes Vinklen $\Delta d\varphi$, saa vil hele Buestykket B_1A_1 drejes den samme

Vinkel, og A_1 vil altsaa gennemløbe en Cirkelbue med Radius $BA_1 = l$; denne Bues Længde er $l \cdot \Delta d\varphi$, og idet Linien BA_1 danner Vinklen α med x -Axen, faas ved Projektion de heraf følgende Ændringer i Koordinaterne til A_1 :

$$\begin{aligned} d(\Delta x) &= l \cdot \Delta d\varphi \cdot \sin \alpha = (y_1 - y) \cdot \Delta d\varphi, \\ d(\Delta y) &= -l \cdot \Delta d\varphi \cdot \cos \alpha = -(x_1 - x) \cdot \Delta d\varphi, \end{aligned}$$

hvor Værdien af $\Delta d\varphi$ indføres fra (4).

Ved Addition af de to Enkeltvirkninger og Integration fra A_0 til A_1 findes endelig de resulterende Koordinatændringer:

$$\Delta x_1 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{N}{EF} dx + \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{N}{EF} (y_1 - y) d\varphi + \int_{s_0}^{s_1} \frac{M}{EI} (y_1 - y) ds, \quad (6)$$

$$\Delta y_1 = \int_{y_0}^{y_1} \frac{N}{EF} dy - \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{N}{EF} (x_1 - x) d\varphi - \int_{s_0}^{s_1} \frac{M}{EI} (x_1 - x) ds. \quad (7)$$

Baade i disse Formler og i Ligning (5) er det sidste Led langt det største; i mange praktiske Anvendelser medtager man derfor kun sidste Led.

Exempel 1. En cirkulær Ring er i to diametralt modsatte Punkter paavirket af to lige store, modsat rettede Kræfter P (Fig. 188, Pl 21).

Hvis man lægger et vilkaarligt Normalsnit, vil dette i Almindelighed være paavirket af en central Normalkraft N , et Moment M og en Forskydning Q . Naar man kender disse tre Størrelser i et vilkaarligt Snit, kan man finde Paavirkningen i et hvilket som helst andet Snit ved at opskrive de tre Ligevægtsbetingelser for Stykket af Ringen mellem Snittene; men man kan ikke ved de statiske Ligevægtsbetingelser alene finde N , M og Q i noget Snit til at begynde med, Ringen er et statisk ubestemt System. Man maa derfor tage Formforandringerne til Hjælp, ligesom vi tidligere have gjort for statisk ubestemte, lige Bjælker. Her ses det nu let, hvorledes man skal skaffe de tre manglende Betingelsesligninger: hvis man tænker sig Ringen overskaaren paa et enkelt Sted, maa de to derved fremkomne frie Ender hverken drejes eller forskydes i Forhold til hinanden; naar man altsaa tænker sig

den ene Ende holdt fast (indspændt), skal $\Delta\varphi_1$, Δx_1 og Δy_1 for den anden Ende være Nul.

I det her specielt betragtede Tilfælde kan man imidlertid ved Hjælp af Symmetrien klare sig betydelig simplere. Tværsnittet ved A kan kun være paavirket af en Normalkraft og et Moment; thi hvis der optraadte en Forskydning, kunde denne sammensættes med Normalkraften til en mod Snittet skraat rettet Resultant, og en saadan kan ifølge Symmetrien ikke forekomme. Normalkraften ved A ses endvidere umiddelbart at maatte være $\frac{1}{2}P$. Der bliver saaledes kun den ene ubekendte, Momentet X ved A , tilbage, og til Bestemmelse heraf har man, at $\Delta\varphi_1 = 0$, som ovenfor forklaret. Ved Beregningen af $\Delta\varphi_1$ behøver man kun at betragte en Kvadrant af Ringen, da Tværsnittene ved A og B paa Grund af Symmetrien maa vedblive at staa vinkelret paa hinanden.

Inden vi kunne opskrive Betingelsen $\Delta\varphi_1 = 0$, maa vi udtrykke Normalkraft og Moment i et vilkaarligt Snit OC under Vinklen φ med OA ved φ og X . Man finder ved at betragte Stykket af Ringen mellem OA og OC , idet den positive Retning for Momentet X er angivet i Figuren [Retningen er valgt saaledes, at et positivt Moment søger at krumme Ringen stærkere; sammenlign Bemærkningen ovenfor efter Ligning (4)]:

$$M = X + \frac{1}{2}P \cdot r(1 - \cos \varphi), \quad N = \frac{1}{2}P \cos \varphi.$$

Ved Indsættelse heraf i (5) faas (med $ds = r \cdot d\varphi$) Betingelsen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{P \cos \varphi}{2EF} d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{X + \frac{1}{2}P \cdot r(1 - \cos \varphi)}{EI} \cdot r d\varphi = 0,$$

og idet E , F og I antages konstante, findes ved Udførelse af Integrationerne:

$$X = -Pr \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) - P \cdot \frac{I}{\pi r F}.$$

Det sidste Led, som hidrører fra Normalkraften, ses at være meget lille, idet Inertiradius for Ringens Tværnit almindelig vil være meget lille i Forhold til r . X er altsaa negativ, Tværsnittet ved A bliver strakt indvendig, trykket udvendig.

Momentet i et vilkaarligt andet Snit er nu givet ved:

$$M = X + \frac{1}{2}P \cdot r(1 - \cos \varphi),$$

hvor sidste Led altid er positivt for Kvadranten AB ; Momentet ved A er derfor det største negative Moment, der forekommer, og det største positive Moment maa findes ved B , hvor sidste Led bliver størst. Momentet ved B bliver tillige det absolut største; det er:

$$M_{\max.} = \frac{Pr}{\pi} - \frac{PI}{\pi r F} = \frac{Pr}{\pi} \left(1 - \frac{i^2}{r^2}\right), \quad (8)$$

hvor i er Tværnittets Inertiradius; Normalkraften ved B er Nul.

Forkortelsen Δd_A af Diameteren gennem A kan findes ved (6), Forlængelsen Δd_B af Diameteren gennem B ved (7). Hvis man ser bort fra de Led, der hidrøre fra Normalkraftens Virkning, faas:

$$\begin{aligned} \Delta d_A &= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{X + \frac{1}{2} Pr (1 - \cos \varphi)}{EI} (r - r \sin \varphi) \cdot r \cdot d\varphi \\ &= \frac{2r^3}{EI} \left[\frac{Pr}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \varphi) d\varphi - \frac{1}{2} Pr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi (1 - \sin \varphi) d\varphi \right] \\ &= -\frac{Pr^3}{EI} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Paa samme Maade findes:

$$\Delta d_B = \frac{Pr^3}{EI} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right). \quad (9)$$

Dette Exempel finder Anvendelse ved Beregning af Spændinger for krydsende Rundjærnsdiagonaler, af Rør, der paa-virkes til Tryk i diametralt modsatte Punkter, cirkulære Kædeled o. l. For ovale (elliptiske) Kædeled udføres Beregningen paa samme Maade, men man støder her paa elliptiske Integraler, saa man maa ty til Rækkeudvikling eller grafisk Integration.

De fleste Forsøg over krumme Bjælker ere udførte med Ringe som den her behandlede, men rigtignok i Almindelighed med Materialer, der ikke følge Hooke's Lov, saa man kan ikke vente, at Forsøgsresultaterne skulle stemme absolut med Beregningen, eller at man deraf skal kunne drage nogen bestemt Slutning om, hvilken af de to Beregningsmetoder der er den

igtige. *Bach* *) har anstillet nogle Forsøg med Støbejerns-
 inge, for hvilke den ydre Diameter var omtrent 10^{cm.}, Længden
 Frembringerretningen, 6^{cm.}, Godstykkelsen 1,3—1,6^{cm.}. I neden-
 staaende Tabel er anført de Værdier af Spændingen i Brud-
 øjeblikket, som *Bach* har beregnet under Forudsætning af, at
 Tværnittene holde sig plane, endvidere de Værdier, der findes
 ved Ligning (8) og (3), og endelig de Værdier, man skulde
 have ventet som Brudbelastning, hvis Theorien var exact;
 disse sidste Tal ere fundne ved at multiplicere Brudgrænsen
 for Træk med 1,75 eller 1,5, eftersom Støbeskallen var bort-
 taget eller ikke (rektangulært Tværnsnit, sammenlign § 53):

	<i>r</i> cm.	Gods- tykkelse cm.	Beregnet Brud- spænding, kg./cm. ²		Brud- spændingen skulde være: kg./cm. ²
			Bach	Lign. (8) og (3)	
Med Støbeskal	4,25	1,50	3657	3220	2370
„ „	4,28	1,50	3685	3250	„
„ „	4,24	1,55	3269	2930	„
Uden Støbeskal	4,34	1,39	3498	3120	2760
„ „	4,34	1,35	3695	3300	„
Med Støbeskal	4,26	1,56	3135	2760	2520
„ „	4,25	1,55	3156	2790	„
Uden Støbeskal	4,37	1,32	3508	3170	2940
„ „	4,36	1,31	3759	3370	„

Ingen af Tallene passe videre godt, men de efter Ligning
 (8) og (3) beregnede ere dog aabenbart en Del rigtigere end
 de af *Bach* beregnede. Der synes herefter absolut ingen Grund
 at være til at foretrække den langt besværligere Beregning
 med de plane Tværnsnit som Udgangspunkt **).

*) *Elasticität und Festigkeit*, 2te Aufl. S. 340 o. f.

**) I den nyeste Udgave af *„Elasticität und Festigkeit“* (3te Aufl. Berlin, 1898,
 S. 470 o. f.) forsvarer *Bach* paa det kraftigste Beregningsmaaden med
 de plane Tværnsnit som Udgangspunkt og anfører ogsaa nogle nye For-

Föppl anfører *) tre Forsøg med Lerrør af 13^{cm} ydre Diameter, 16—17^{m.m.} Godstykkelse; de to af Rørene belastedes ved et Tryk i diametralt modsatte Punkter, og der maaltet nogle sammenhørende Værdier af Kraften og Forøgelsen af den vandrette Diameter samt Brudbelastningen, og heraf beregnedes ved (9) Elasticitetskoefficienten og ved (8) Brudspændingen; det tredje Rør belastedes som en almindelig Bjælke med to Understøtninger med en Enkeltkraft i Midten, og ogsaa her beregnedes E og Brudspændingen. Resultaterne stemme meget godt med hinanden; de ere:

	E kg./cm. ²	Brud- spænding kg./cm. ²
Belastet som Ring	186300	168,7
„ „ „	205400	165,1
„ „ Bjælke	201900	173,8

Exempel 2. En parabolisk Bue støtter ved Enderne mod to faste Charnierer og bærer en ensformig Belastning p pr. Længdeenhed. (Fig. 189, Pl. 21).

Hver af de to Reaktioner kan opløses i en lodret og en vandret Komposant; den lodrette er paa Grund af Symmetrien lig $\frac{1}{2}pl$, de vandrette ere lige store, men kunne ikke bestemmes ved de statiske Ligevægtsbetingelser alene. Denne ubekendte vandrette Kraft kaldes H ; til dens Bestemmelse benyttes den Betingelse, at Afstanden l mellem de to Charnierer er uforanderlig, altsaa [Ligning (6)] : $\Delta l = 0$.

søg med meget skarpt krummede Stænger ($r = 7^{\text{cm}}$, Godstykkelsen $= 8^{\text{cm}}$) af Støbejern; for disse beregner han, ligesom det ovenfor er gjort, Brudspændingen efter begge Metoder og finder efter sin egen Beregningsmaade ca. 20 % for store Værdier, under Forudsætning af retlinet Spændingsfordeling ca. 30 % for smaa Værdier. Ingen af Metoderne synes herefter særlig korrekt, men det er ganske vist en Ulempe ved den, der gaar ud fra retlinet Spændingsfordeling, at den fører til Resultater, der ligge paa den usikre Side. Imidlertid kan Spørgsmaalet aldrig afgøres ved Forsøg med Støbejern, og man maa afvente Meddelelser om *Föppl's* Forsøg. Det er naturligvis kun for meget skarpe Krumninger, at Spørgsmaalet overhovedet har Betydning.

*) Centralbl. d. Bauverwaltung, 1896, S. 490.

Der lægges et Koordinatsystem med Begyndelsespunkt i A og x -Aksen gennem B. I det vilkaarlige Punkt (x, y) er Momentet:

$$M = H \cdot y - \frac{1}{2} p (lx - x^2),$$

idet et positivt Moment skal frembringe en Forøgelse af Krumningen. Ved Projektion paa Tangenten i (x, y) , der danner Vinklen φ med den vandrette, findes Normalkraften:

$$N = -H \cos \varphi - p \left(\frac{1}{2} l - x \right),$$

og ved Indsættelse heraf i (6) findes Ligningen til Bestemmelse af H . Naar vi foreløbig se bort fra de to første Led i (6), der hidrøre fra Normalkraften og have langt mindre Betydning end sidste Led, faas, idet Tværsnittet af Buen er konstant, og idet y_1 , Ordinaten til B, er Nul:

$$\int_0^{s_1} [-Hy^2 + \frac{1}{2} p (lx - x^2) y] ds = 0.$$

Buens Middlinie har Ligningen:

$$y = \frac{4f}{l^2} (lx - x^2),$$

og ved Hjælp heraf faas:

$$H \int_0^{s_1} y^2 ds = \frac{pl^2}{8f} \int_0^{s_1} y^2 ds,$$

$$H = \frac{pl^2}{8f}. \quad (10).$$

Ved Benyttelse heraf og af Parablens Ligning findes Momentet i det vilkaarlige Punkt at være:

$$M = H \cdot y - \frac{1}{2} p (lx - x^2) = Hy - \frac{pl^2}{8f} \cdot y = 0,$$

Buen er altsaa kun paavirket til direkte Sammentrykning af Normalkraften. Dette Resultat er ikke saa mærkeligt, da Parablen, som bekendt, er Ligevægtsform for en Bue eller Kæde med ensformig Belastning, og vi have i Virkeligheden ogsaa tidligere (S. 16) fundet det samme Udtryk for den vandrette Komponent af Trykket i Buen som her.

Resultatet forudsætter imidlertid, at Buen er usammen-trykkelig, idet vi have set bort fra Normalkraftens Virkning. Naar Buen derimod virkelig trykkes noget sammen, vil deraf følge en lille Nedbøjning i lodret Retning; Midtlinien følger da ikke mere nøjagtigt den paraboliske Ligevægtsform, og der maa altsaa fremkomme smaa bøjende Momenter. Dette viser sig ogsaa, naar de to første Led i (6) medtages; man finder da:

$$H \left[\int_0^{s_1} y^2 ds + \frac{I}{F} \int_0^l \cos \varphi dx - \frac{I}{F} \int_A^B y \cos \varphi d\varphi \right] \\ = \frac{Pl^2}{8f} \int_0^{s_1} y^2 ds - \frac{I}{F} \cdot p \int_0^l \left(\frac{1}{2} l - x \right) dx + \frac{I}{F} p \int_A^B \left(\frac{1}{2} l - x \right) y d\varphi.$$

De to sidste Led paa højre Side forsvinde paa Grund af Symmetrien; sidste Led paa venstre Side kan ved delvis Integration omskrives til

$$\frac{I}{F} \cdot \int_A^B \sin \varphi dy;$$

hvis man har at gøre med en flad Bue, kan $\sin \varphi$ uden væsentlig Fejl sættes lig Nul, $\cos \varphi = 1$, $ds = dx$, og man finder da:

$$H \left[\int_0^l y^2 dx + \frac{I}{F} \cdot l \right] = \frac{Pl^2}{8f} \cdot \int_0^l y^2 dx,$$

og idet man ved Hjælp af Parablens Ligning har:

$$\int_0^l y^2 dx = \frac{8}{15} l \cdot f^2,$$

faas endelig:

$$H = \frac{Pl^2}{8f} \cdot \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \frac{i^2}{f^2}}, \quad (11).$$

hvor i betegner Inertiradius af Buens Tværsnit; den sidste Brøk vil i Almindelighed være temmelig lille.

Opgaver som de her i Exemplerne behandlede løses imidlertid lettere paa anden Maade, — ved Benyttelse af Systemets Deformationsarbejde, — saa vi skulle ikke komme nærmere ind paa dem her.

Opg. 45. Et cirkulært Rør er udvendig fra to diametralt modsatte Sider paavirket af et ensformig fordelt Tryk (ensformig fordelt over Diametralplanen). Find største Paavirkning af Materialet.

§ 71. Plane Plader, paavirkede til Bøjning. Vi skulle ikke her indlade os paa nogen fuldstændig Behandling af dette Spørgsmaal, men kun for at give et Begreb om Fremgangsmaaden gennemføre Beregningen i det simpleste Tilfælde: en cirkulær, tynd Plade, der er understøttet langs sin Periferi og ensformig belastet med p pr. Arealenhed.*)

Idet Pladen antages vandret, vil der være Symmetri om en hvilkensomhelst lodret Diametralplan; Pladen vil bøje sig ned, saa Midtersnittet formes efter en Omdrejningsflade. I Meridiansnittene vil der paa Grund af Symmetrien ingen Forskydningsspændinger optræde, og Normalspændingerne maa i samme Afstand fra Centrum være de samme i alle Meridiansnit. Naar vi betragte et Element af Pladen, begrænset af to konsekutive Meridiansnit og to konsekutive Cylinderflader med den lodrette gennem Pladens Centrum som Axe (Fig. 190, Pl. 21), vil der herpaa virke følgende Kræfter: paa Overfladen Belastningen p , paa Cylinderfladerne lodrette Forskydninger T og $T + dT$ samt Normalspændinger σ_r og $\sigma_r + d\sigma_r$ (i radial Retning), paa Meridiansnittene kun Normalspændinger σ_t (i tangentiell Retning), og disse Kræfter skulle holde hinanden i Ligevægt.

Ved Projektion paa vandrette Linier i Retning af Tangenten eller Radius findes, at Kræfterne $\sigma_t \cdot dF$ og ligesaa Kræfterne $\sigma_r \cdot dF$ maa danne Kraftpar; disse Kraftpars Momenter pr. Længdeenhed af Snittene ville vi kalde μ_t og μ_r . Ved Projektion paa en lodret Linie faas en Relation mellem Belastningen p og Forskydningsspændingerne. Belastningen paa den Del af Pladen, der ligger indenfor en Cirkel med Radius r , er $p \cdot \pi r^2$, og dette maa være Størrelsen af hele Forskydningen paa det cylindriske Snit med Radius r ; paa den Del af den indvendige Cylinderflade, der hører til det i Fig. 190 betragtede Element, virker der altsaa ialt en Forskydning.

$$T = \frac{d\psi}{2\pi} \cdot p \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} p r^2 \cdot d\psi.$$

Vi skulle dernæst benytte, at Momenterne med Hensyn til tre vilkaarlige Axer skulle være Nul. Med Hensyn til en lod-

*) Behandlingen er taget efter: Föppl: *Festigkeitslehre*, 1897, S. 253 o. f., og Flamant: *Résistance des matériaux*, 1886, S. 535 o. f.

ret Axe gennem det betragtede Elements Midtpunkt forsvinde alle Kræfternes Momenter af sig selv, med Hensyn til en vandret Axe gennem Elementets Midtpunkt og i Retning af Radius forsvinde de ligeledes paa Grund af Symmetrien. Tilbage bliver der kun at opstille Momentligningen om en vandret Axe vinkelret paa Meridianplanen, f. Ex. AA (Fig. 190), beliggende i Tangentplanen til den indvendige Cylinderflade.

Kraften T 's Moment er Nul; Momentet af Kraften $T + dT$ i den udvendige Cylinderflade er, idet Produktet $dT \cdot dr$ er forsvindende:

$$T \cdot dr = \frac{1}{2}pr^2 \cdot dr \cdot d\psi.$$

Kræfterne $\sigma_r dF$ paa den indvendige Cylinderflade danne, som ovenfor vist, et Kraftpar med Moment $\mu_r \cdot r d\psi$, og da Kraftparrets Axe netop er en Linie som AA, bliver disse Kræfters Bidrag til Momentsummen $\div \mu_r \cdot r \cdot d\psi$ (negativt, naar Momentet af $T + dT$ er positivt, idet vi regne μ_r positivt, hvis der bevirkes Tryk i de øverste, Træk i de nederste Fibre i Pladen). Normalkræfterne paa den udvendige Cylinderflade levere Bidraget: $(\mu_r + d\mu_r)(r + dr) d\psi$. Endelig have vi Kræfterne $\sigma_t \cdot dF$, som ligeledes regnes positive, hvis de bevirke Tryk foroven i Pladen. For hver af Meridianplanerne danne de et Kraftpar med Moment $\mu_t \cdot dr$, og hvis Axer ere vandrette Linier i Meridianplanerne, og de kunne sammensættes til et resulterende Kraftpar, hvis Axe har Retningen AA, og hvis Moment er:

$$2\mu_t \cdot dr \cdot \sin \frac{1}{2}d\psi = \mu_t \cdot dr \cdot d\psi;$$

i Momentligningen indgaar dette, som man let ser, med negativt Fortegn.

Belastningen paa Elementets Overflade er

$$p \cdot r dr d\psi;$$

dens Moment faas ved Multiplikation med $\frac{1}{2}dr$ og er altsaa forsvindende (Leddene i Momentligningen ere uendelig smaa af 2den Orden).

Momentligningen for Axen AA er nu;

$$\frac{1}{2}pr^2 \cdot dr \cdot d\psi - \mu_r \cdot r \cdot d\psi + (\mu_r + d\mu_r)(r + dr) d\psi - \mu_t \cdot dr \cdot d\psi = 0,$$

eller med Bortkastelse af $d\mu_r \cdot dr$ og Bortdivision af $d\psi$:

$$\mu_t = \frac{1}{2}pr^2 + \mu_r + r \cdot \frac{d\mu_r}{dr}. \quad (12).$$

Vi skulle nu have fat paa en Relation mellem Formforandringerne og Spændingerne og derigennem et Udtryk for μ_r og μ_t . Angaaende Formforandringerne forudsættes det, at Punkter, der oprindeligt laa paa en lodret Linie, efter Nedbøjningen endnu ligge paa en ret Linie. Dette er det samme som at forudsætte, at de oprindelige Cylinderflader, som vi have talt om ovenfor, gaa over til at blive Kegleflader med Toppunkter paa den lodrette gennem Pladens Centrum, og at Punkter, der oprindeligt laa i en Meridianplan, vedblive at ligge i denne. Det ovenfor betragtede Element af Pladen deformeres altsaa som vist i Fig. 191, Pl. 21; den neutrale Flade $a_0b_0c_0$, hvori alle Længder blive uforandrede, ligger midt i Pladen.

Vi betragte et Lag Fibre i Afstanden z under den neutrale Flade og søge et Udtryk for Forlængelserne pr. Længdeenhed af Linierne ab og ac . Den indvendige Kegleflade (oprindeligt en Cylinderflade) har Toppunktsvinklen 2α . ab er en Cirkelbue, hvis Radius oprindeligt var r , men nu er bleven $r + \alpha \cdot z$. (Formforandringen forudsættes som sædvanlig saa lille, at α og $\tan \alpha$ eller $\sin \alpha$ kunne erstatte hinanden). Elementet ab , hvis oprindelige Længde var $r \cdot d\psi$, har derfor faaet Længdetilvæksten $\alpha z \cdot d\psi$; Forlængelsen pr. Længdeenhed i tangentiell Retning er altsaa:

$$\epsilon_t = \frac{\alpha z \cdot d\psi}{r \cdot d\psi} = \frac{z}{r} \cdot \alpha. \quad (13)$$

Linien ac , hvis oprindelige Længde var dr , har faaet Længdetilvæksten $z \cdot d\alpha$; altsaa er Forlængelsen pr. Længdeenhed i radial Retning:

$$\epsilon_r = z \cdot \frac{d\alpha}{dr}. \quad (14)$$

Naar vi nu af ϵ_t og ϵ_r skulle danne Udtryk for Spændingerne σ_t og σ_r , maa det erindres, at Spændinger og Formforandringer ikke ere proportionale, naar der virker Kræfter i forskellige Retninger (§ 17, S. 51); man har derimod:

$$\epsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \frac{1}{m} \sigma_r), \quad \epsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \frac{1}{m} \sigma_t),$$

og ved Opløsning heraf findes:

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2 - 1} (m\varepsilon_t + \varepsilon_r), \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2 - 1} (m\varepsilon_r + \varepsilon_t).$$

Naar Udtrykkene (13) og (14) for ε_t og ε_r indføres heri, faas:

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{mE}{m^2 - 1} \cdot z \left(m \cdot \frac{\alpha}{r} + \frac{d\alpha}{dr} \right), \\ \sigma_r &= \frac{mE}{m^2 - 1} \cdot z \left(m \cdot \frac{d\alpha}{dr} + \frac{\alpha}{r} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Naar z regnes positiv nedad, faas altsaa Trækspændinger forneden, naar α og $\frac{d\alpha}{dr}$ ere positive.

Vi skulle nu danne Udtryk for μ_t og μ_r . μ_t betegner Momentet af Kræfterne $\sigma_t dF$ med Hensyn til Axen $a_0 c_0$ for en Længdeenhed af Linien $a_0 c_0$, altsaa haves, idet Arealelementet $dF = 1 \cdot dz$:

$$\begin{aligned} \mu_t &= \int \sigma_t \cdot z dF = \frac{mE}{m^2 - 1} \left(m \cdot \frac{\alpha}{r} + \frac{d\alpha}{dr} \right) \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} z^2 dz, \\ \mu_t &= \frac{mE}{m^2 - 1} \cdot \frac{h^3}{12} \left(m \cdot \frac{\alpha}{r} + \frac{d\alpha}{dr} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

μ_r betegner Momentet af Kræfterne $\sigma_r \cdot dF$ med Hensyn til Axen $a_0 b_0$ for en Længdeenhed af denne Linie, og idet ligeledes her $dF = 1 \cdot dz$, faas:

$$\mu_r = \int \sigma_r \cdot z dF = \frac{mE}{m^2 - 1} \cdot \frac{h^3}{12} \left(m \frac{d\alpha}{dr} + \frac{\alpha}{r} \right), \quad (17)$$

hvoraf endvidere udledes:

$$\frac{d\mu_r}{dr} = \frac{mE}{m^2 - 1} \cdot \frac{h^3}{12} \left(m \frac{d^2\alpha}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\alpha}{dr} - \frac{\alpha}{r^2} \right). \quad (18)$$

Ved Benyttelse af (16), (17) og (18) bliver (12) til:

$$\begin{aligned} &\frac{mE}{m^2 - 1} \cdot \frac{h^3}{12} \left(m \cdot \frac{\alpha}{r} + \frac{d\alpha}{dr} \right) \\ &= \frac{1}{2} p r^2 + \frac{mE}{m^2 - 1} \cdot \frac{h^3}{12} \left(m \frac{d\alpha}{dr} + \frac{\alpha}{r} + m r \frac{d^2\alpha}{dr^2} + \frac{d\alpha}{dr} - \frac{\alpha}{r} \right), \end{aligned}$$

eller:

$$r \frac{d^2 \alpha}{dr^2} + \frac{d\alpha}{dr} - \frac{\alpha}{r} + \frac{6(m^2 - 1)}{m^2 \cdot Eh^3} \cdot pr^2 = 0.$$

Sættes for Kortheds Skyld:

$$\frac{6(m^2 - 1)}{m^2 \cdot Eh^3} \cdot p = N,$$

bliver Differentialligningen:

$$r^2 \frac{d^2 \alpha}{dr^2} + r \frac{d\alpha}{dr} - \alpha + Nr^2 = 0.$$

De tre første Led heri faas ved Differentiation af:

$$r^2 \frac{d\alpha}{dr} = ar,$$

hvorfor Ligningen kan skrives:

$$d \cdot \left(r^2 \frac{d\alpha}{dr} - ar \right) + Nr^3 dr = 0,$$

hvoraf ved Integration:

$$r \left(r \frac{d\alpha}{dr} - \alpha \right) + \frac{1}{4} Nr^4 + C_1 = 0,$$

og idet endvidere:

$$r \frac{d\alpha}{dr} - \alpha = r^2 \cdot \frac{d \left(\frac{\alpha}{r} \right)}{dr},$$

findes:

$$d \cdot \left(\frac{\alpha}{r} \right) + \frac{1}{4} Nrdr + \frac{C_1}{r^3} dr = 0,$$

$$\frac{\alpha}{r} + \frac{1}{8} Nr^2 - \frac{C_1}{2r^2} + C_2 = 0.$$

Lader man i næstsidste Led 2-Tallet indgaa i Konstanten, haves endelig:

$$\alpha = -\frac{1}{8} Nr^3 + \frac{C_1}{r} + C_2 \cdot r, \quad (19).$$

Til Bestemmelse af Konstanterne har man for det første, at Tangentplanen til den neutrale Flade maa være vandret i Centrum, altsaa $\alpha = 0$ her; $r = 0$, $\alpha = 0$ giver $C_1 = 0$. Den anden Betingelse maa hentes fra Understøtningsmaaden; hvis Pladen er indspændt langs Kanten ($r = r_1$), maa her $\alpha = 0$; hvis Pladen er simpelt understøttet langs Kanten og ikke forlænget ud over denne, maa $r = r_1$ give $\sigma_r = 0$.

Vi ville først tænke os *Pladen indspændt langs Randen*. Idet $r = r_1$ skal give $\alpha = 0$, faas $C_2 = \frac{1}{8}Nr_1^2$; Ligning (19) er nu:

$$\alpha = -\frac{1}{8}Nr^2 + \frac{1}{8}Nr_1^2r = \frac{1}{8}Nr(r_1^2 - r^2). \quad (20)$$

Herved kunne ε_t og ε_r [(13) og (14)] udtrykkes ved z , r og de givne Størrelser r_1 og N ; man finder:

$$\varepsilon_t = \frac{1}{8}Nz(r_1^2 - r^2), \quad \varepsilon_r = \frac{1}{8}Nz(r_1^2 - 3r^2).$$

I Midten af Pladen ($r = 0$) blive de naturligvis lige store, $\varepsilon_t = \varepsilon_r = \frac{1}{8}Nzr_1^2$. De aftage begge med voxende r ; for $r = r_1$ bliver $\varepsilon_t = 0$, $\varepsilon_r = -\frac{1}{4}Nzr_1^2$, hvilket er den numerisk største Værdi af Forlængelsen, der forekommer. Idet ε_t og ε_r ere de *virkelige* Forlængelser pr. Længdeenhed under Hensyn til Kræfterne baade i r - og t -Retningen (de maa altsaa sammenlignes med Størrelserne ε_1 , ε_2 i § 17), bliver den ideelle Spænding lig max. $\varepsilon_r \cdot E$ eller max. $\varepsilon_t \cdot E$, altsaa faas her den absolut største ideelle Spænding (med $z = \pm \frac{1}{2}h$):

$$\max. \sigma_t = \frac{1}{8}ENh \cdot r_1^2,$$

og ved Indsættelse af N s Værdi:

$$\max. \sigma_t = \frac{3}{4} \cdot \frac{m^2 - 1}{m^4} \cdot p \cdot \frac{r_1^2}{h^2}.$$

Sættes $m = 4$, faas til Bestemmelse af Dimensionerne, at

$$\max. \sigma_t = 0,7 \cdot p \cdot \frac{r_1^2}{h^2} \quad (21)$$

ikke maa overskride den tilladelige Paavirkning. r_1 er Pladens ydre Radius, h Tykkelsen. (21) viser, at Spændingen er proportional med $\pi r_1^2 \cdot p$, d. v. s. med den totale Belastning paa Pladen; sættes denne lig Q , faas:

$$\max. \sigma_t = C \cdot \frac{Q}{h^2},$$

saa max. σ_t er uafhængig af Radius.

Vil man beregne Nedbøjningerne, har man hertil, at α er Vinklen mellem Tangenten til Meridiankurven for den neutrale Flade og den vandrette; kaldes Nedbøjningen i Afstanden r fra Centrum y , have altsaa

$$\frac{dy}{dr} = \operatorname{tg} \alpha = \alpha = \frac{1}{8} N r (r_1^2 - r^2).$$

Integrerer man og bestemmer Konstanten saaledes, at $y = 0$ for $r = r_1$, findes Meridiankurvens Ligning og deraf den største Værdi af y (for $r = 0$):

$$y_{\max.} = \frac{1}{32} N r_1^4 = 0,18 \cdot \frac{p r_1^4}{E \cdot h^3}. \quad (22)$$

Naar Pladen er *simpelt understøttet langs Randen* og ikke forlænget ud over Understøtningen, maa, som ovenfor bemærket, Konstanten C_2 bestemmes ved Betingelsen $\sigma_r = 0$ for $r = r_1$. Ifølge Ligning (15) fører dette til, at

$$\left[m \frac{d\alpha}{dr} + \frac{\alpha}{r} \right]_{r=r_1} = 0,$$

og af (19) med $C_1 = 0$ findes:

$$m \frac{d\alpha}{dr} + \frac{\alpha}{r} = -\frac{3m}{8} N r^2 + C_2 m - \frac{1}{8} N r^2 + C_2,$$

altsaa har man:

$$-\frac{3m+1}{8} N r_1^2 + C_2 (m+1) = 0,$$

$$C_2 = \frac{3m+1}{8(m+1)} N r_1^2,$$

hvorved (19) bliver til:

$$\alpha = -\frac{1}{8} N r^2 + \frac{3m+1}{8(m+1)} N r_1^2 r. \quad (23)$$

Nu bestemmer man ligesom ved den indspændte Plade ϵ_t og ϵ_r og deraf den ideelle Spænding; man finder:

$$\epsilon_t = \frac{1}{8} N z \left(\frac{3m+1}{m+1} \cdot r_1^2 - r^2 \right), \quad \epsilon_r = \frac{1}{8} N z \left(\frac{3m+1}{m+1} \cdot r_1^2 - 3r^2 \right).$$

I Midten er $\epsilon_t = \epsilon_r$, og her findes tillige de største Værdier; den største ideelle Spænding bliver:

$$\sigma_t = E \cdot \frac{1}{8} N z \cdot \frac{3m+1}{m+1} r_1^2,$$

og ved Indførelse af N 's Værdi og med $m = 4$:

$$\sigma_t = \frac{3(m^2-1)(3m+1)}{8m^2(m+1)} \cdot p \cdot \frac{r_1^2}{h^2} = 0,91 \cdot p \cdot \frac{r_1^2}{h^2}. \quad (24).$$

Differentialligningen for den neutrale Flades Meridiankurve er som ovenfor:

$$\frac{dy}{dr} = \operatorname{tg} \alpha = \alpha,$$

hvor α tages fra (23). Ved Integration og Bestemmelse af Konstanten, saaledes at $r = r_1$ giver $y = 0$, findes Nedbøjningen i Midten (med $m = 4$):

$$y_{\max.} = \frac{1}{16} \cdot \frac{m^2-1}{m^2 E h^3} \cdot p \cdot \frac{5m+1}{m+1} \cdot r_1^4 = 0,74 \cdot \frac{p r_1^4}{E \cdot h^3}. \quad (25)$$

Hvis en cirkulær Plade er belastet med en Enkeltkraft i Midten, kan Beregningen gennemføres paa ganske lignende Maade; man faar blot et andet Udtryk for Forskydningen T . For ikke at blive for vidtløftige skulle vi kun efter *Føppl* anføre Resultaterne. For Nedbøjningen i Midten finder man, naar Pladen er indspændt langs Randen (med $m = 4$):

$$y_{\max.} = 0,22 \frac{P \cdot r_1^2}{E \cdot h^3}, \quad (26)$$

naar Pladen er simpelt understøttet:

$$y_{\max.} = 0,58 \frac{P \cdot r_1^2}{E \cdot h^3} \quad (27).$$

Hvis Kraften virkelig angriber i et matematisk Punkt, bliver Spændingen her uendelig stor. Imidlertid maa Kraftens Virkning naturligvis altid overføres til en Flade af endelig Størrelse; antages det, at P virker som en ensformig fordelt Belastning paa en Cirkel med Radius a , faas for en Plade, der er indspændt langs Randen:

$$\sigma_t = 0,45 \frac{P}{h^2} \cdot l \cdot \frac{r}{a}, \quad (28)$$

hvor l . betegner den naturlige Logarithme; for $a = 0,1 \cdot r$ giver dette:

$$\sigma_t = \text{ca. } 1,0 \cdot \frac{P}{h^2},$$

for $a = 0,01 \cdot r$:

$$\sigma_t = \text{ca. } 2,0 \cdot \frac{P}{h^2}.$$

Ved Randen Hayes:

$$\sigma_t = 0,45 \cdot \frac{P}{h^2},$$

der er ganske uafhængig af Pladens Størrelse.

For elliptiske, kvadratiske eller rektangulære Plader er Beregningen langt vanskeligere; vi skulle derfor nøjes med nedenfor at anføre nogle halvt empiriske Formler for disse Tilfælde.

De ovenfor udviklede, matematisk korrekte Formlers Anvendelighed er naturligvis bunden til de gjorte Forudsætninger, navnlig angaaende Understøtningens Beskaffenhed. Der er foretaget adskillige Forsøg med saadanne Plader, og naar de maalte Nedbøjninger have vist sig ikke at stemme særlig godt med de beregnede, maa Grunden vistnok navnlig søges i, at den anvendte Understøtningsmaade hverken har været en fuldstændig Indspænding eller en fuldkommen simpel Understøtning.

Da Forholdet imidlertid er det, at de nævnte theoretiske Understøtningsmaader heller ikke forekomme nøjagtigt, hvor plane Plader anvendes i Praxis, skal her anføres Resultaterne af *Bach's* Undersøgelser*), hvorved man faar et ganske godt Begreb om, hvorledes Formlernes Koefficienter variere med Understøtningsmaaden. I det følgende betegner

- h Pladens Tykkelse,
- p en ensformig fordelt Belastning over hele Pladen,
- P en Enkeltkraft i Midten,
- μ, ψ Koefficienter, hvis Værdier udledes af Forsøgene,
- σ_t den tilladelige Paavirkning,
- f Nedbøjningen i Midten.

*) *Elasticität und Festigkeit*, 3te Aufl. 1898, S. 535 o. f.

Bach angiver da for *cirkulære Plader* med Radius r , *ensformig Belastning*:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t &= \mu \cdot \frac{r^2}{h^3} \cdot p, \quad \mu = 0,8 - 1,2; \\ f &= \psi \cdot \frac{pr^4}{Eh^3}, \quad \psi = 0,16 - 0,6; \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

de lavere Værdier gælde, naar Understøtningen nærmer sig til en Indspænding, de højere, naar den nærmer sig til en fuldkommen simpel Understøtning.

Cirkulære Plader, Enkeltkraft i Midten, fordelt over en lille Cirkel med Radius r_0 :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t &= \mu \cdot \frac{3}{\pi} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r_0}{r}\right) \cdot \frac{P}{h^3}, \quad \mu = 1,5; \\ f &= \psi \cdot \frac{Pr}{Eh^3}, \quad \psi = 0,4 - 0,5; \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Værdierne af μ og ψ gælde for simpel Understøtning og for r_0 lille ($< 0,1 \cdot r$); for større Værdier af r_0 aftage Koefficienterne, ψ hurtigere end μ .

Elliptiske Plader med Halvaxerne a og b ($a > b$), *ensformig Belastning*.

$$\sigma_t = \frac{1}{2}\mu \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^4} \cdot \frac{b^2}{h^3} \cdot p, \quad \mu = 0,67 - 1,12. \quad (31)$$

Elliptiske Plader som ovenfor, *Enkeltkraft i Midten*:

$$\sigma_t = \frac{8}{5\pi} \cdot \mu \cdot \frac{8 + 4\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{a}\right)^4}{3 + 2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{a}\right)^4} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{P}{h^3}, \quad \mu = 1,5 - 1,67. \quad (32)$$

Kvadratiske Plader, Sidelængde a , *ensformig Belastning*:

$$\sigma_t = \frac{1}{4}\mu \cdot \frac{a^2}{h^3} \cdot p, \quad \mu = 0,75 - 1,12. \quad (33)$$

Kvadratiske Plader som ovenfor, *Enkeltkraft i Midten*:

$$\sigma_t = \frac{3}{4}\mu \cdot \frac{P}{h^3}, \quad \mu = 1,75 - 2,0. \quad (34)$$

Rektangulære Plader, Sidelængder a og b (a > b), ensformig Belastning:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\mu \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \cdot \frac{b^2}{h^3} \cdot P. \quad (35)$$

Rektangulære Plader, som ovenfor, Enkeltkraft i Midten:

$$\sigma_1 = \frac{3}{2}\mu \cdot \frac{1}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}} \cdot \frac{P}{h^3}. \quad (36)$$

I Mangel af en ved Forsøg bestemt Værdi af μ for rektangulære Plader kan man vel foreløbig bruge de for kvadratiske Plader angivne.

§ 72. Plane Plader, paavirkede til Bøjning og Træk. I den foregaaende § er der ikke i Beregningerne taget Hensyn til den Mulighed, at der langs Randen af Pladen kan virke et radialet Træk, der modarbejder Bøjningen; i *Bach's* empiriske Formler refererer Koefficienten μ 's Variation med Understøtningsmaaden sig i Virkeligheden for en stor Del til det Træk, der nødvendigvis i de fleste Tilfælde maa fremkomme, saaledes som Understøtningen praktisk udføres. Her skal det vises, hvorledes man, ialt Fald tilnærmelsesvis, kan indføre dette Træk i Beregningen, naar Pladen langs Kanten er saa sikkert befæstet, at man virkelig tør regne dermed*).

Vi begynde med at undersøge *en rektangulær plan Plade, der kun er understøttet langs sine to Kanter, altsaa virker som en Bjælke*. For en saadan Plade kunne de sædvanlige Formler for Bøjning og Træk anvendes; naar Pladen imidlertid antages meget bred, maa man dog helst indføre en lille Modifikation af Formlerne. Disse ere nemlig udledede under den Forudsætning, at Materialet, hvis det f. Ex. er paavirket til Træk, frit kan trække sig sammen i Tværretningen, men den Forudsætning holder aabenbart ikke ganske Stik her. Hvis en bred Plade er paavirket af et ensformigt over Bredden fordelt Træk, og vi antage, at der slet ikke kan foregaa nogen

*) Efter *Forchheimer: Die Berechnung ebener und gekrümmter Behälterböden*, Zeitschr. f. Bauwesen, 1894. Ogsaa som Særtryk, Berlin, 1894.

Kontraktion i Retning af Bredden, vil dette for en smal Strimmel af Pladen være ensbetydende med, at der virker et Træk ogsaa i Tværretningen, netop stort nok til at hindre Kontraktionen. Naar den omtalte Strimmel er paavirket af en Spænding σ i Længderetningen, maa der, for at ophæve Kontraktionen, i Tværretningen virke en Spænding $\frac{1}{m} \sigma$, og sidstnævnte Spænding maa formindske Forlængelsen i Længderetningen. I Stedet for en Forlængelse $\epsilon = \sigma : E$ faar man kun:

$$\frac{\sigma}{E} - \frac{1}{m} \cdot \frac{m \sigma}{E} = \frac{\sigma}{E} \left(1 - \frac{1}{m}\right) = \frac{\sigma}{E'},$$

hvor

$$E' = \frac{E}{1 - \frac{1}{m}} \approx E \left(1 + \frac{1}{m}\right);$$

hvis man altsaa af en given Forlængelse ϵ vil beregne den tilsvarende Spænding σ eller omvendt efter de sædvanlige Formler, maa man bruge Værdien E' af Elasticitetskoefficienten. Ganske det samme gælder for Bøjning; ved Beregning af Nedbøjningen skal bruges Elasticitetskoefficienten E' .

For den omtalte Plade, der er simpelt understøttet langs to Kanter og paavirket til Bøjning af en given Belastning, kunde man nu direkte anvende Ligning (37) i § 66, hvis man blot kendte den Kraft, der virker til direkte Træk. Pladen paavirkes imidlertid slet ikke til Træk af nogen given Kraft; Trækket fremkommer kun derved, at Pladen for at kunne bøje sig ned maa antage en lidt større Længde, idet der ikke kan finde nogen Glidning Sted ved Understøtningerne: Trækets Størrelse svarer altsaa til en Forlængelse, der er lig Differensen mellem Buelængde og Korde for den neutrale Linie. En exact Løsning af Opgaven er meget besværlig, saa vi skulle her nøjes med en Tilnærmelse.

Naar Pladen har bøjet sig noget ned, kan man tænke sig, at den bærer en Del af Belastningen, idet den virker som Bjælke, en Del, idet den virker som Kæde. *Belastningen antages ensformig fordelt, p pr. Arealenhed; Brøkdelen $\alpha \cdot p$ bæres af Bjælken, $1 - \alpha \cdot p$ af Kæden; Afstanden mellem Understøtningerne er l , Pladens Tykkelse h , og vi betragte en Strimmel*

med Bredde 1. Nedbøjningen af Bjælken i Midten er (§ 28):

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{apl^4}{E'I} = \frac{5}{32} \cdot \frac{apl^4}{E' \cdot h^3}; \quad (37)$$

Horizontalkomponenten S af Spændingen i en Kæde med Belastning $(1 - \alpha) \cdot p$ pr. Længdeenhed og med Pilhøjde f er [se S. 16 eller § 70, Ligning (10)]:

$$S = \frac{(1 - \alpha) \cdot pl^2}{8 \cdot f}. \quad (38)$$

Endvidere er:

$$S = \frac{s - l}{l} \cdot E' \cdot h,$$

hvor $s - l$ betegner Differensen mellem Buelængde og Korde, h den betragtede Strimmels Tværsnit. Differensen $s - l$ kan nøjagtigt nok findes ved at betragte Buen som en Parabel, i hvilket Tilfælde man har*):

$$s - l = \frac{8}{3} \cdot \frac{f^2}{l},$$

altsaa:

$$S = \frac{8}{3} \cdot \frac{f^2}{l^2} \cdot E' \cdot h. \quad (39)$$

Af de tre Ligninger (37), (38) og (39) kunne α og f elimineres, hvorefter S kan bestemmes. (37) og (38) give:

$$S = \frac{pl^2}{8f} - \frac{4}{5} \cdot \frac{E'h^3}{l^2},$$

og ved Kombination heraf med (39) faas:

$$f^3 + \frac{3}{16} h^3 f = \frac{3}{64} \cdot \frac{pl^4}{E' \cdot h}. \quad (40)$$

*) Parablens Ligning, med Begyndelsespunkt i Toppunktet, er:

$$y = \frac{4f}{l^2} x^2,$$

hvoraf:

$$s = 2 \int_0^{\frac{1}{2}l} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}l} \sqrt{1 + 64 \frac{f^2}{l^4} \cdot x^2} \cdot dx,$$

og ved Rækkeudvikling, idet kun de to første Led medtages:

$$s = l + \frac{8}{3} \cdot \frac{f^2}{l}.$$

Heraf finder man lettest f ved at prøve sig frem, hvorefter α beregnes af (37), S af (38); og nu bestemmes endelig største Spænding ved at addere den direkte Trækspænding $S:h$ til Spændingen fra Momentet $\frac{1}{8} \cdot \alpha p \cdot l^2$, altsaa:

$$\sigma_{\max.} = \frac{S}{h} + \frac{3}{4} \frac{\alpha p l^2}{h^2}. \quad (41).$$

Man skal her naturligvis ikke bruge Ligning (37) i § 66, da S netop er bestemt ved Hjælp af Nedbøjningen.

Exempel. En 1^{cm.} tyk Jærnplade er understøttet langs sine to Kanter i 1^{m.} Afstand og paavirket af et Tryk paa 0,2 kg./cm.².

Idet E' sættes lig 2200000 kg./cm.², bliver (40) til:

$$f^3 + 0,3f = 0,426,$$

hvoraf $f = 0,621$ cm. (37) giver nu $\alpha = 0,437$ og (38) endelig $S = 227$ kg. Største Spænding er:

$$\frac{227}{1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{0,437 \cdot 0,2 \cdot 100^2}{1^2} = 227 + 656 = 883 \text{ kg./cm.}^2$$

Paa ganske analog Maade løses Opgaven, naar der er Tale om en *cirkulær Plade, der understøttes langs hele Omkredsen* og er ensformig belastet med p pr. Arealenhed. Den neutrale Flade for Pladen efter Nedbøjningen kan tilnærmelsesvis betragtes som et Stykke af en Kugleflade, og i en saadan, der normalt paa sin Overflade er paavirket af et Tryk q pr. Arealenhed, hersker der i alle Retninger Spændingen $\frac{q \cdot r_0}{2h}$, hvor r_0 betegner Kuglens Radius, h Pladetykkelsen*).

Man tænker sig nu ligesom ovenfor, at Brøkdelen $\alpha \cdot p$ af Belastningen virker til Bøjning, Resten, $(1 - \alpha)p$, til direkte

*. Man indser let, at Kuglefladen maa være Ligevægtsform for den nævnte Belastning, og at Spændingerne i alle Punkter maa være lige store. Naar man lægger et Diametralsnit i en hel Kugle, der indvendig er paavirket af Trykket q , maa Trykket paa Diametralplanen holde Lige vægt mod Spændingerne i hele Snittet, altsaa:

$$q \cdot \pi r_0^2 = 2\pi r_0 \cdot h \cdot \sigma, \quad \sigma = \frac{q r_0}{2h}.$$

Træk efter Formlen ovenfor. Efter Formel (25) i forrige Paragraf har man da, idet r_1 er Pladens Radius:

$$f = 0,74 \cdot \frac{\alpha p r_1^4}{E \cdot h^3} \quad (42).$$

Idet man endvidere nøjagtigt nok kan sætte Kuglefladens Radius $r_0 = \frac{r_1^2}{2f}$, har man for den direkte Trækspænding i Kuglen:

$$\sigma = \frac{(1 - \alpha) p r_1^2}{4 h f} \quad (43).$$

Differensen mellem Buelængde og Korde for et Diametral-snit i den bøjede Plade kan ligesom ovenfor regnes til:

$$s - 2r_1 = \frac{8}{3} \frac{f^2}{l} = \frac{4}{3} \frac{f^2}{r_1}.$$

Naar man betragter en Strimmel af Bredde 1 langs en Diameter i Pladen, faar den en Forlængelse pr. Længdeenhed $\frac{s - 2r_1}{2r_1}$ i begge Retninger; dertil maa svare en Spænding σ i Strimlens Længderetning, givet ved

$$\frac{\sigma}{E} - \frac{\sigma}{m \cdot E} = \frac{s - 2r_1}{2r_1},$$

altsaa:

$$\sigma = \frac{E}{1 - \frac{1}{m}} \cdot \frac{2}{3} \frac{f^2}{r_1^2} \quad (44).$$

Af Ligningerne (42), (43) og (44) kan α , f og σ bestemmes; af de to første findes ved Elimination af α :

$$\sigma = \frac{p r_1^2}{4 h f} - \frac{E h^2}{2,96 \cdot r_1^2},$$

og ved Kombination heraf med (44), idet $m = 4$:

$$f^3 + 0,38 h^2 f = 0,28 \cdot \frac{p r_1^4}{E h} \quad (45).$$

Naar f er bestemt herved, findes α og σ af (42) og (43).
og nu haves den resulterende Spænding

$$\sigma_{\max.} = \sigma + 0,91 \cdot \alpha p \frac{r_1^2}{h^3}, \quad (46)$$

hvor sidste Led er taget fra Ligning (24) i forrige Paragraf.
Den her kun for plane Plader viste Behandlingsmaade kan ogsaa anvendes paa oprindelig krumme Flader — Kugleflader, Kegleflader o. l. — men desangaaende maa en Henviisning til Forchheimers ovenfor citerede Arbejde være tilstrækkelig.
Beregninger som de her meddelte kan der blive Brug for til Vandbeholdere o. l.

TRYKFEIL.

Side	3,	Linie	10 f. o.:	AD , læs AD .
—	6,	—	8 f. n.:	ab , læs ab'
—	10,	—	6 f. o.:	Pl. 2, læs Pl. 2)
—	15,	—	3 f. n.:	lastingen, læs lastningen.
—	21,	—	12 f. o.:	$1' - 2'$, læs $\overline{1' - 2'}$.
—	22,	—	3 f. o.:	F , læs F_1 .
—	24,	—	2 f. n.:	indeler, læs inddeler.
—	30,	—	9 f. n.:	I_y , læs I_y' .
—	31,	—	8 f. n.:	XY' , læs $X'Y'$.
—	48,	—	6 f. o.:	λ^1 , læs λ_1 .
—	63,	—	6 f. o.:	Udtryk, læs Udtryk.
—	85,	—	7 f. n.:	$\frac{l}{6EI}$, læs $\frac{1}{6EI}$.
—	134,	—	10 f. n.:	RoO_2 , læs RoO_0 .
—	137,	—	2 f. n.:	n , hvor, læs n), hvor.
—	148,	—	2 f. o.:	E , læs E_1 .
—	213,	—	18 f. o.:	derover brødes, læs derover, brødes.
—	227,	—	1 f. n.:	Watertown, læs Watertown.
—	259,	—	6 f. o.:	de, læs der.
—	310,	—	14 f. o.:	e, læs de.

I Fig. 49, Pl. 5, er glemt Bogstavet O ved Midtpunktet.

I Fig. 94, Pl. 9, er glemt den vandrette Tyngdepunktsaxe.

TEGNINGER
TIL
TEKNISK ELASTICITETSLÆRE
AF
A. OSTENFELD.

Fig. 1.

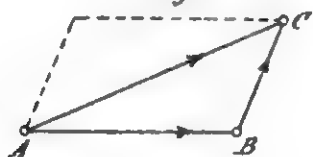


Fig. 2.

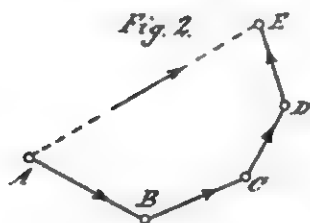


Fig. 3.

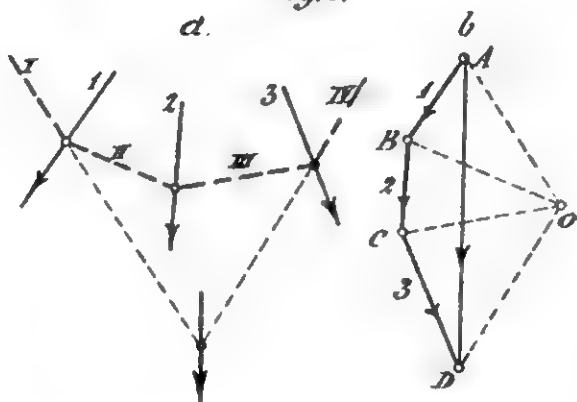


Fig. 4.

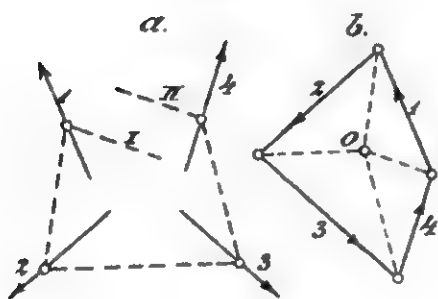


Fig. 5.

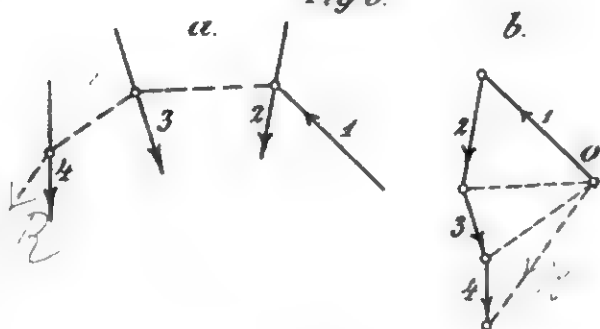


Fig. 6.

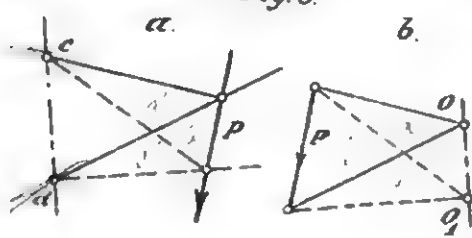


Fig. 7.

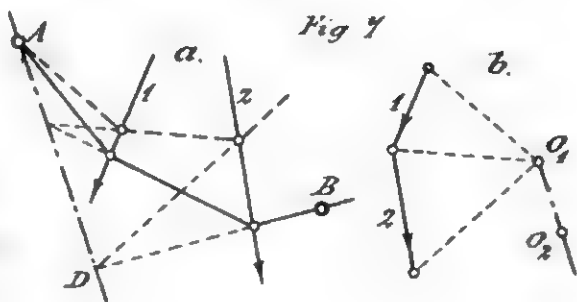


Fig. 8.

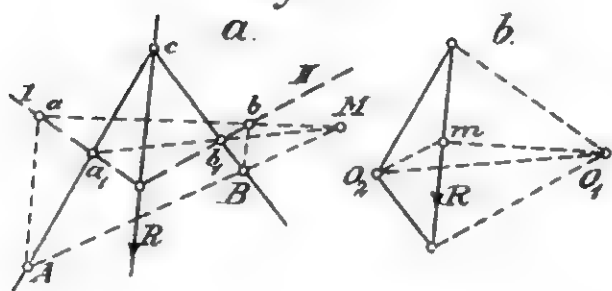
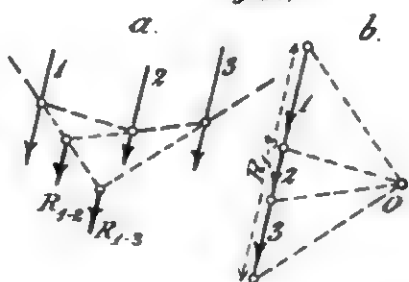


Fig. 10.



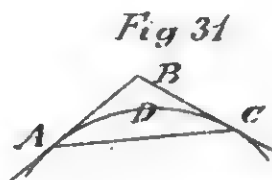
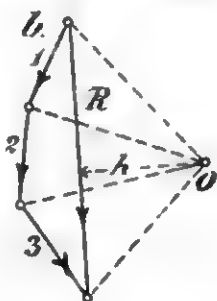
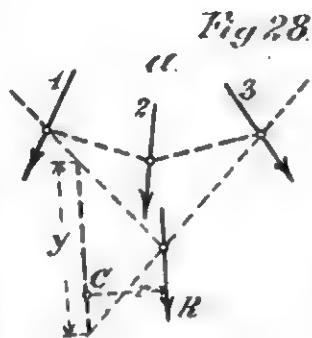
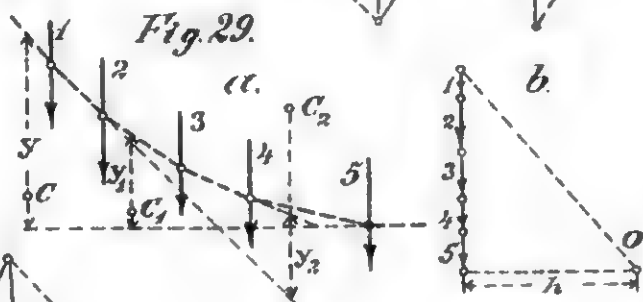
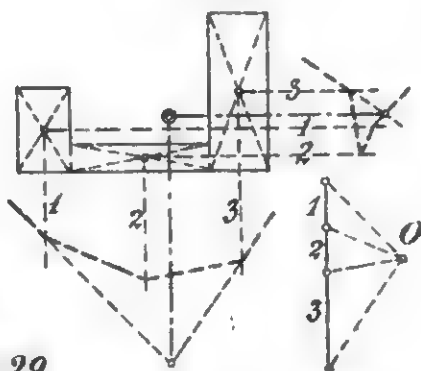
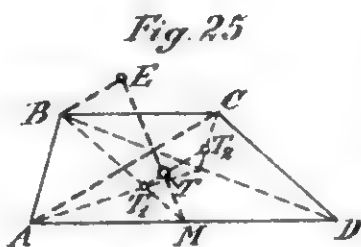
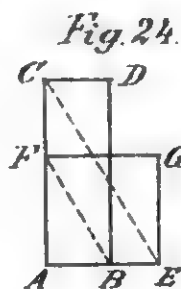
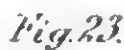
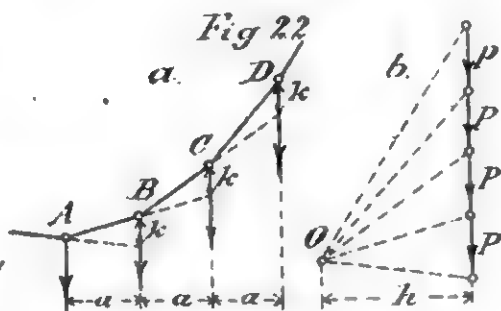
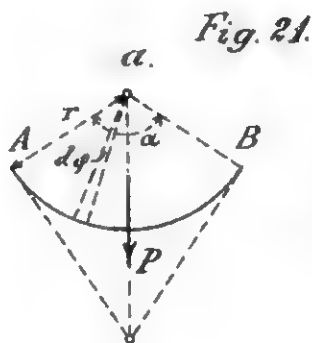
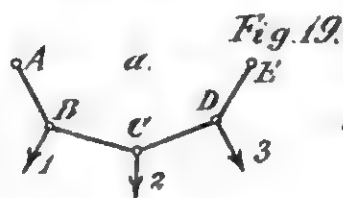
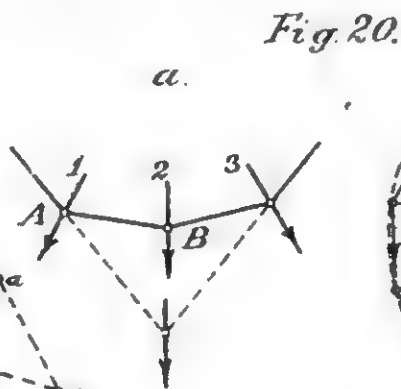
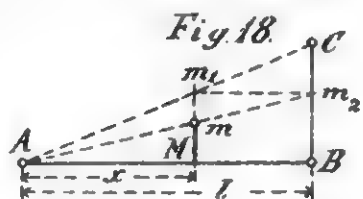


Fig. 26.

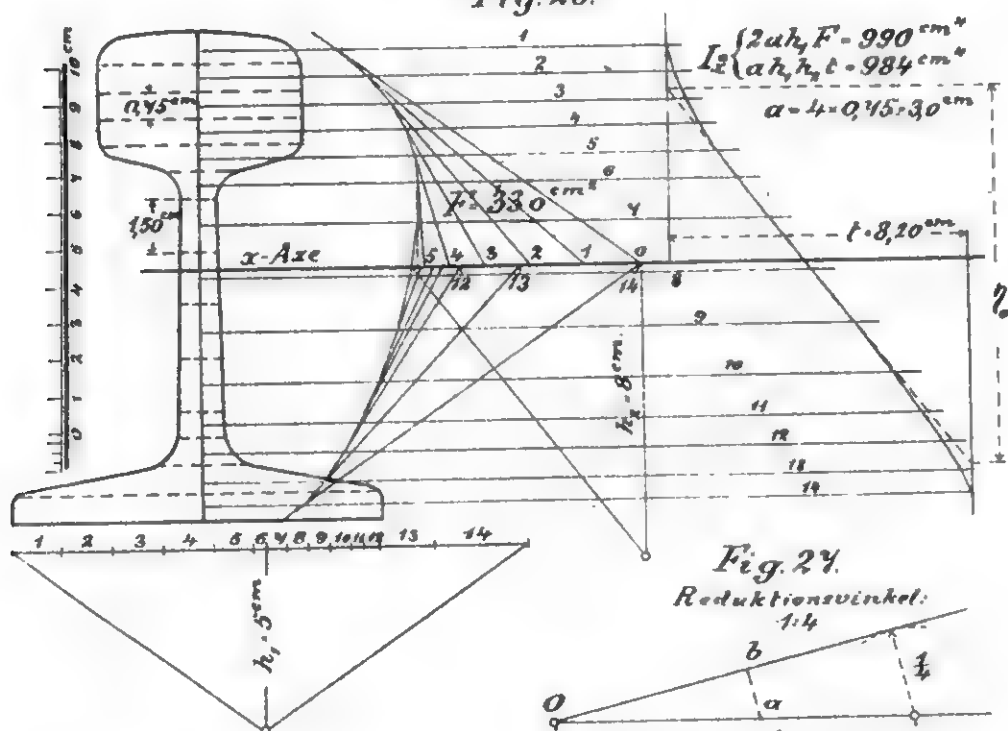


Fig. 24.
Reduktionswinkel:
1:4

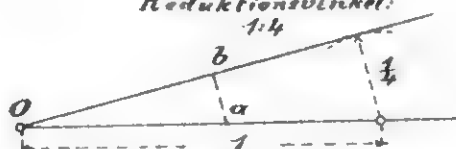


Fig 35.

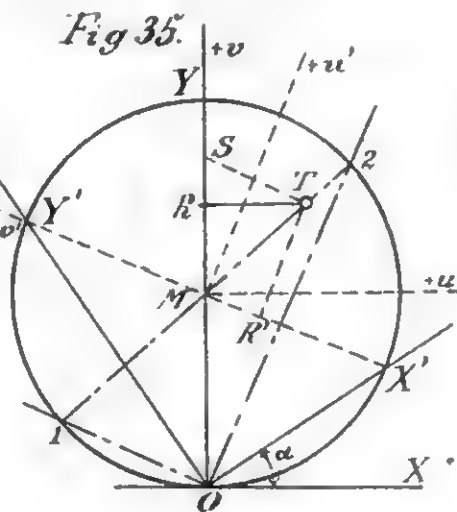


Fig. 34

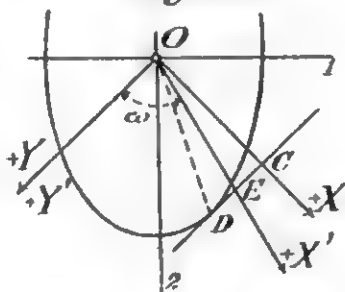


Fig. 32.

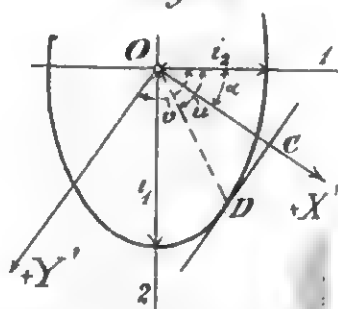


Fig 33

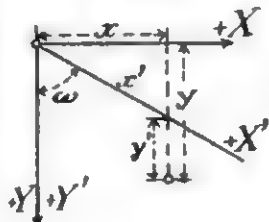


Fig. 26.

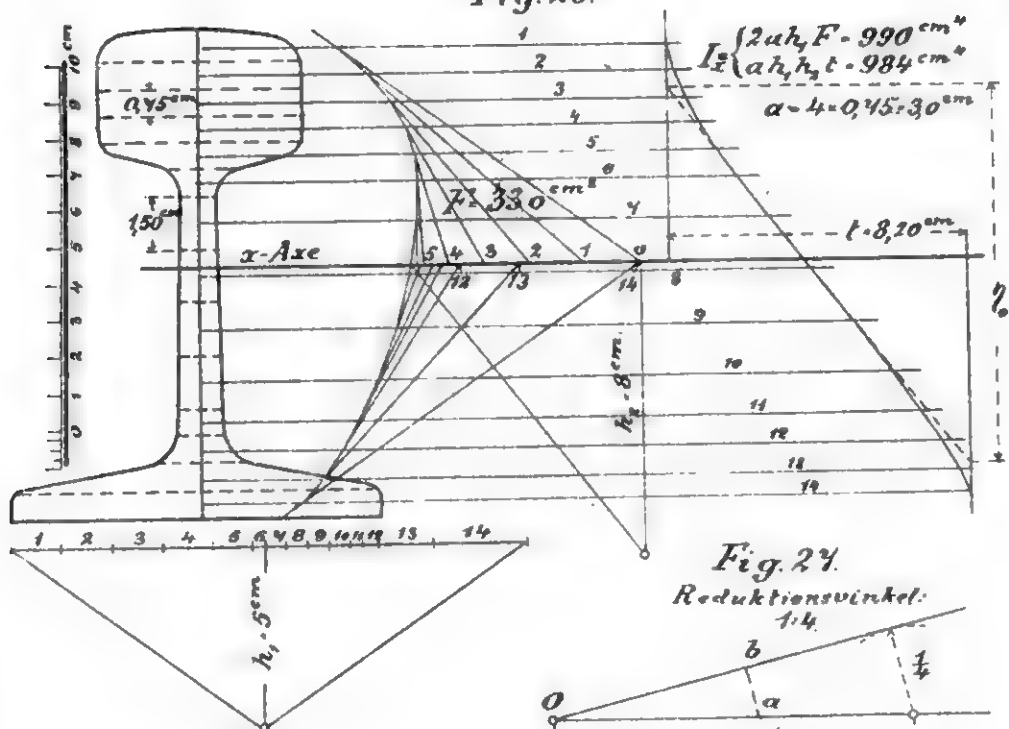


Fig. 27.

Reduktionswinkel:
1:4

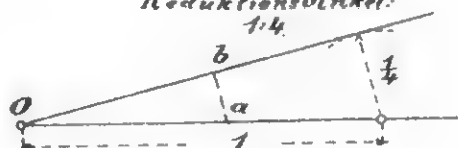


Fig. 35.

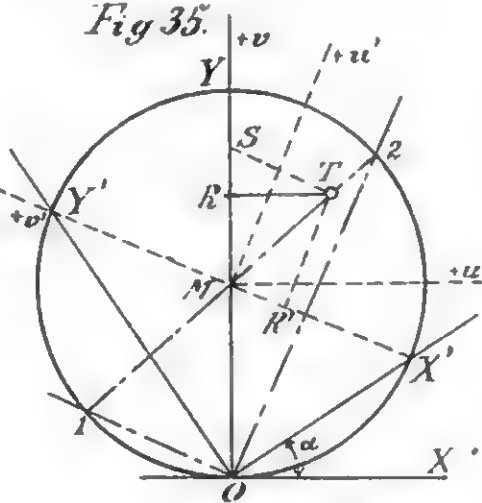


Fig. 34.

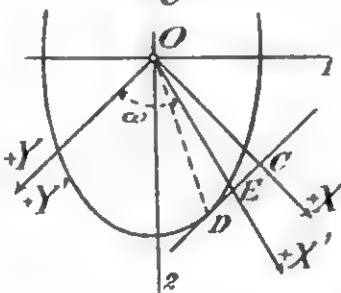


Fig. 32.

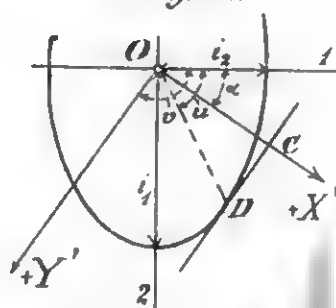


Fig. 33.

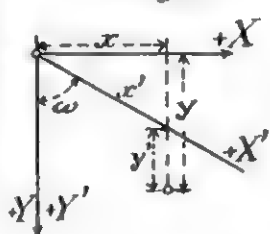


Fig. 26.

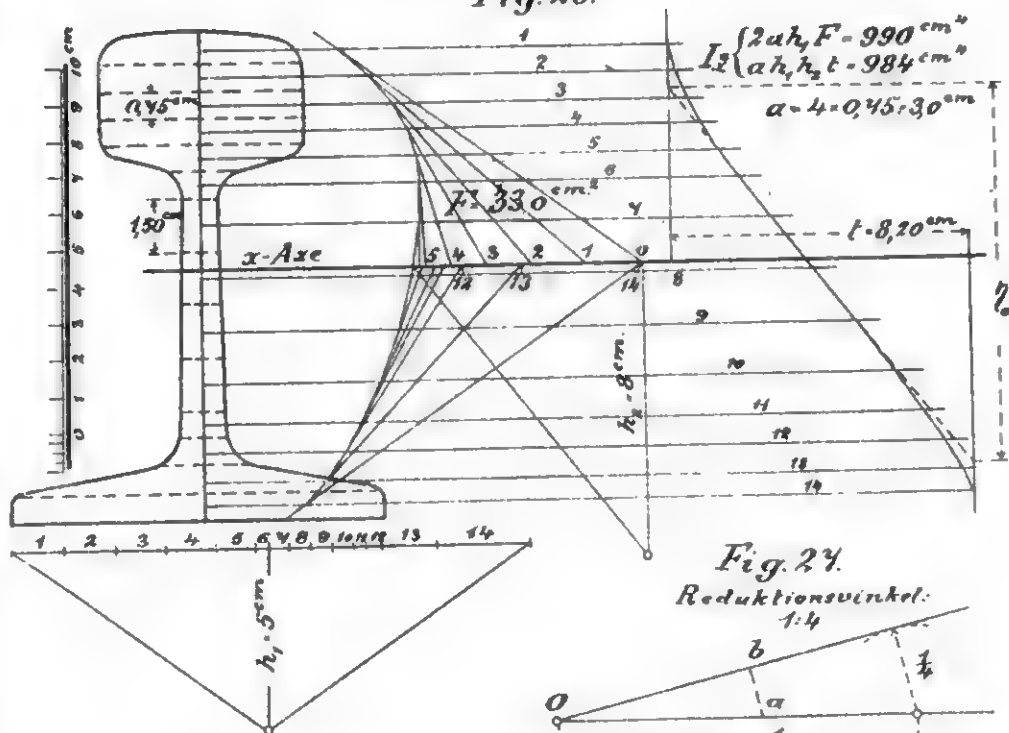


Fig. 24.
Reduktionswinkel:
1:4

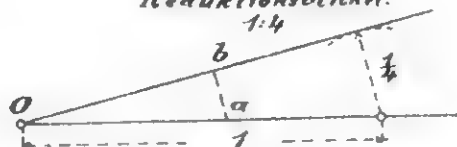


Fig. 35.

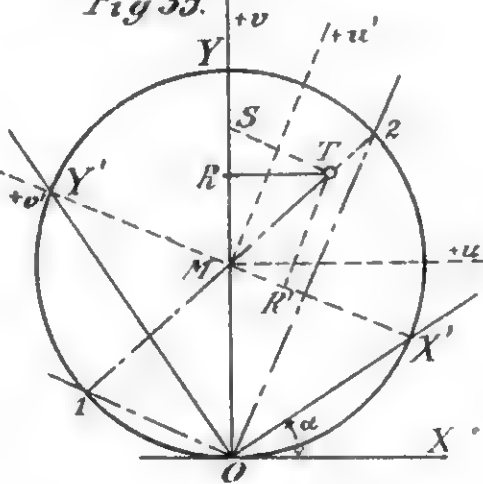


Fig. 34

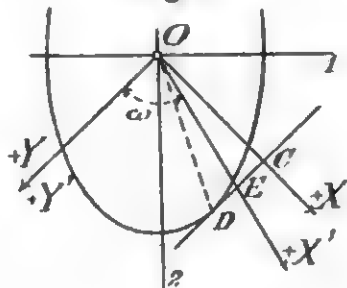


Fig. 32.

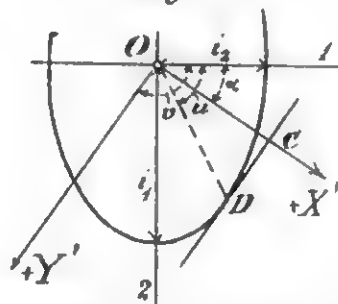


Fig. 33

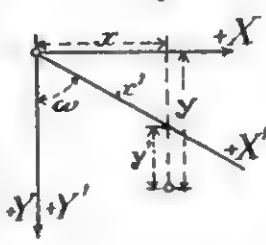


Fig. 36.

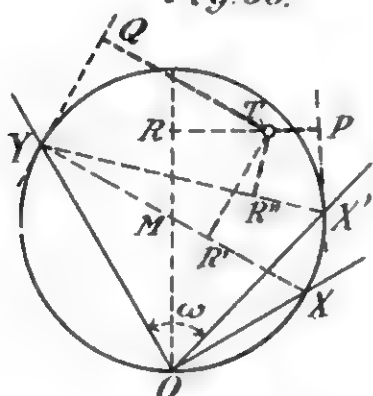


Fig. 37.

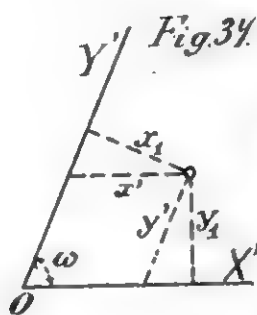


Fig. 38.

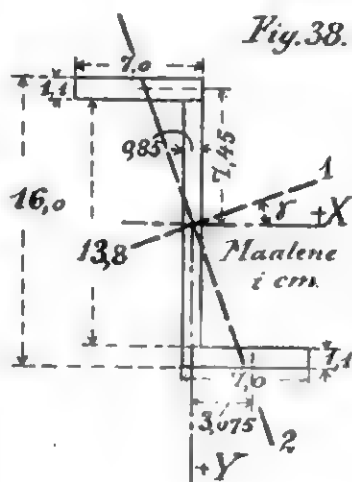


Fig. 39.

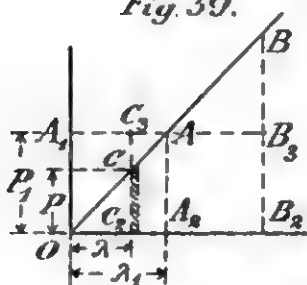


Fig. 41.

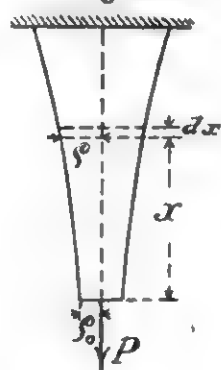


Fig. 40.

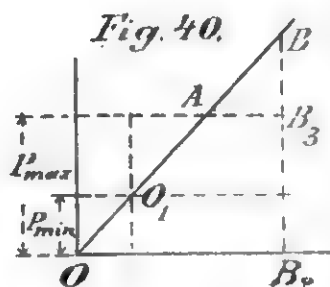


Fig. 42.

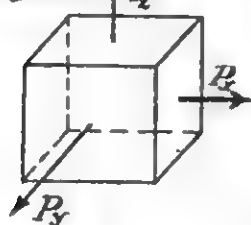


Fig. 44.

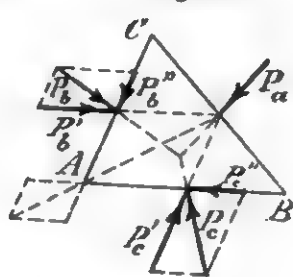


Fig. 43.

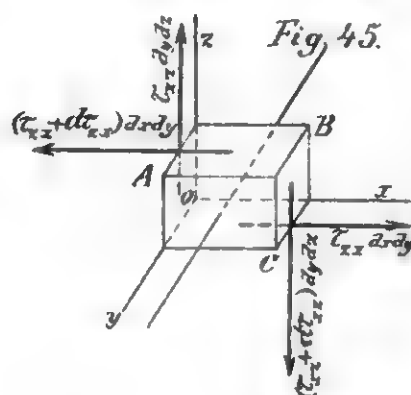
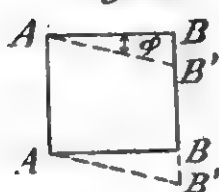


Fig. 48.

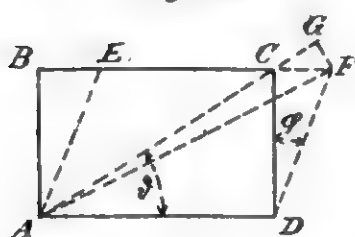


Fig. 46.

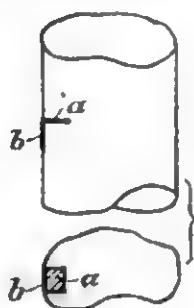
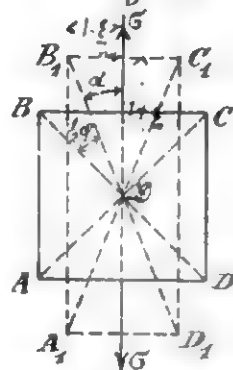


Fig. 47.



Fig. 49.



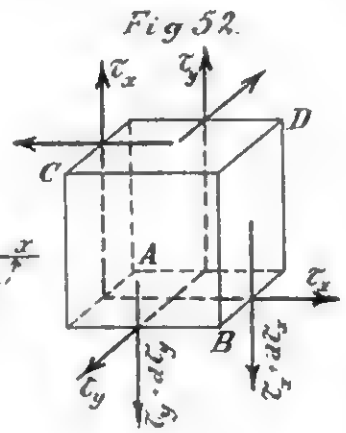
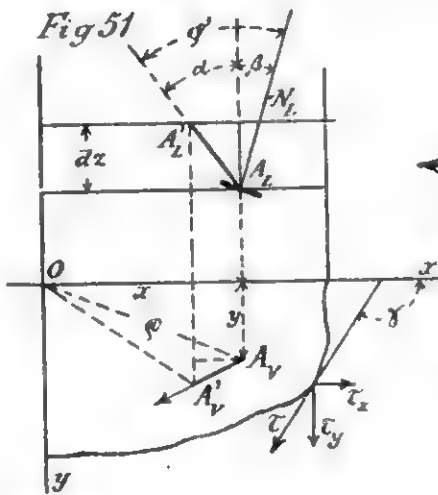
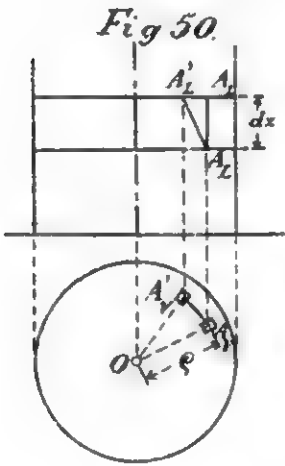


Fig. 53.

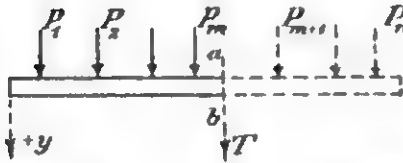


Fig. 55.

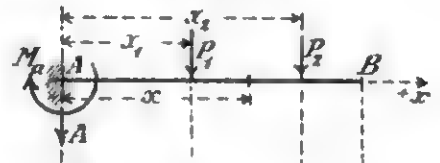


Fig. 54.

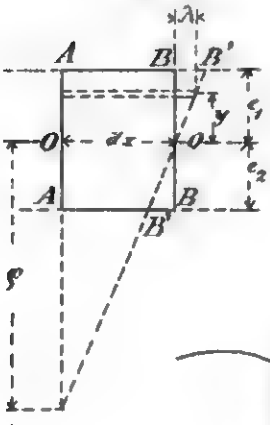


Fig 58.

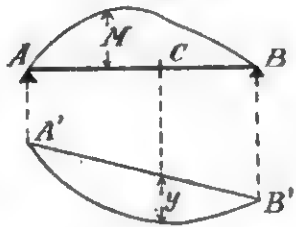


Fig. 56.

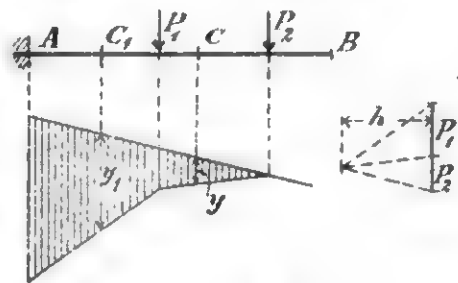


Fig 57.

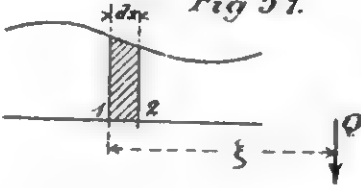


Fig. 59.

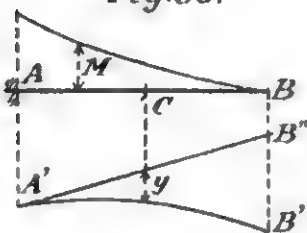


Fig. 61.

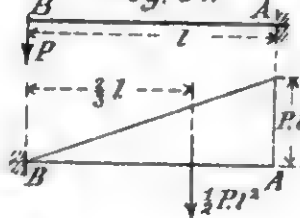


Fig. 62

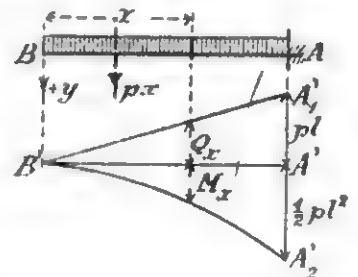


Fig. 60.

Langder: 1:200.

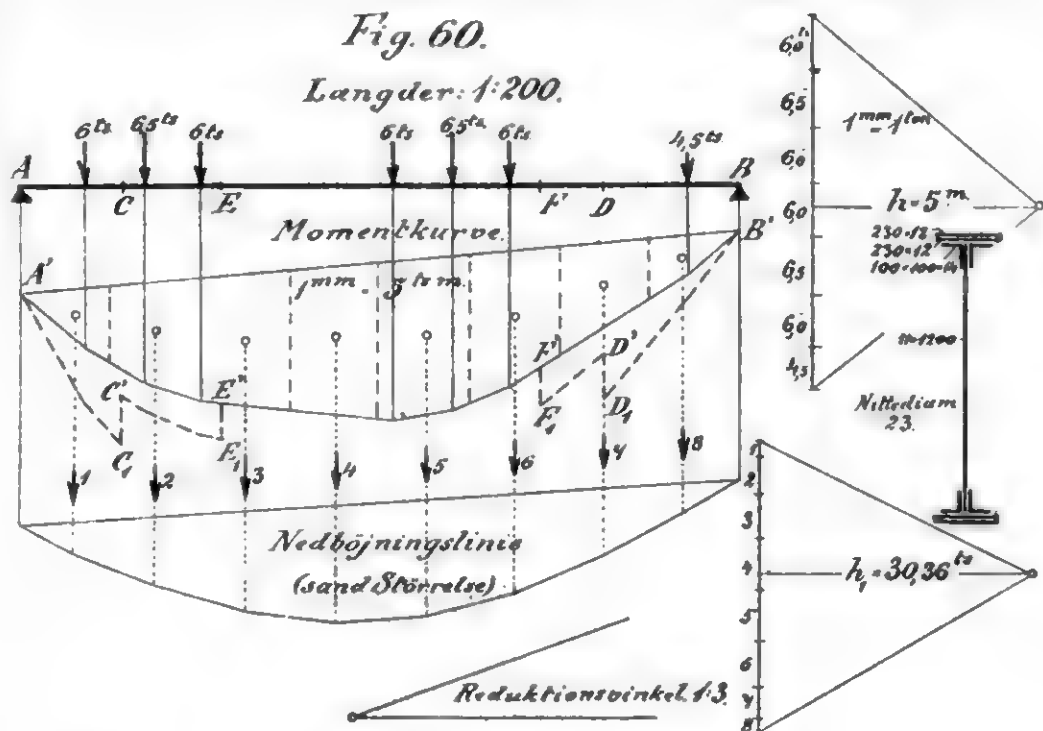


Fig 6.

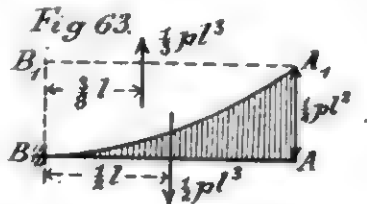


Fig. 64.

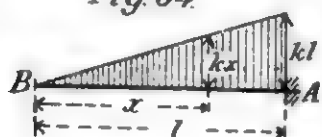


Fig. 65.

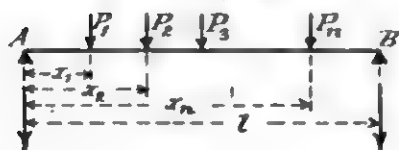


Fig. 40.

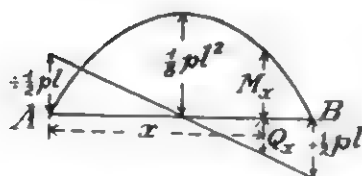


Fig. 66.

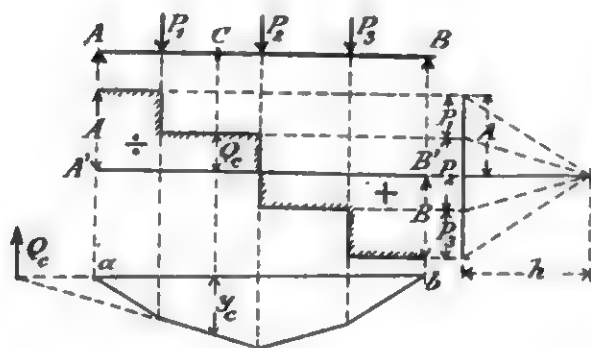


Fig. 69.

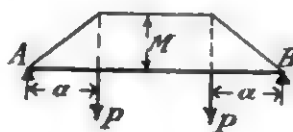


Fig. 64.

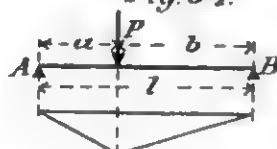


Fig. 41.

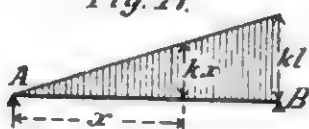


Fig. 68.

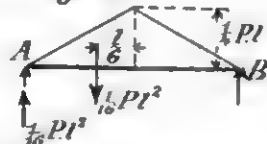


Fig. 42.

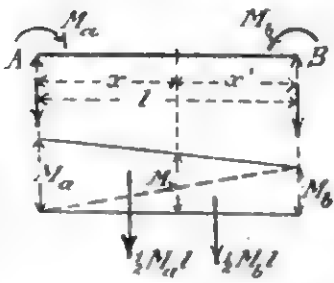


Fig. 43.

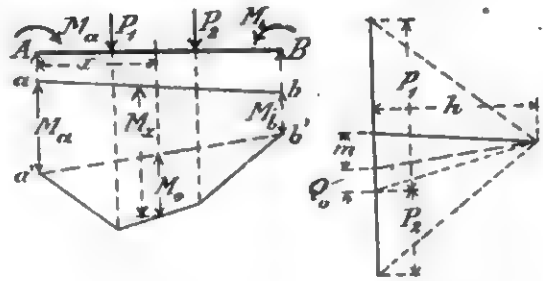


Fig. 45.

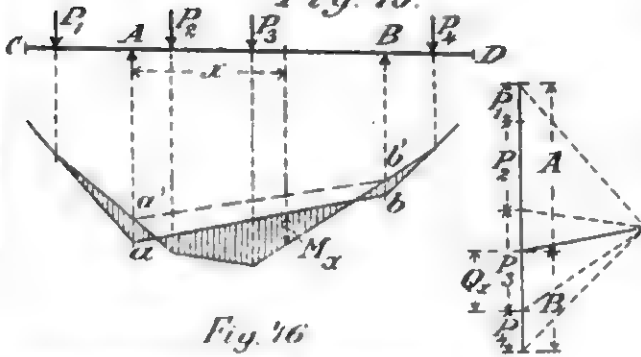


Fig. 44.

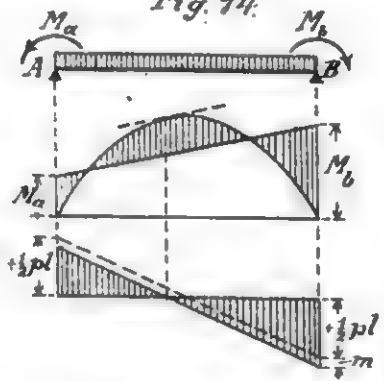


Fig. 46.

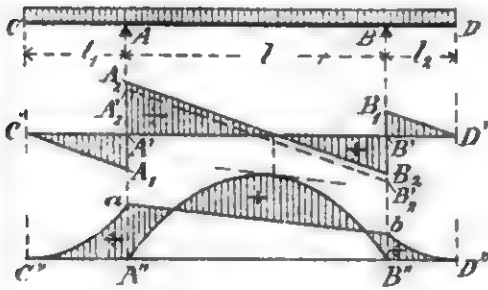


Fig. 49.

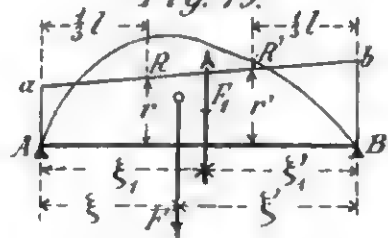


Fig. 44.



Fig. 48.

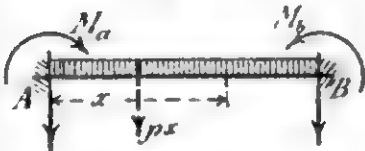


Fig. 80.



Fig. 82.

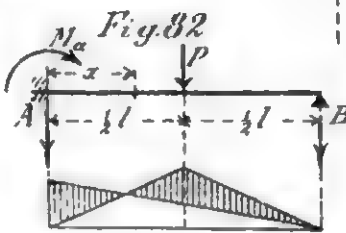


Fig. 81.

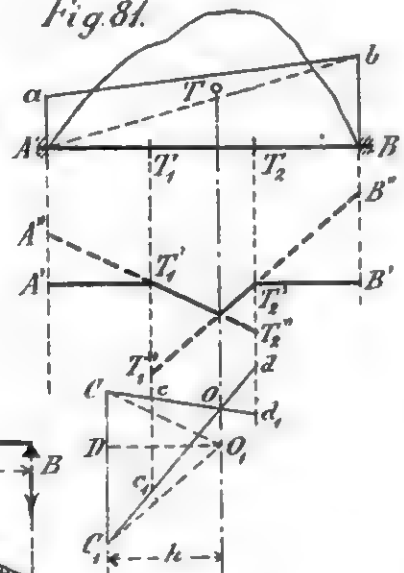


Fig. 83.

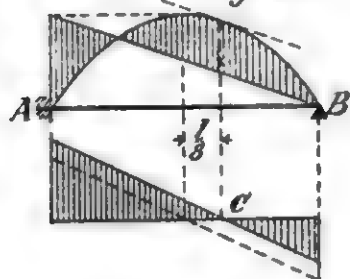


Fig. 85

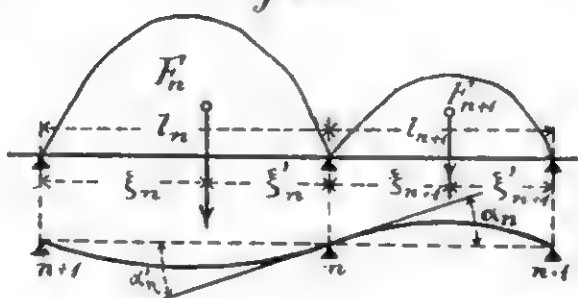


Fig. 84.

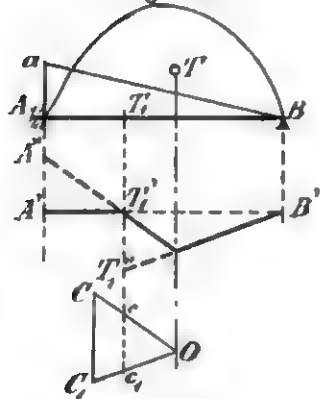


Fig. 86.

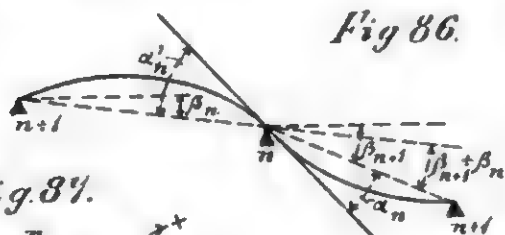


Fig. 87.

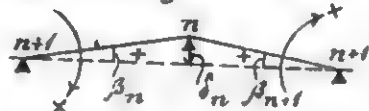


Fig. 88.

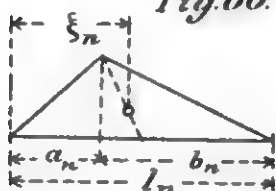


Fig. 89.

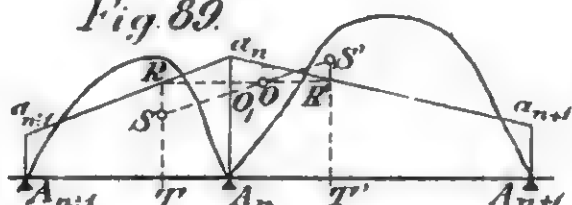


Fig. 93.

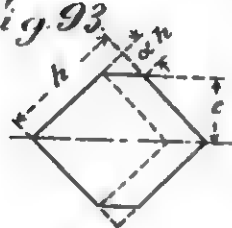


Fig. 94.

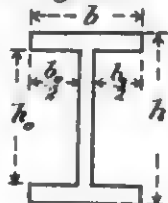


Fig. 91.

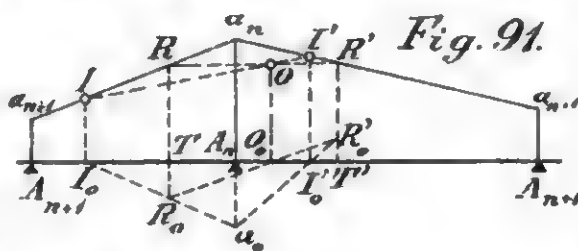


Fig. 90.

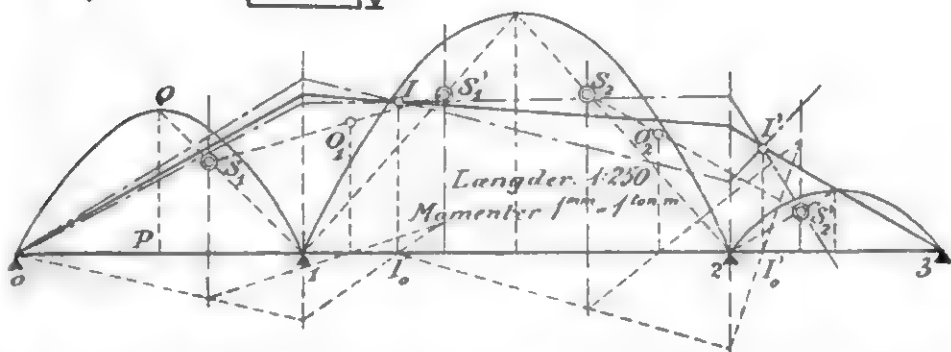


Fig 92.

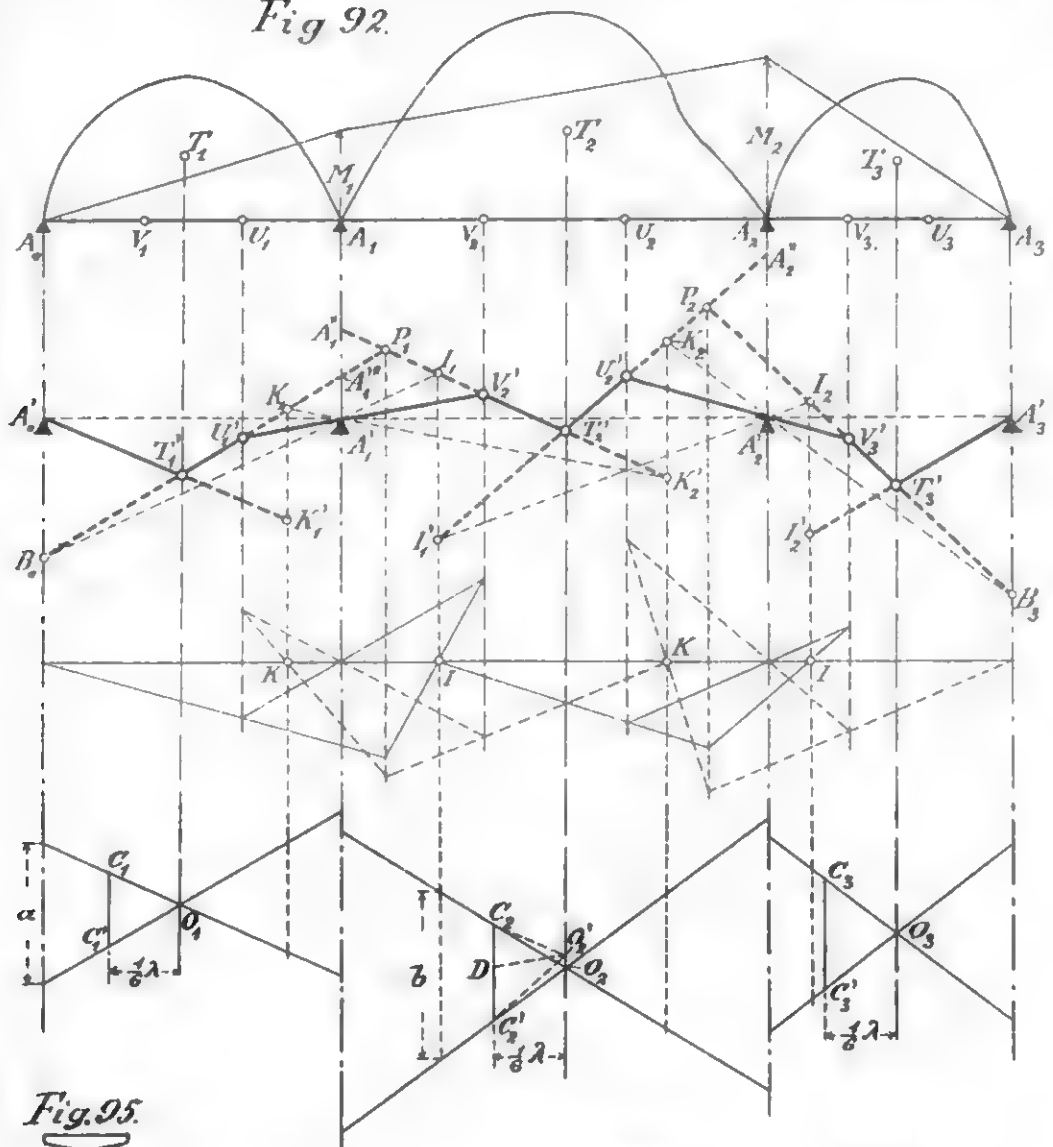


Fig.95.



Fig 94.

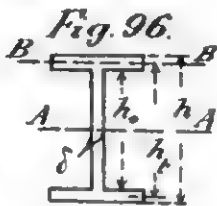


Fig 98.



Fig.102. a.

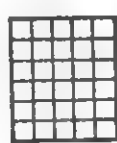


Fig.103.

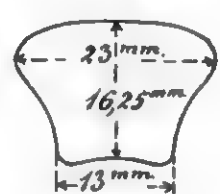


Fig 99.

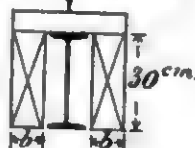
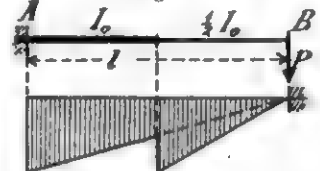


Fig 104.



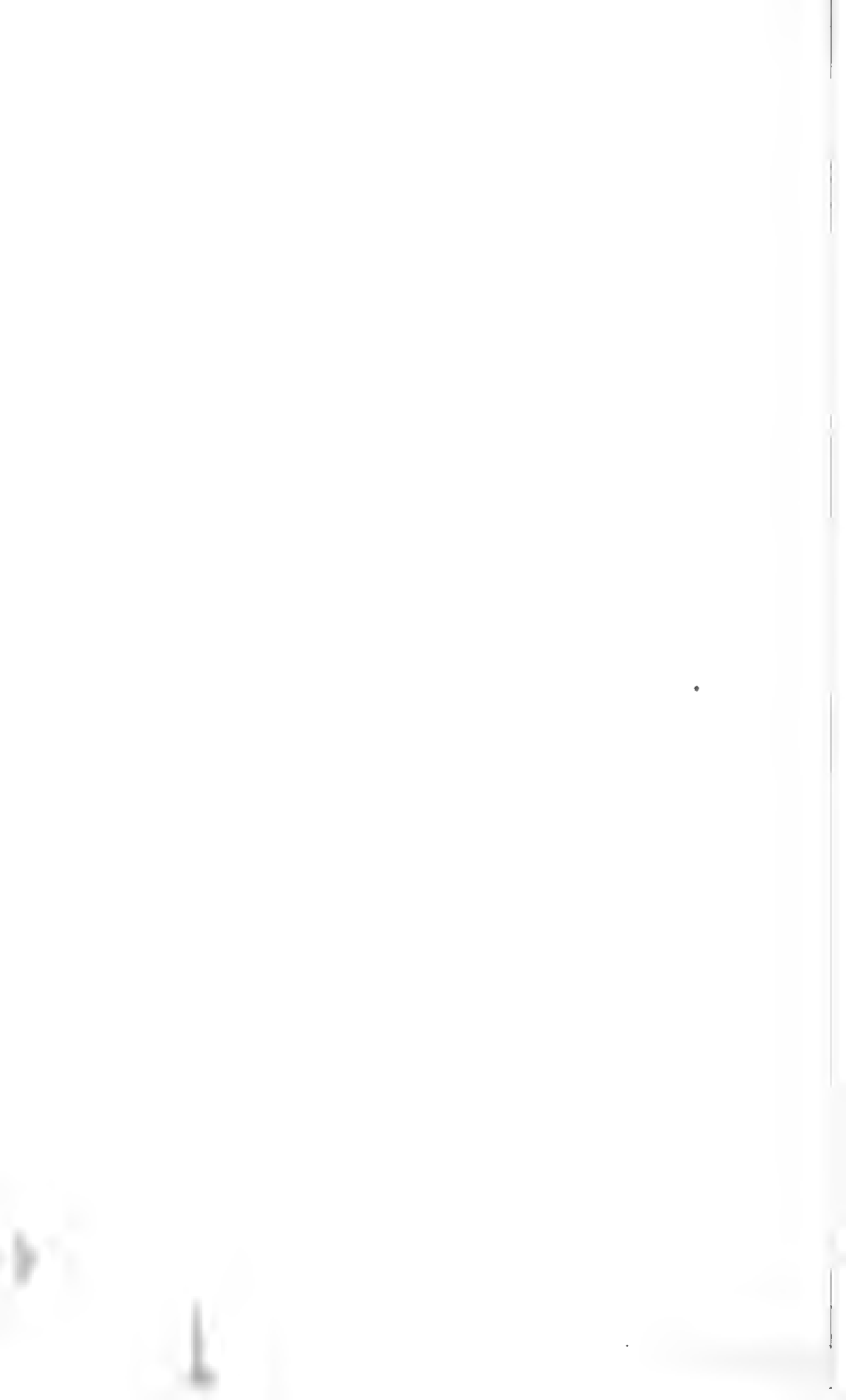


Fig 100.

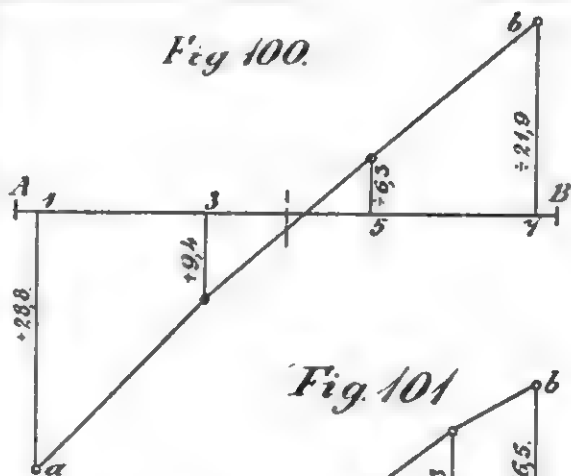


Fig 101

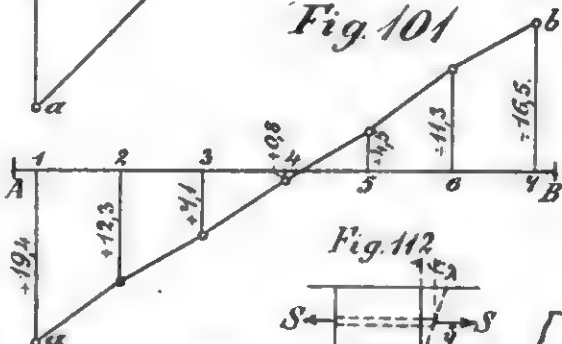


Fig. 110.

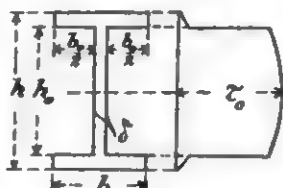


Fig. 108.

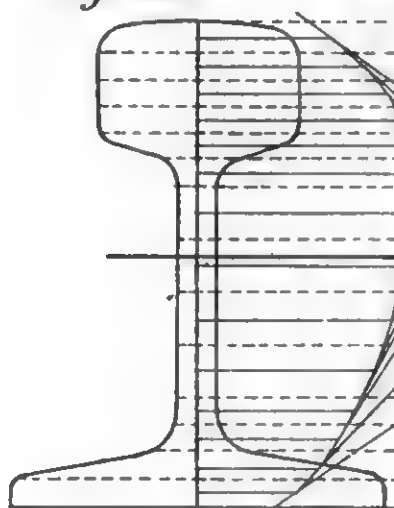


Fig. 112

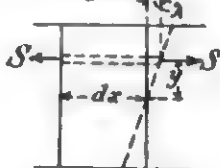


Fig. 109.

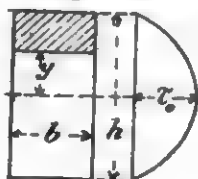


Fig. 105.

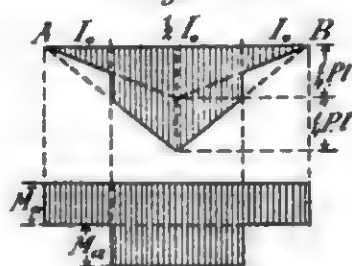


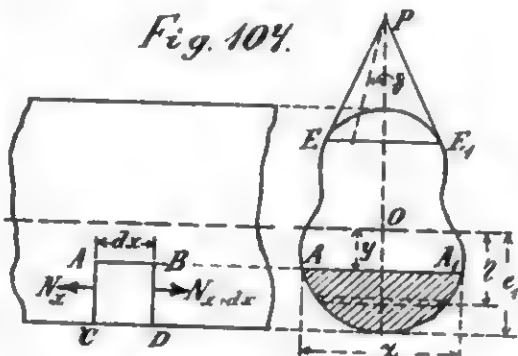
Fig. 106

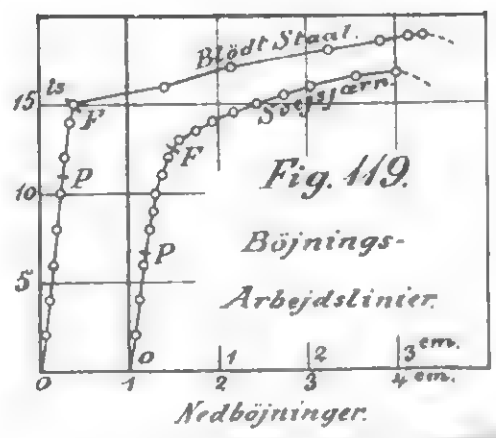
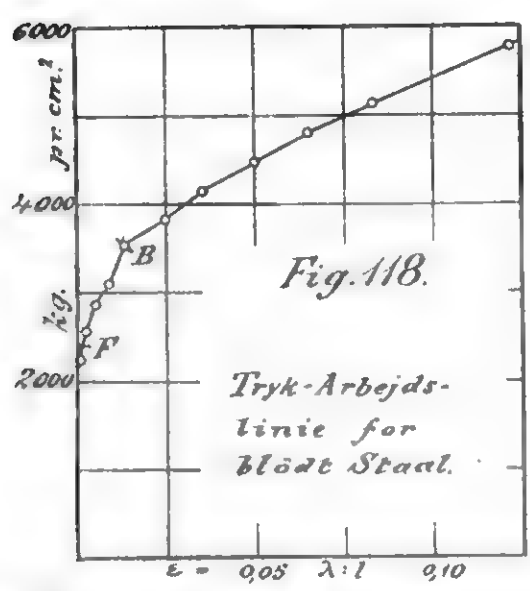
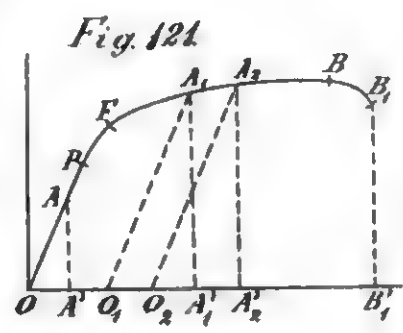
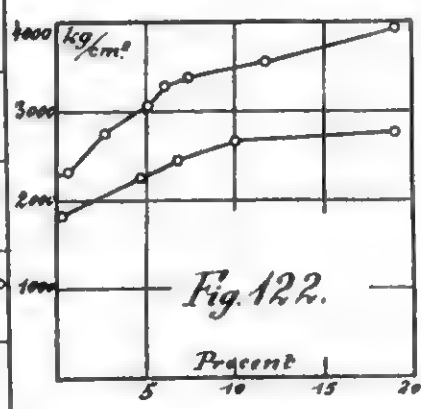
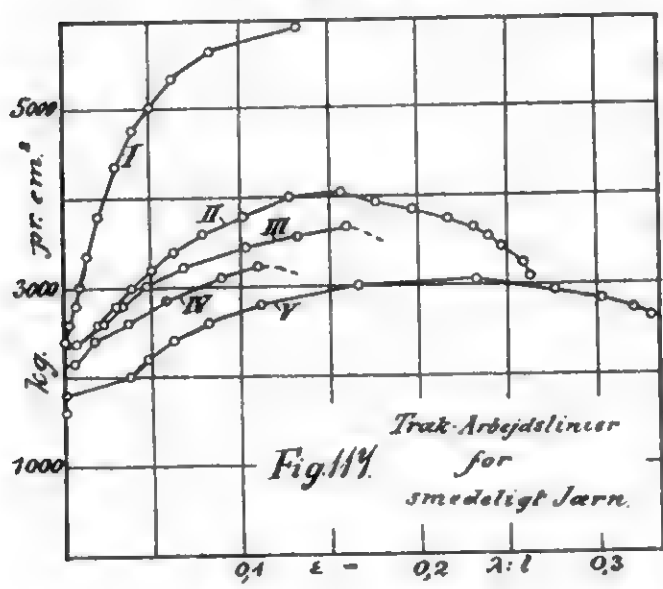
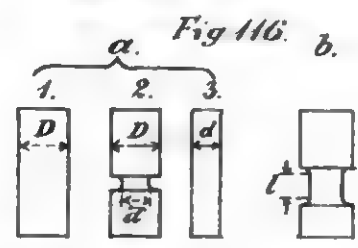
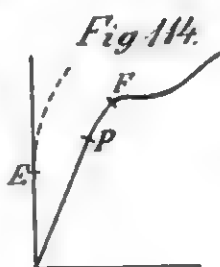
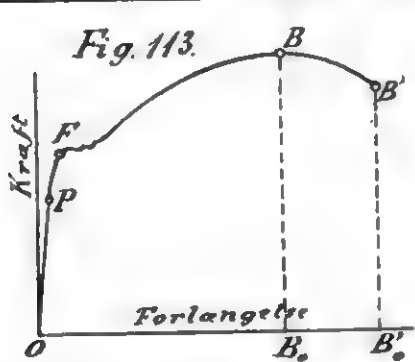


Fig. 111.



Fig. 104.





15 kg. m.

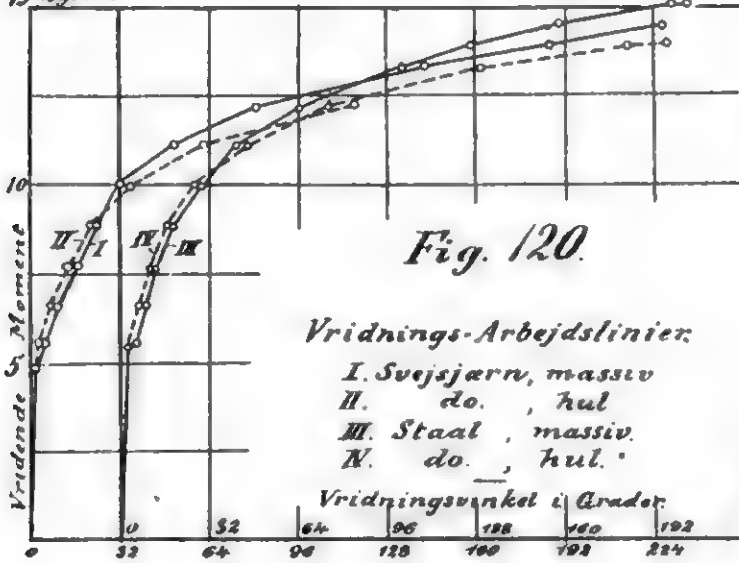


Fig. 124.

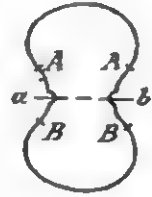


Fig. 128.



Fig. 124.

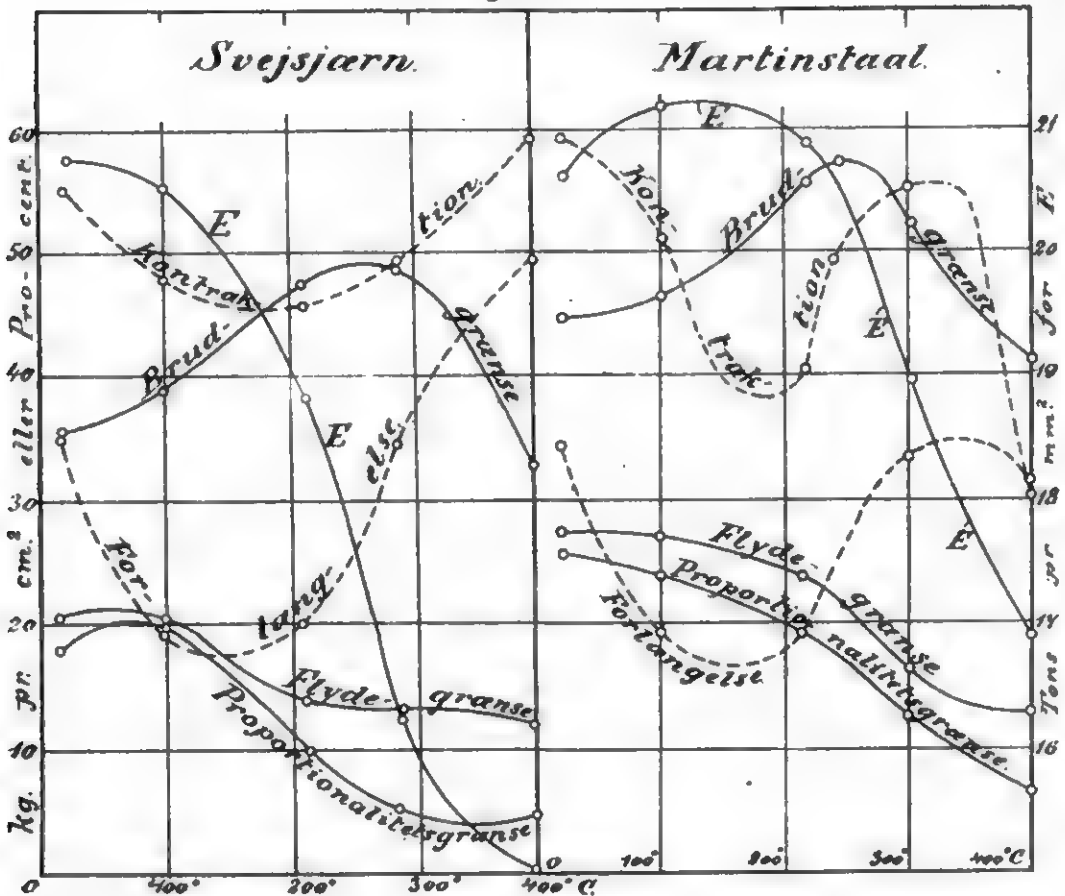


Fig. 123.

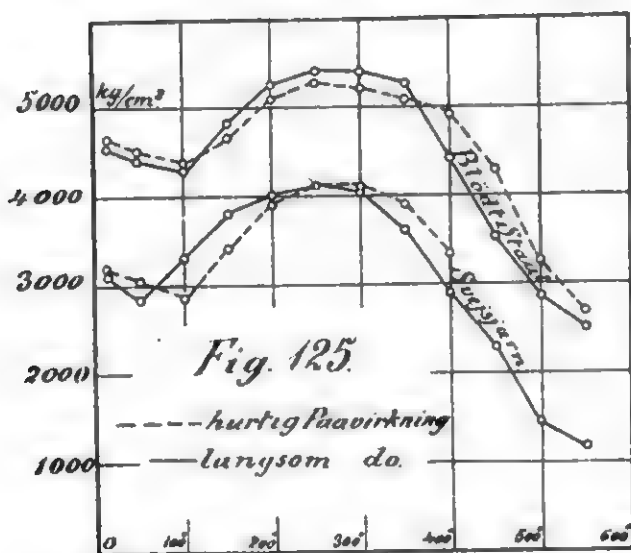
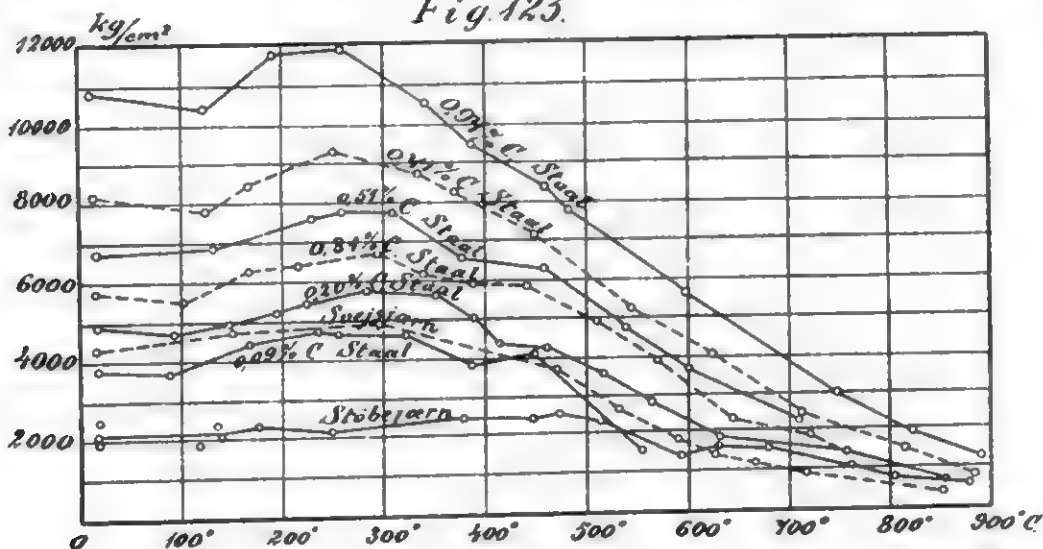


Fig. 125.

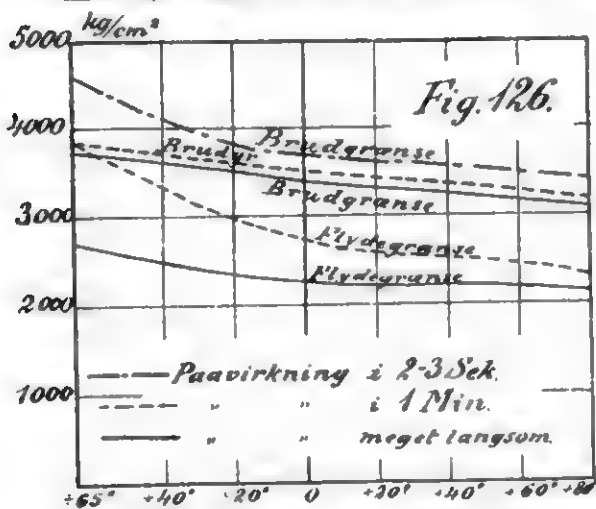


Fig. 126.

Fig. 129.

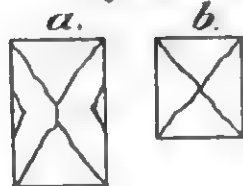


Fig. 130.

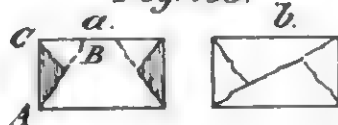


Fig. 131.



Fig. 132.



Fig. 133.



Fig. 134.

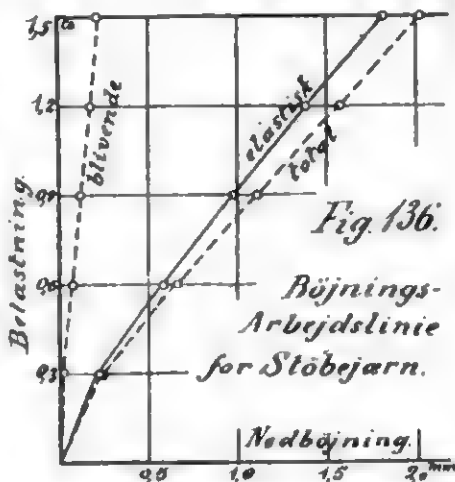
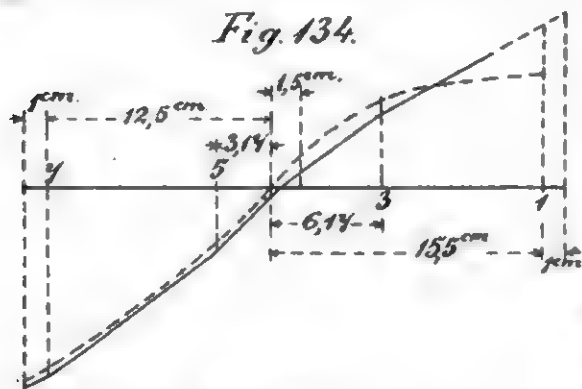


Fig. 135.

Træk og Tryk-Arbejdslinier for Støbejern.

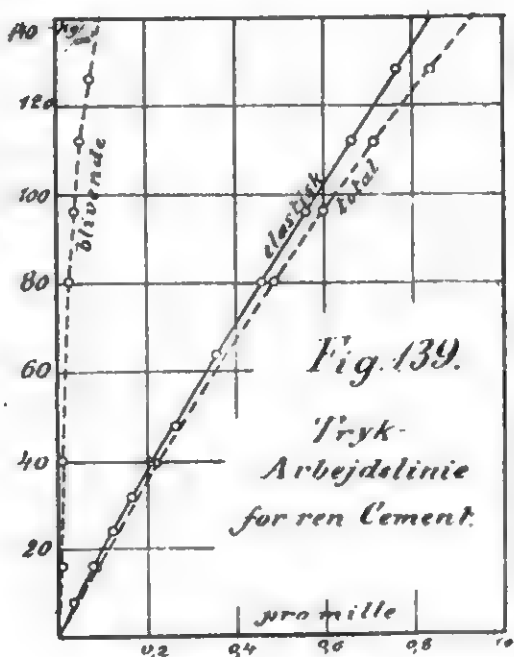
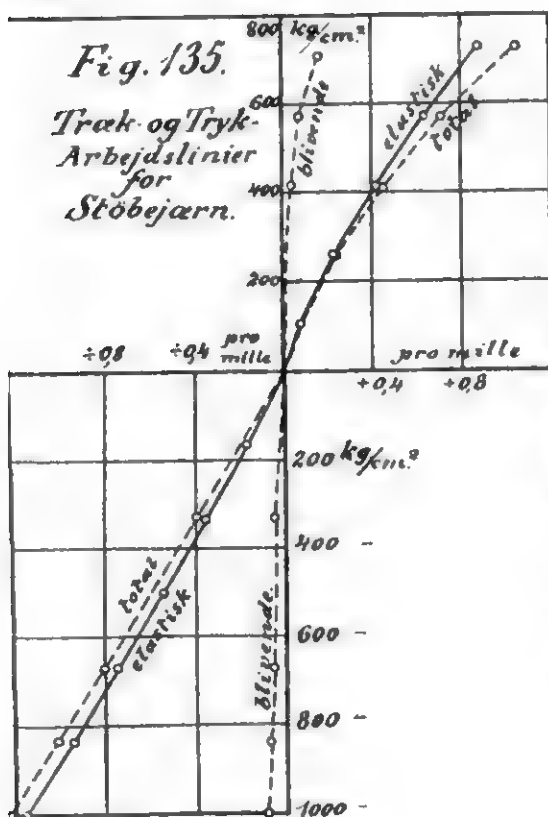


Fig. 139.

Tryk-Arbejdslinie for ren Cement.

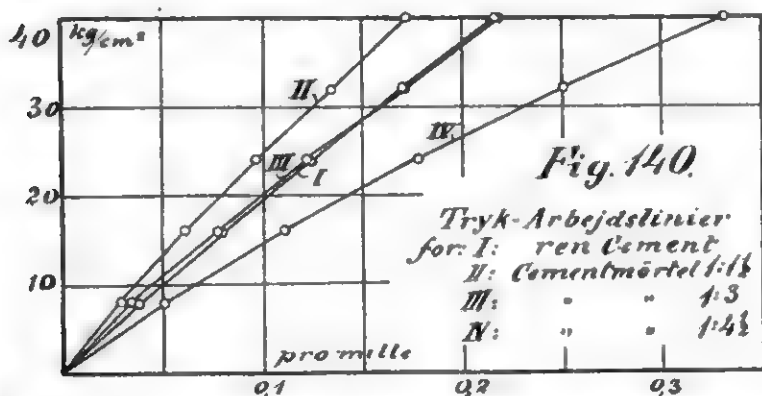
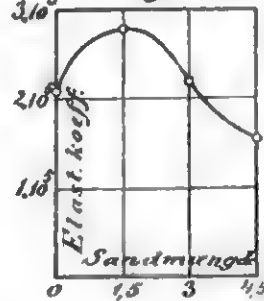


Fig. 140.

Tryk-Arbejdslinier for: I: ren Cement
II: Cementmørtel 1:1
III: " " 1:3
IV: " " 1:4 1/2

Fig. 141.



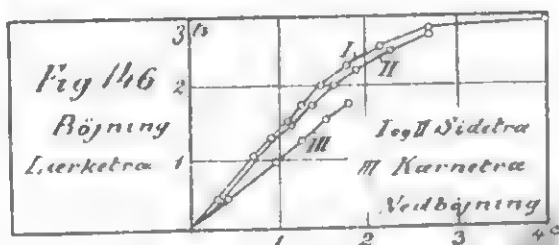
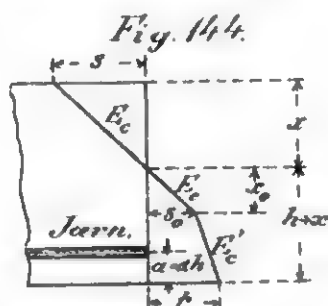
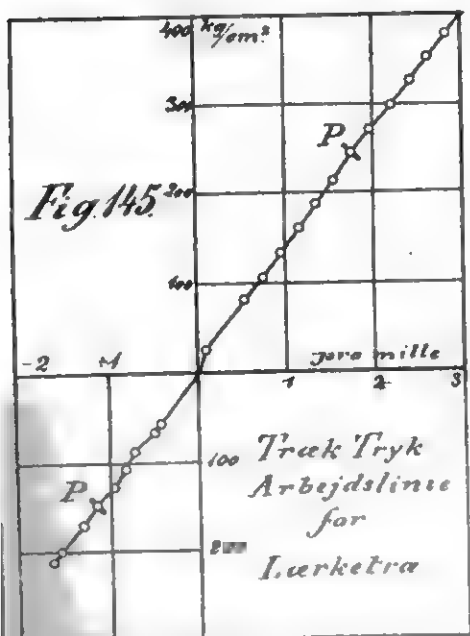
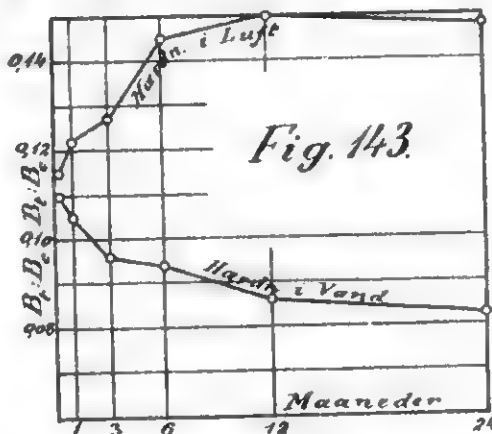
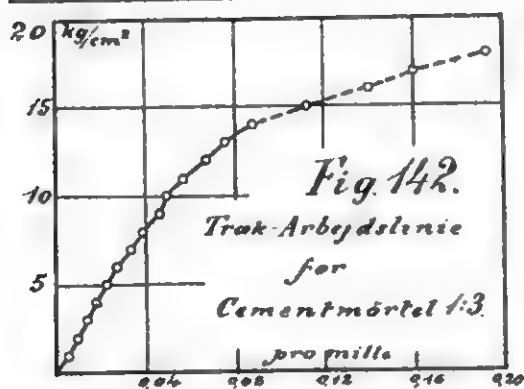
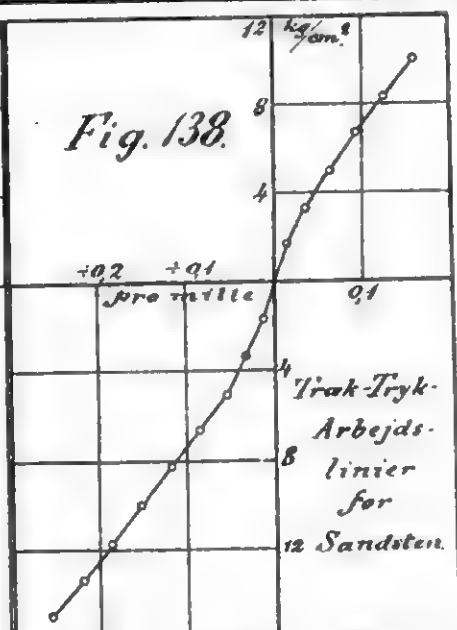
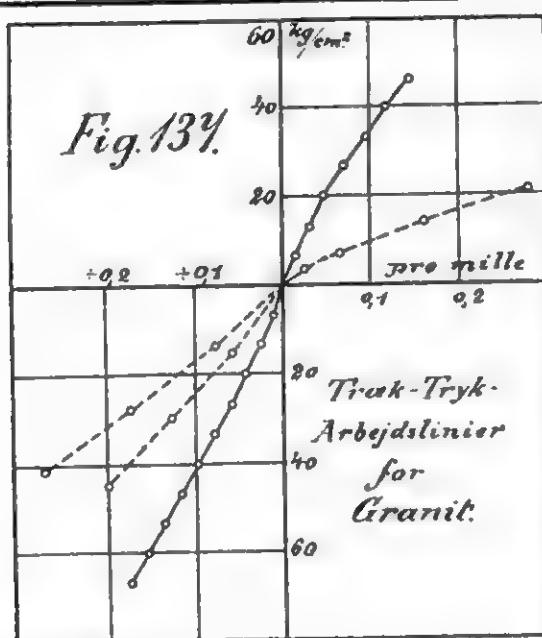


Fig. 159.

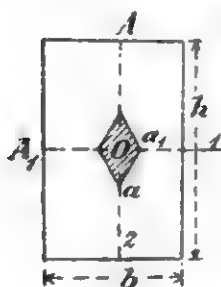


Fig. 160.

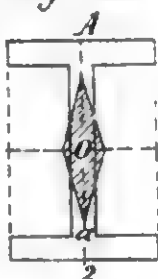


Fig. 161.

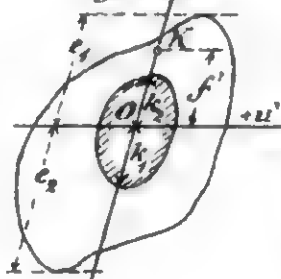


Fig. 162.

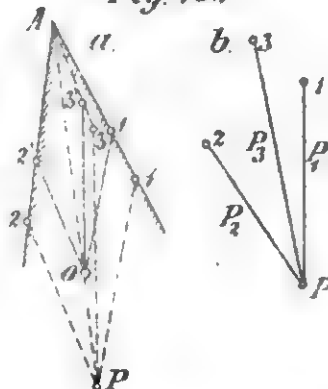


Fig. 164.

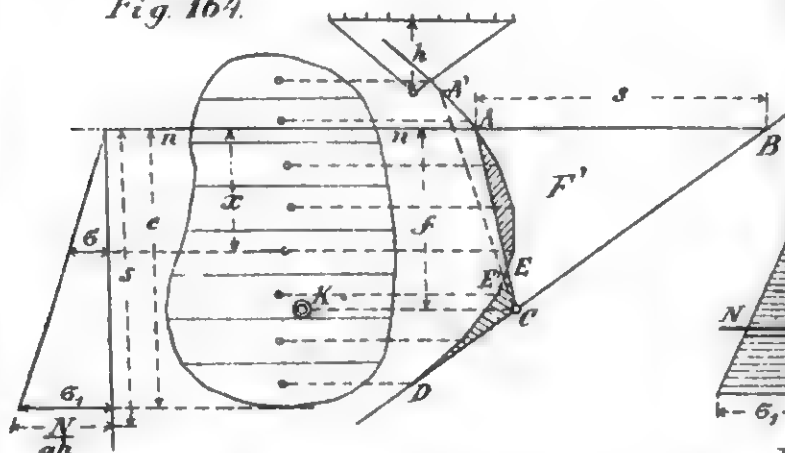


Fig. 163.

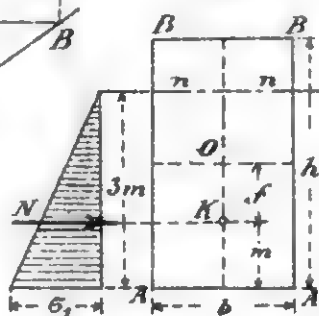


Fig. 165.

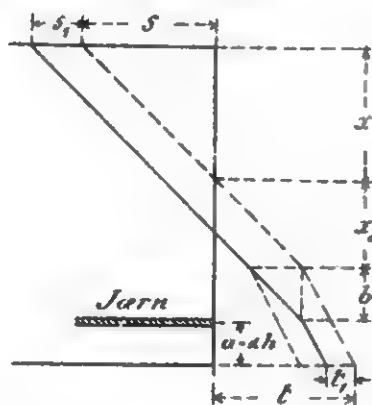


Fig. 166.

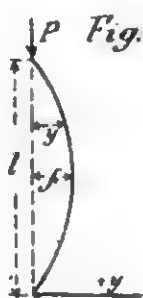


Fig. 167.

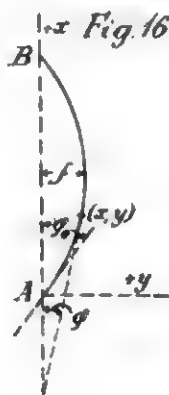


Fig. 169.

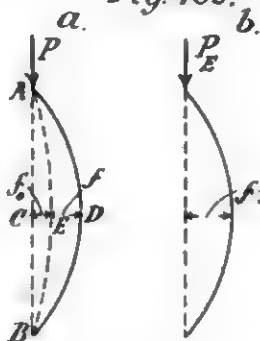
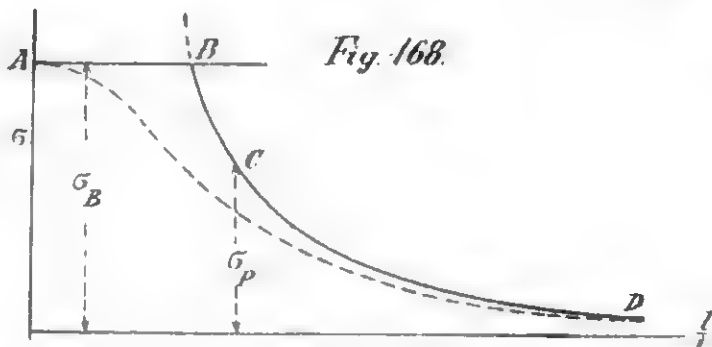


Fig. 168.



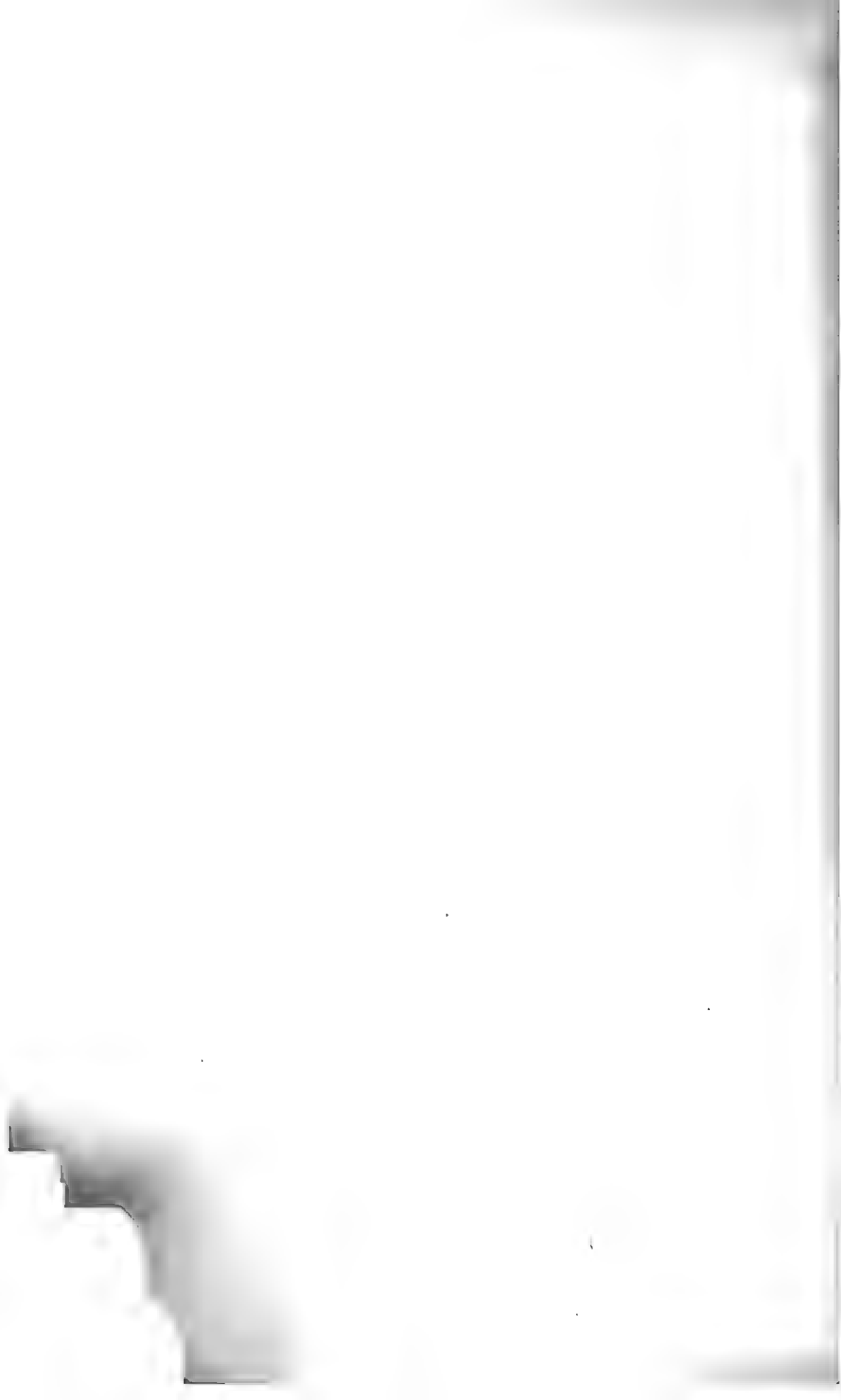


Fig. 159.

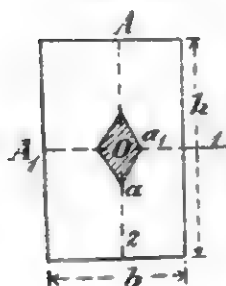


Fig. 160.

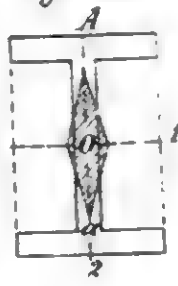


Fig. 161, v.

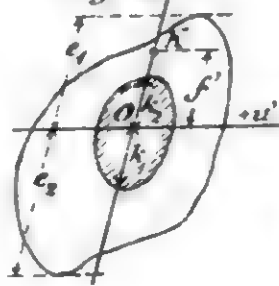


Fig. 162.

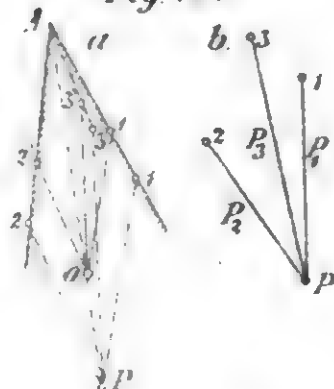


Fig. 164.

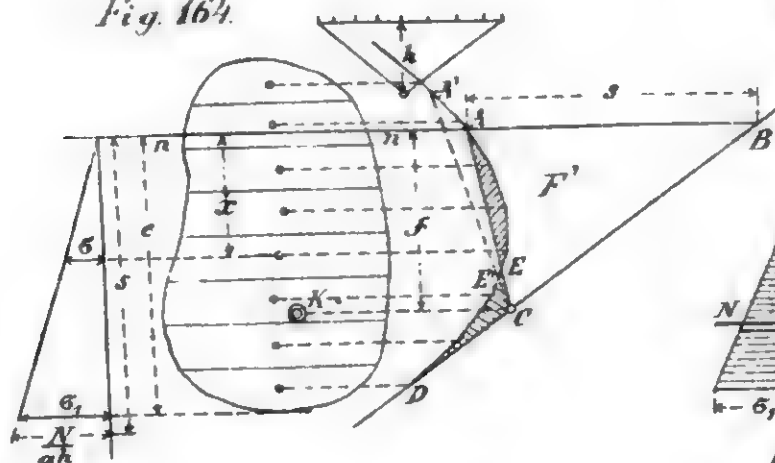


Fig. 163.

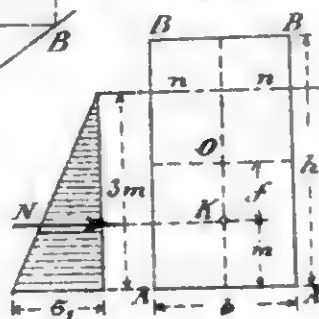


Fig. 165.

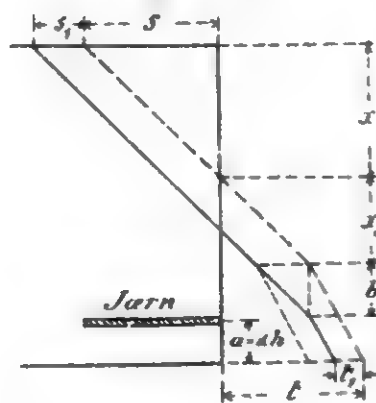


Fig. 166.



Fig. 167.

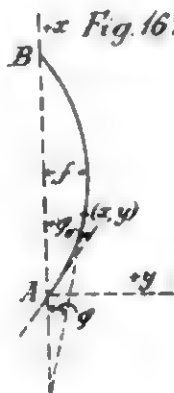


Fig. 169.

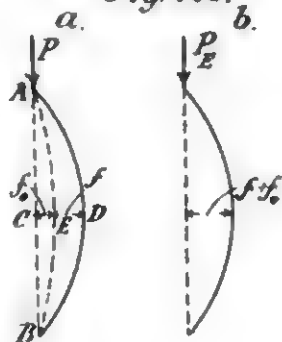
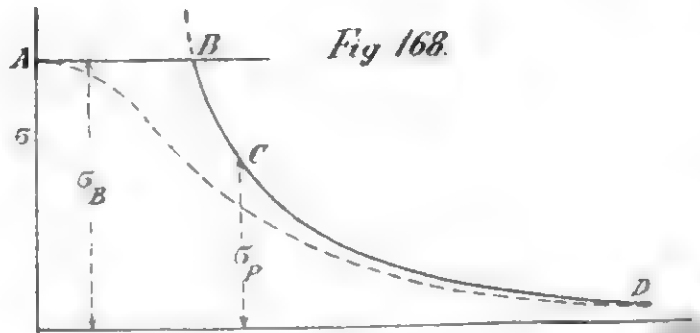


Fig. 168.



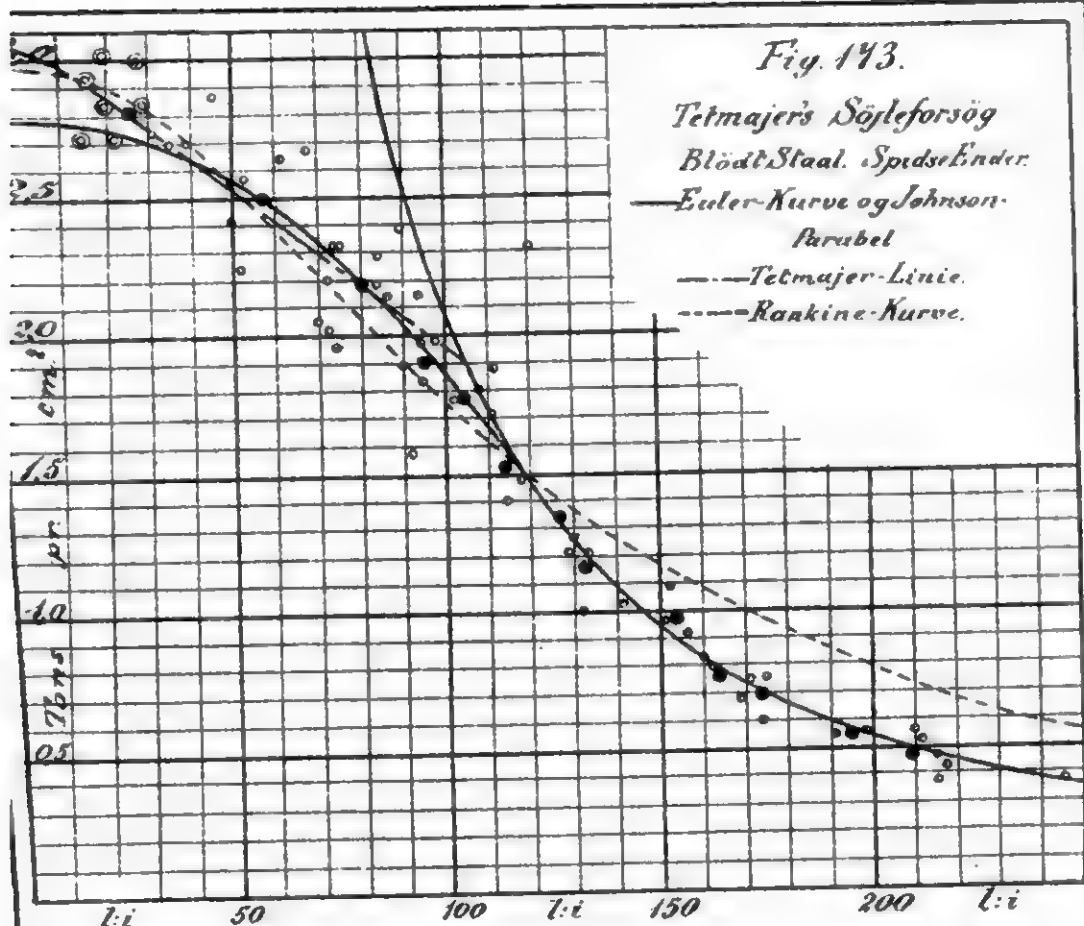


Fig. 140.

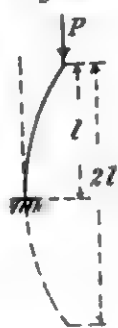


Fig. 141.

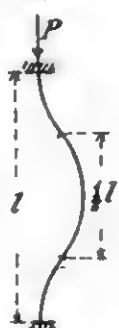


Fig. 142.

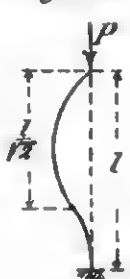


Fig. 144.

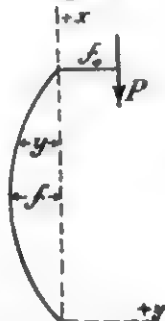


Fig. 145.

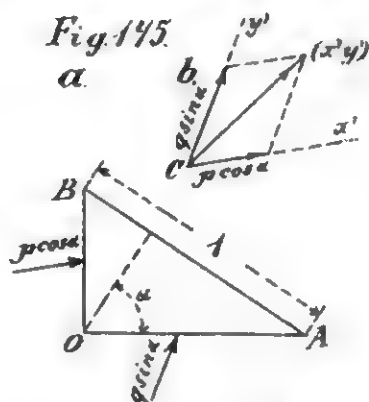


Fig. 146.

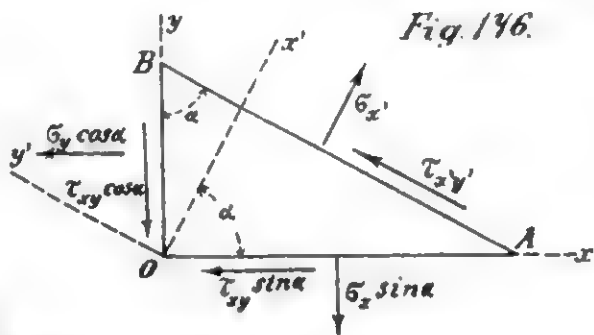


Fig. 148.

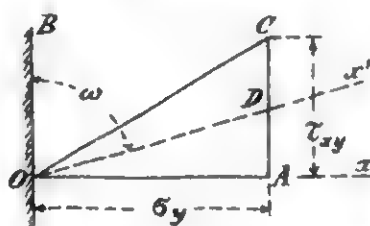


Fig. 174.

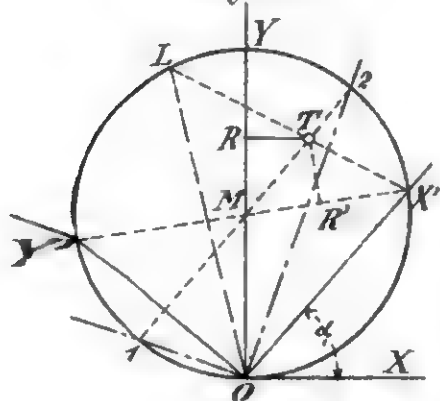


Fig. 179.

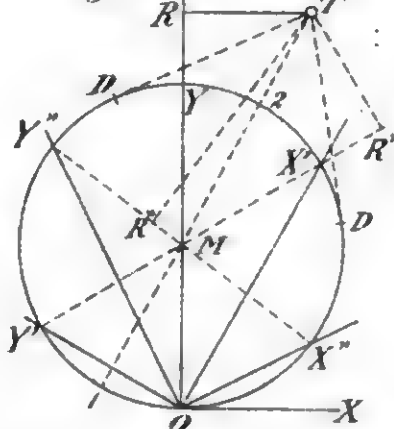


Fig. 180.

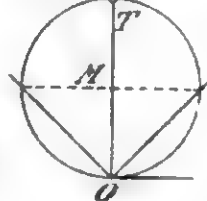


Fig. 181.

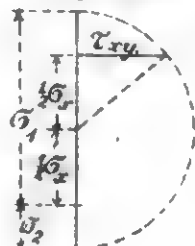


Fig. 182.

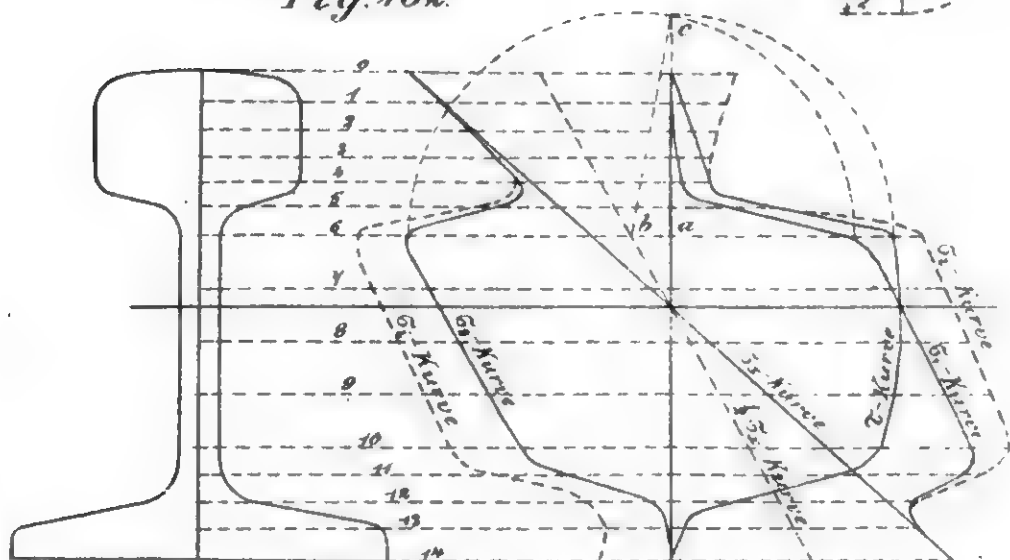


Fig. 183.

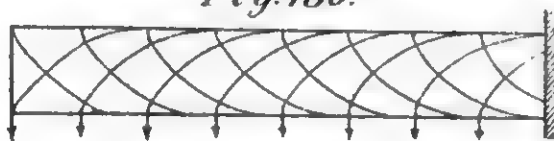


Fig. 186.

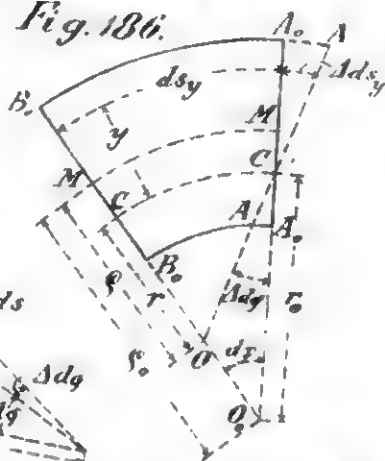


Fig. 184.

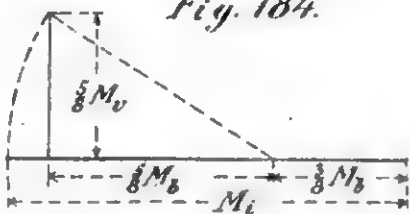


Fig. 185.



Fig. 174.

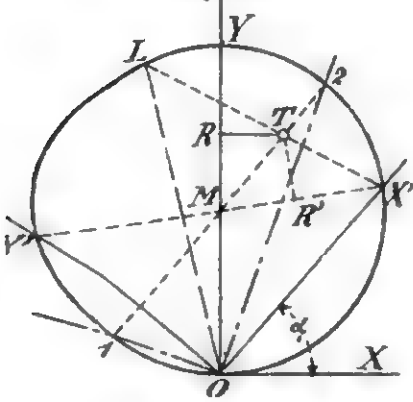


Fig. 179.

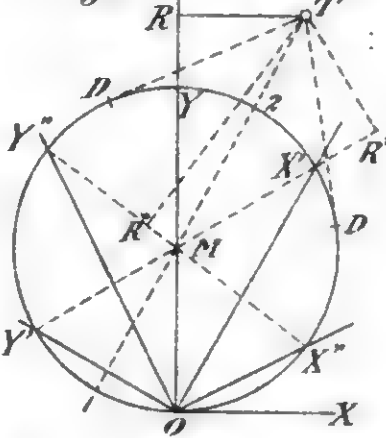


Fig. 180.

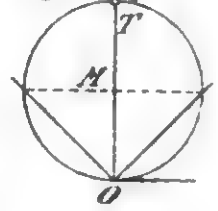


Fig. 181.

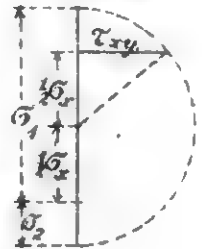


Fig. 182.

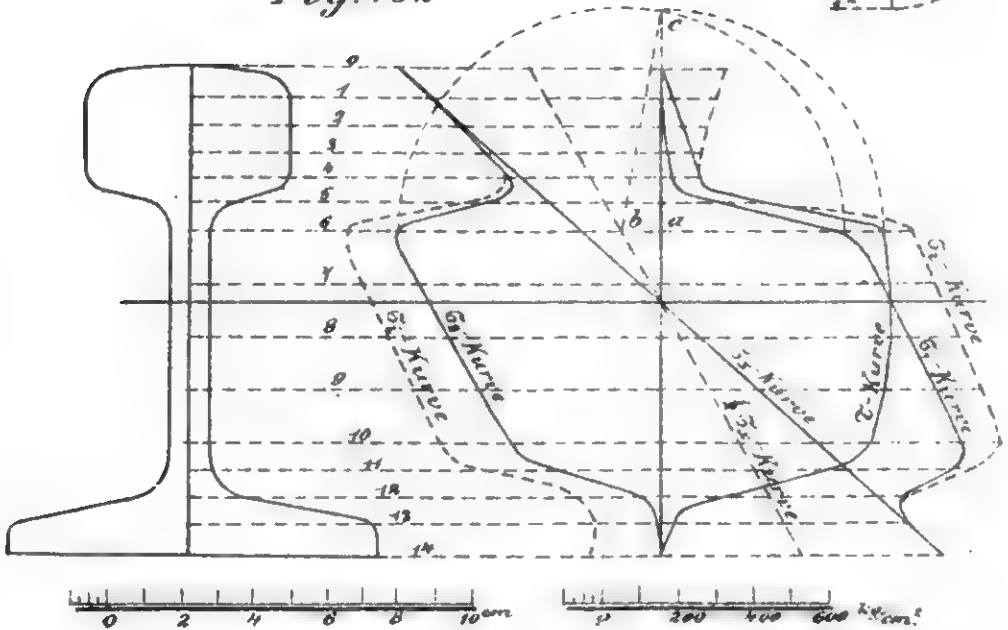


Fig. 183.



Fig. 184.

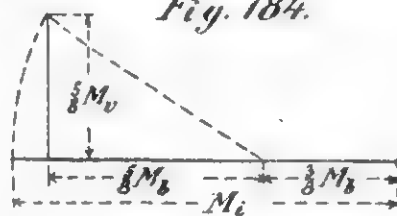


Fig. 186.

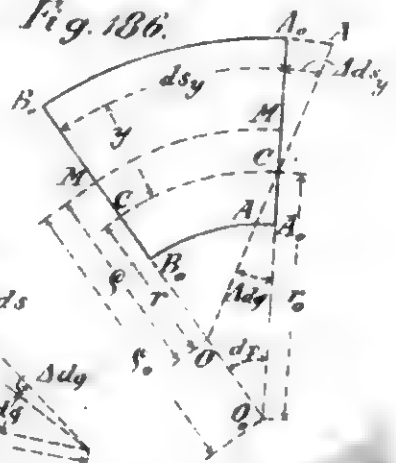


Fig. 185.



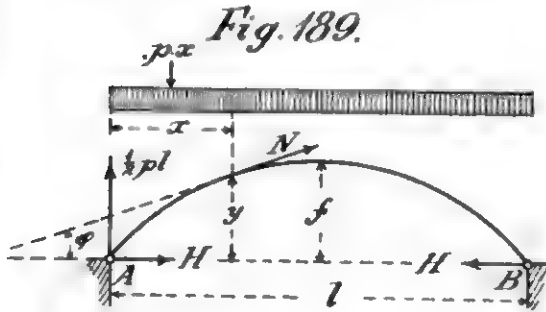
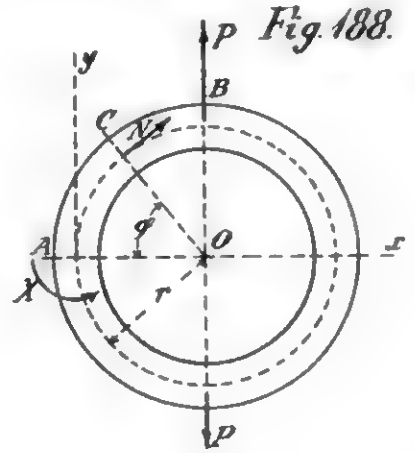
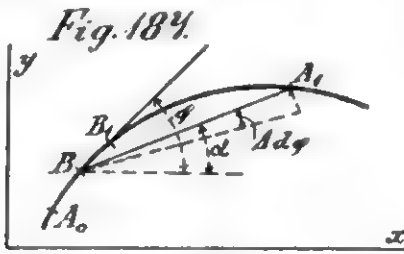


Fig. 191.

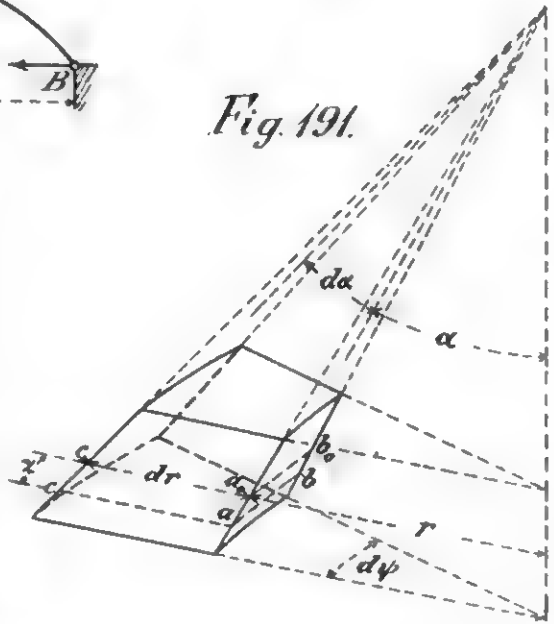
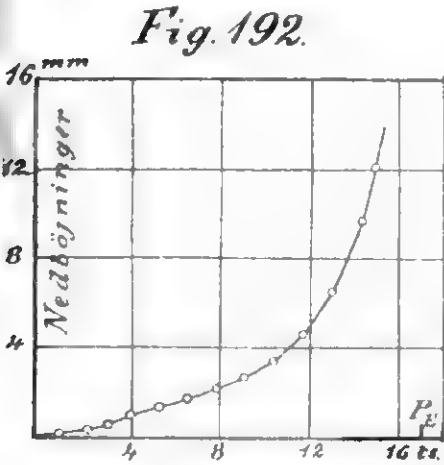
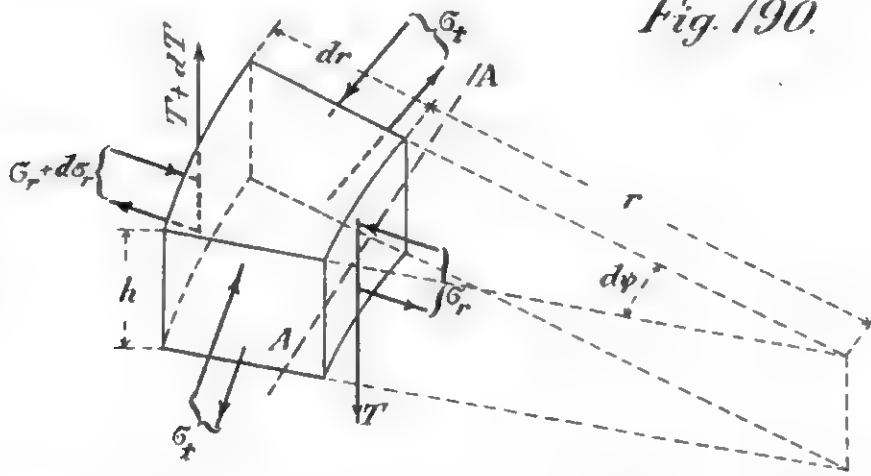
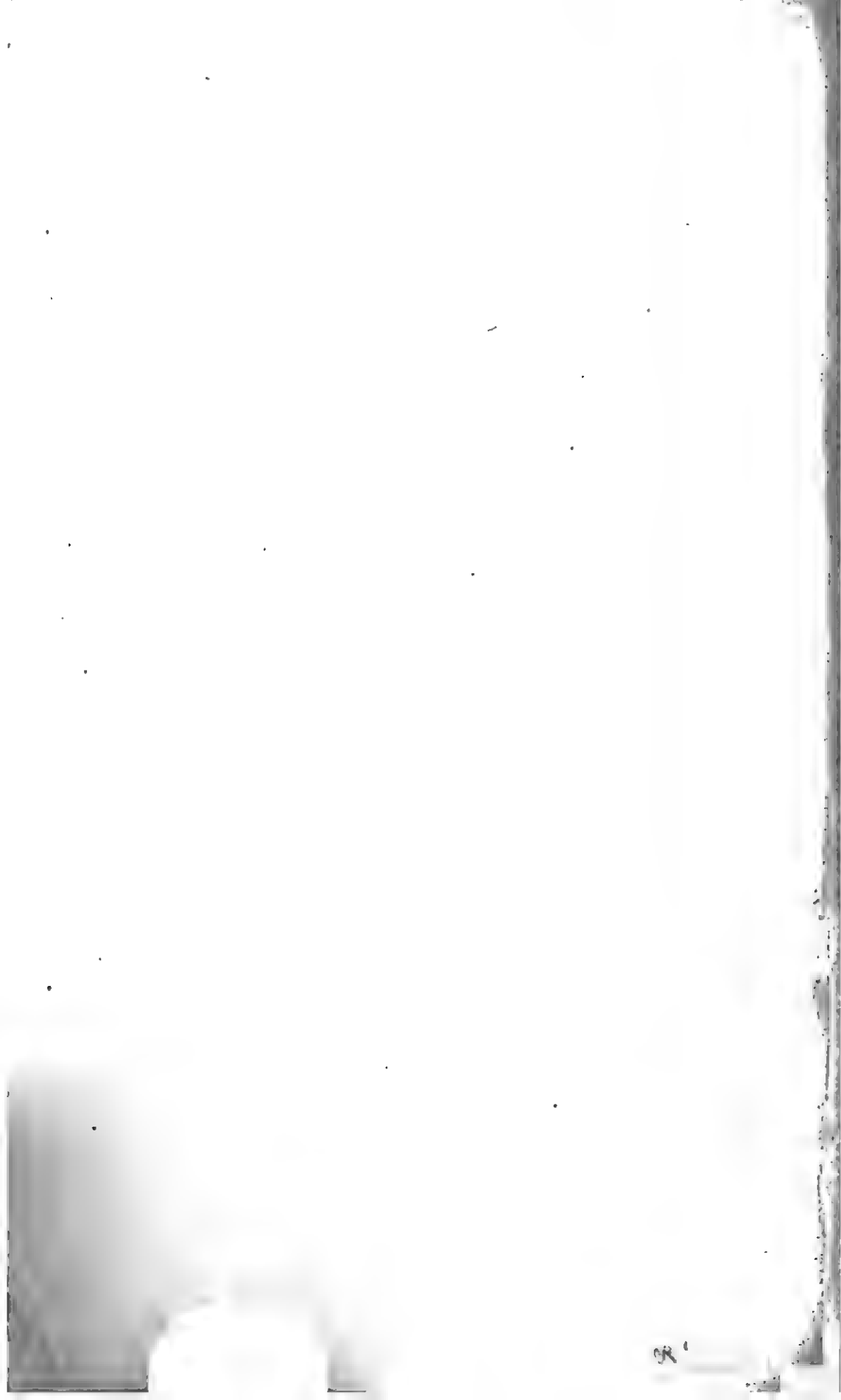


Fig. 190.





Nov. 29 1930



